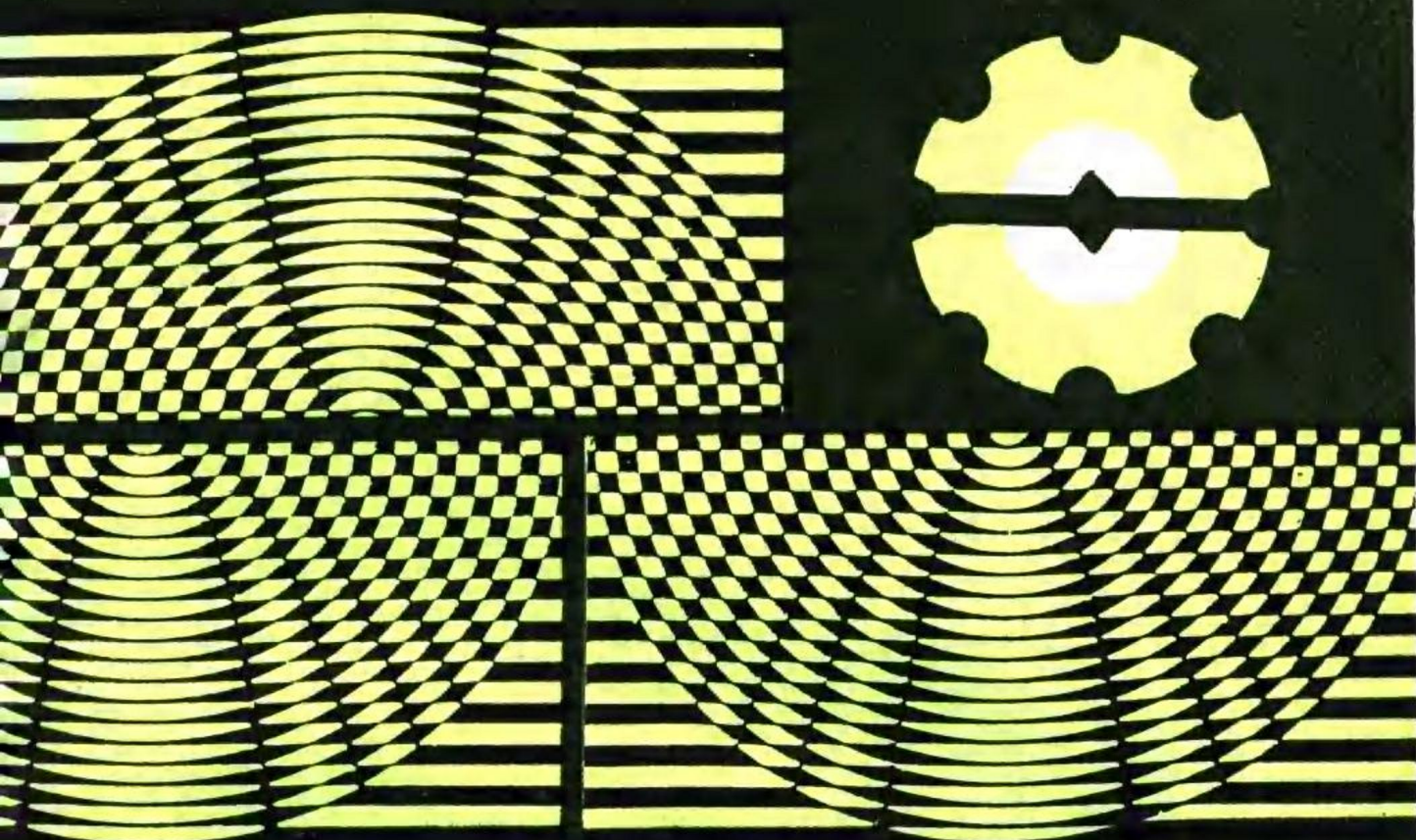




BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

机械工程 控制基础

● 黑龙江科学技术出版社 ●●

内 容 提 要

本书主要阐述了经典控制理论及其在机械行业中的应用。其主要内容有控制工程研究的对象及任务,控制系统的数学模型,拉普拉斯变换,传递函数,时间响应分析,频率特性,控制系统的稳定性稳态误差,控制系统的设计与校正。此外还介绍了非线性系统。

本书可作为大专院校、中专、职大和夜大等机械类各专业的教材,也适合于工程技术人员自学参考。

机 械 工 程 控 制 基 础

房丰洲 主 编

赵福生 主 审

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区建设街35号)

鸡西市印刷二厂印刷

787×1092毫米 16开本 14.25印张 300千字

1989年5月第1版·1989年5月第1次印刷

印数: 1—1500册

定价4.50元

ISBN7-5388-0748-9/TH·34

前 言

自动控制理论作为技术改造与技术发展的重要手段，已广泛应用于科学技术各个领域。本书主要阐述了经典控制理论及其在机械行业中的应用。

本书是应教学与工程技术人员的急需，根据几年来的授课讲义编写而成。参加本书编写的有房丰洲同志（编写第一、四、五、六章）、赵福生同志（编写第二、三章）、耿式考同志（编写第七、八章）和于祯同志（编写第九、十章），最后由房丰洲同志负责主编，赵福生同志主审。

由于时间仓促，难免有不当之处，敬请读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 绪论	1
第一节 引言.....	1
第二节 控制工程研究的对象及任务.....	1
第三节 系统的分类与几个基本概念.....	2
第四节 机械制造的发展与控制理论的应用.....	5
第五节 控制理论的发展简史.....	5
第二章 控制系统的数学模型	8
第一节 概述.....	8
第二节 系统数学模型的建立.....	10
第三节 非线性系统的线性化.....	13
第四节 线性系统的迭加效应和卷积关系式.....	18
第三章 拉普拉斯变换	20
第一节 拉氏变换的定义.....	20
第二节 拉氏变换的基本性质.....	23
第三节 拉氏反变换.....	29
第四节 用拉氏变换解线性微分方程.....	31
第四章 传递函数	32
第一节 传递函数的定义.....	32
第二节 典型环节的传递函数.....	33
第三节 传递函数的方块图及其等效变换.....	39
第四节 系统传递函数的推导举例.....	49
第五章 时间响应分析	60
第一节 时间响应与典型输入信号.....	60
第二节 一阶系统的时间响应.....	62
第三节 二阶系统的时间响应.....	66
第四节 高阶系统的时间响应.....	86
第六章 频率特性分析	91
第一节 频率响应和频率特性的概念.....	91
第二节 频率特性的一般谱图.....	95
第三节 频率特性的极坐标图.....	102
第四节 频率特性的对数坐标图.....	110
第五节 频率特性的实验测定法.....	125

第六节 控制系统品质的频率域评价指标	130
第七章 控制系统的稳定性	135
第一节 系统稳定性的初步概念	135
第二节 劳斯稳定判据	137
第三节 奈魁斯特稳定判据	142
第四节 波德稳定判据及系统的相对稳定性	160
第八章 控制系统的稳态误差	167
第一节 系统的稳态误差与稳态偏差	167
第二节 其它因素对系统稳态偏差的影响	172
第三节 降低稳态偏差、提高系统控制精度的措施	175
第四节 求取非单位比例反馈控制系统稳态误差的方法	177
第九章 控制系统的设计与校正	179
第一节 系统设计概要	179
第二节 校正装置	182
第三节 无源校正装置的线路及性能分析	189
第十章 非线性控制系统	200
第一节 工程中的非线性因素	200
第二节 描述函数的概念	203
第三节 典型非线性元件的描述函数	204
第四节 非线性系统的描述函数分析法	211
参考文献	220

第一章 绪 论

第一节 引 言

机械制造是一个重要的工业部门，重视它的作用与发展是国民经济中一项关键性战略措施。为了更快地发展机械制造业，就必须研究机械制造技术的现状与动向。

在科学技术日新月异发展的今天，机械制造技术发展的主要动向是：越来越多地引入了控制理论，虽然从发展来看，这还是初步的，但一旦进入到机械制造领域，就使其发生了一些根本的变革。

为什么控制理论刚一进入到机械制造领域就表现出如此巨大的生命力，而又得到了引人注目的进展呢？从根本上来讲，其原因是由于当代生产与科学技术的发展同这个领域内人们的传统思想方法与由此所采用的分析和解决问题的方式之间发生了尖锐的矛盾，而控制理论以它本身固有的辩证方法顺应了广大机械制造工作者渴望冲破旧的思想方法，推动这一领域的生产与学科向前发展的愿望。

控制理论不仅本身是一门极为重要的科学，而且又是一门哲理卓越的科学方法论。控制理论在工程技术领域中体现为工程控制论，在机械工程领域中体现为机械工程控制论。机械工程控制论是一门新兴学科，它紧密地将控制理论与工程实践结合起来以解决实际问题。本书主要涉及控制理论中经典部分的主要内容及其在工程实际中的应用。

第二节 控制工程研究的对象及任务

控制工程实质上是研究工程中系统的动态特性的一门科学。

所谓系统，就其物理形态来说可为机械、电气、液压及光学……等工程上的系统，也有可能为社会上的，生物学上的系统，但无论如何，它们的动态行为都可以用微分方程描述。这种系统在外界条件作用下所表现出来的动态历程，说明了系统输入、模型与输出的内在关系。

如大家都熟悉的质量—阻尼—弹簧这样一个机械系统，如图 1—1 所示。图中 m 、 k 及 f 分别代表系统的质量、弹簧刚度系数及粘性阻尼系数。如果 $x(t)$ 代表输入的外力，而 $y(t)$ 代表系统的位移响应，那么系统的数学模型可由微分方程描述，其关系为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = x(t) \quad (1-1)$$

所谓系统的动态性能，包括哪些问题呢？可以归纳为三类：

(1) 已知系统的 m 、 k 、 f 及输入 $x(t)$ 确定输出 $y(t)$ ；

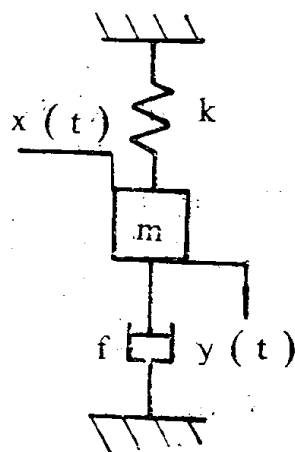


图 1—1 质量—阻尼—弹簧机械系统

(2) 已知输入 $x(t)$ 及输出 $y(t)$, 确定系统的参数 m 、 k 及 f ;

(3) 已知系统的 m 、 k 及 f , 给定输出 $y(t)$ 时, 确定输入 $x(t)$ 。

这三类问题, 概括起来就是研究输入、输出与模型之间的关系。

在机械制造领域里, 很多具体问题都是研究这三者之间的关系。可举下述一些例子来说明。

(1) 液压随动系统中, 当使随动阀按某一规律运动, 其执行机构——液压马达也按同一规律运动, 但液压马达的动态响应特性与随动系统的结构及参数有关。这里的输入为随动阀的运动规律, 输出为液压马达的响应, 随动系统的结构及参数就决定了系统的模型。

(2) 在研究切削加工过程动力学问题时, 切削速度、进给量、切削深度、刀具几何形状及冷却润滑条件等都为输入, 而切削力、切削温度、刀具磨损及切屑情况等为输出, 切削加工过程为一系统, 当然, 这种切削加工过程是一个多输入、多输出的问题。

(3) 当用某一仪器在一定条件下进行测试时, 工作条件为输入, 仪器为系统, 结果为输出。

由以上分析可知, 机械工程控制论的内容主要可归纳为如下两点:

(1) 当系统结构及参数一定, 输入已知时, 求系统的输出(响应), 并通过输出来研究系统本身的结构及参数的有关问题, 此即系统分析问题;

(2) 当系统结构及参数已定时, 确定输入函数, 且所确定输入函数应使得输出尽可能符合给定的最佳要求, 此即最优控制问题。

本书主要以经典控制理论来研究上述问题。

第三节 系统的分类与几个基本概念

一、系统的分类

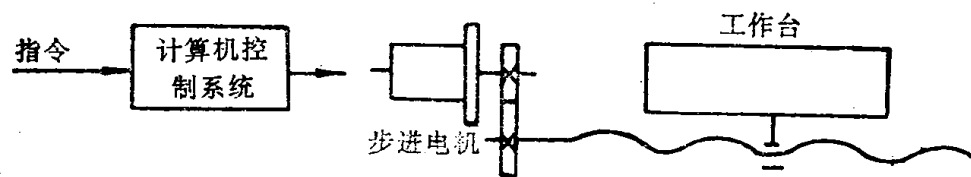
工程中的系统, 按其物理结构来说, 形式多种多样, 大小与复杂程度也不尽相同, 但可以人为地将其分类, 以利于研究。

1. 按输入与输出的关系分类

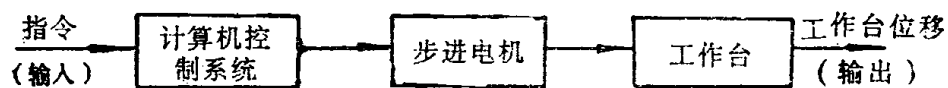
(1) 开环系统 当构成系统的每一环节的输入不受系统的输出影响时, 称此系统为开环系统。如图1—2所示的数控机床进给系统采用步进电机直接驱动时, 其系统就属于开环系统。这一系统中, 系统的输出不对系统的输入有任何影响。优点是结构简单、调试方便, 且造价低廉。缺点是精度较低。

(2) 闭环系统 当构成系统的任一环节的输入受到系统的输出影响时, 此系统称为闭环系统。如图1—3所示数控机床进给系统采用检测装置控制时, 该系统就属于闭环控制系统。

这一系统中, 由于工作台位移(输出)经检测装置测出实际的位移后与给定的位移指令比较, 从而产生控制作用, 达到工作台移动的目的。因此, 如果实际的位移没达到指令要求时, 这种控制作用始终作用于工作台, 直到工作台达到所要求的位置, 闭环系

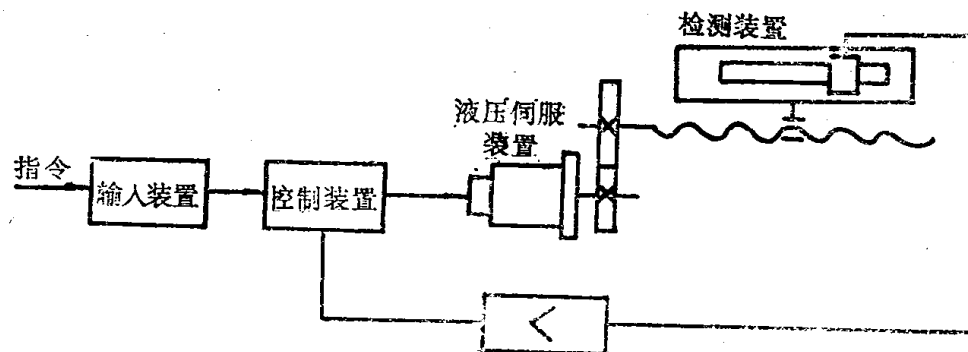


(a) 系统原理图

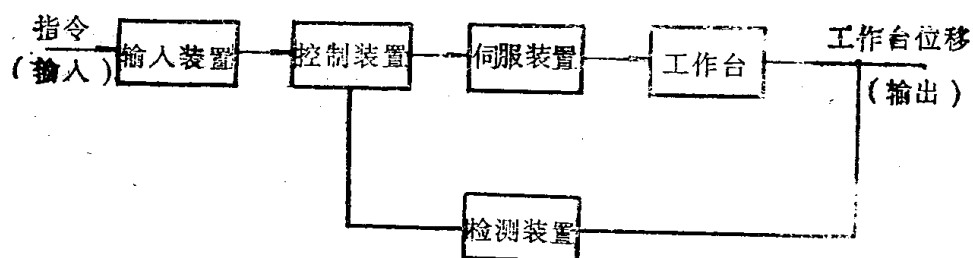


(b) 方块图

图 1—2 数控机床开环进给系统



(a) 系统原理图



(b) 方块图

图 1—3 数控机床闭环进给系统

统的精度较之于开环系统精度为高，但系统却较为复杂，相对来说调试也困难一些。

2. 按输出的变化规律分类

(1) 恒值系统 在外界作用下，系统的输出能基本保持为常值的系统称为恒值系统。如恒温、恒压及恒速等系统。

(2) 随动系统

系统的输出能相应于输入在广阔的范围任按任意规律变化的系统为随动系统。如图1—4所示的仿形车床的液压仿形刀架，靠模为给定的系统输入，刀架仿形运

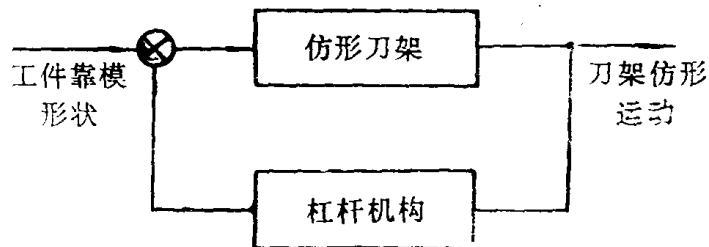


图1—4 液压仿形刀架

动为系统的输出，显而易见，这种系统为闭环系统。

(3) 程序控制系统 在外界作用下，系统的输出按预定程序变化的系统为程序控制系统。如前面曾经介绍过的数控机床的两种进给系统，都属于程序控制系统。

二、几个重要的概念

1. 反馈

数控机床闭环进给系统中，通过检测装置将其输出位移回馈到输入端，并与给定的输入指令相比较，这种作用就称为反馈。今后，所要研究的都是负反馈，所谓负反馈就是把输出量通过检测装置与输入量比较，按其差值起作用。如果输入为 $x(t)$ ，而反馈回来的量为 $y(t)$ ，那么差值 Δ 就为

$$\Delta = x(t) - y(t) \quad (1-2)$$

式(1—2)表明了负反馈作用，除此之外，如果输入量为 $x(t)$ ，反馈回来的量存在下述关系：

$$\Delta = x(t) + y(t) \quad (1-3)$$

式(1—3)表明了正反馈作用，本书中不研究正反馈。这倒不是因为正反馈没用，恰恰相反在电子线路中的振荡线路，是以正反馈作用为基础的，是很有用的一种反馈形式。

2. 连续系统与采样系统(离散系统)

如果系统每个环节之间所传递的信息都是时间的连续信号，这种系统为连续系统。直到目前仍然用的较多。但是如果在系统中，计算机参与工作时，环节之间所传递的信息除了有连续的信号外，还有离散信号，这样的系统称为采样系统或离散系统。当今科学发展中，由于计算机普遍用于系统中，采样系统将愈益增多。但它的分析方法与分析步骤同连续系统是类似的。因而掌握了连续系统，再掌握采样系统的特殊问题就是为研究采样系统创造了条件。限于篇幅，本书只讨论连续系统。

3. 定常系统与变时系统

描述系统的微分方程的系数不随时间而变化的系统称为定常系统；其系数随时间变化的系统，称为变时系统。严格地说，一个物理系统其系数都是随时间变动的，一成不变是不存在的，但由于在所研究的有限时间里变化不大，这样的系统都可以看作定常系

统。本书只研究定常系统，不涉及时变系统的概念。

第四节 机械制造的发展与控制理论的应用

控制理论源于机械工程。但是，作为机械工程这门学科的一个重要组成部门——机械制造工程长期以来却没有从控制理论的丰硕成果中吸取充分的营养，并以自己领域的实践为这门新兴学科的发展提供更加广阔的天地。这是由于机械制造工艺过程及其设备的复杂性、影响因素太多及数学模型难以建立等多种原因，也可能由于过去生产水平低，对产品的质量要求不高，按老办法、老设备加工也可以满足要求。因此，源于机械工程的控制论反而远离了机械制造领域。只是随着机械工程日益迫切的现代化要求及控制技术的进一步发展，近年来控制理论才开始在机械制造领域中获得日益广泛的应用。

目前，控制理论在机械制造领域中应用最为活跃的有下面几个方面：

1. 机械制造生产过程自动化方面

现代生产对机械制造生产过程的自动化提出了越来越多的要求，一方面是所采用的生产设备与控制系统越来越复杂，另一方面是要求的经济指标越来越高，这就必然导致“自动化”与“最优化”的结合，从而使机械制造生产过程自动化机床、自动生产线发展到计算机直接控制、计算机分级控制、柔性自动生产线及设计制造管理一体化的集成生产。

2. 加工过程的研究方面

由于生产效率越来越高，如高速切削、强力切削日益广泛应用；同时加工质量特别是加工精度越来越高， 0.1μ 精度级、 0.01μ 精度级乃至 μ 精度级都已出现，加工过程的“动态响应”不容忽视，这就要求把加工过程当作动态过程加以研究。

3. 产品及设备的设计方面

产品与设备的设计已经开始突破以往的经验设计、试凑设计及类比设计的束缚。在充分计及产品和设备的动态特性条件下，探索建立数学模型，进行优化设计。

4. 动态参数或过程的测试方面

以往的测量一般是建立在静态基础之上的几何量的测量，现在，则以控制理论作为基础。建立在动态基础上的测试技术发展十分迅速，测量动态精度、动态位移、振动、噪声动态力及动态温度等等，从基本概念、测试手段乃至数据处理无不与控制理论息息相关。

总而言之，控制理论及计算机技术同机械制造技术结合，将使机械制造领域中的试验、研究、设计、制造及管理等方面发生巨大的变化。

第五节 控制理论的发展简史

也许有更早的应用例子，但是迄今被公认的没有人参与的第一个控制系统是1735年

J·瓦特发明的飞球调节器。瓦特断定用人去开关一个蒸汽阀来维持汽轮机转速恒定并不是最好的办法。他发明的调节器示意图见图1—5，乃是汽轮机轴相连接的一个纯机

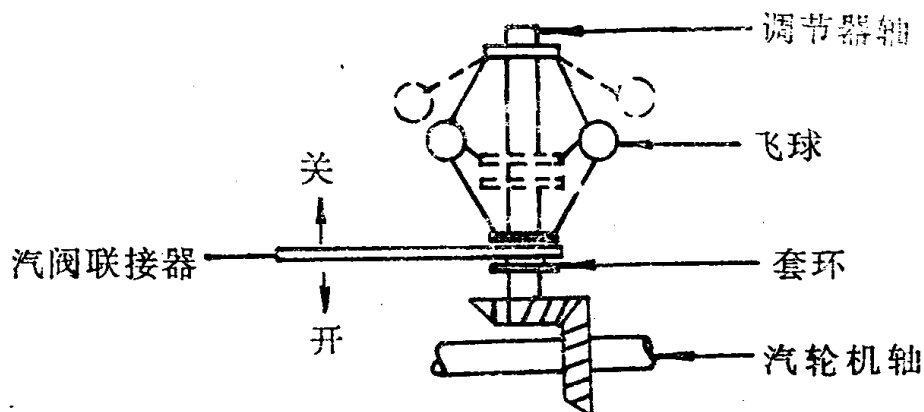


图1—5 整球调节器

械装置。当调节器轴的转速升高，飞球转的愈快，愈向外。于是汽控阀的联结器沿着轴向上移动，关小汽阀并减慢汽轮机。当转速下降时飞球作相反的运动而使汽轮机转速相应地升高。1868年，J·C·马克思威尔首先在伦敦皇家学会会议记录（Proceeding of the Royal Society of London）第16卷上发表了“论调速器”一文，E·J·劳斯与N·A·威舒涅格拉斯基分别于1884年和1887年提出了有关线性系统稳定性的判据，使自动控制技术前进了一大步。1923年，海维舍特提出了设计系统的算子法。1932年，H·奈魁斯特研制出了电子管振荡器，同时提出了著名的Nyquist稳定性判据。此后，H·W·波德总结出了负反馈放大器。第二次世界大战期间，美国MIT伺服机构实验室等对以往的自动调节器与反馈放大器作了总结，提出了反馈控制的数学基础。与此同时，随动系统在军事部门中迅速发展。1945年，第一本经典控制理论的书籍《伺服机构》出版；1948年，N·维纳发表了著名的《控制论》，形成了完整的经典控制理论。1950年，W·R伊万斯提出了根轨迹法，能简便地寻找特征方程的根，进一步充实了经典控制理论。

50年代，随动系统理论从军用逐步转向民用生产部门，控制理论得到进一步应用。例如，在化工、炼油、冶金等部门，实现了对过程的控制，解决了压力、温度、流量与化学成分的控制问题。钱学森同志在50年代初期，从控制论这一总题目中，把已为当时科学技术与工程实践所证明了的部分分离出来，创立了工程控制论这门学科，并于1954年出版了《工程控制论》这一名著，这对推动控制理论的应用起了很大作用。

50年代及其以前的控制理论属于经典控制理论。它是以调节器与伺服机构为基础的自动调节原理的进一步提高，它主要是在复域内（特别是频域内）利用传递函数（或频率特性）来研究与解决单输出线性系统的稳定性、响应快速性与响应准确性的问题。这也是本书需要着重阐述的问题，即属于第一章第二节归纳的问题。

50年代末与60年代初，一方面由于空间技术的发展与军事工业的需要，对自动控制系统的要求越来越高；另一方面由于电子计算机技术日趋成熟，从而产生了现代控制理论，它主要是在时域内利用状态空间分析来研究与解决多输入多输出系统的最优控制问

题；它成功地解决了导弹、航空、航天的制导等方面的问题，并逐步用于民用工业生产。在这里关键问题有两个：一是对某一过程或系统能否建立一个反映该过程或系统的动态数学模型，二是对此模型能否提供有效的算法与程序。

在现代控制理论中，特别应当提到三位学者的重要贡献：1956年，苏联的 $\pi \cdot c \cdot$ 彭特略金提出了极大值原理；1957年，美国的 $R \cdot I \cdot$ 贝尔曼提出了动态规划；1960年，美国的 $R \cdot E \cdot$ 卡尔曼提出了Kalman滤波理论。他们的工作对现代控制理论的建立有着特别重要的作用。

应指出的是，现代控制理论的基本工具是状态空间理论，它是从分析力学中引过去的，而“分析力学”这一为力学工作者称为经典力学的理论是19世纪初期为研究机械运动而发展起来的。因此，现代控制理论的基础与发展也是同机械工程密切相关的。目前，现代控制理论已用于研究机械制造领域中一系列问题，如加工过程的数学模型、切削自激振动、机床热变形、液压系统优化设计等问题。

第二章 控制系统的数学模型

第一节 概 述

一、系统的数学模型

研究一个自动控制系统，单是分析系统的作用原理及其大致的运动过程是不够的，必须同时进行数量上的分析，才能做到深入的研究并将其有效地应用到实际工程中去。

控制系统的数学模型是根据系统的动态特性，即通过决定系统特性的物理规律，如机械、电气、热力、液压、气动等方面的基本定律而建立的。它代表系统在运动过程中各变量之间的相互关系，既定性地又定量地描述了整个系统的动态过程。因此，要分析和研究一个控制系统的动态特性，就必须列写该系统的运动方程式。

由于系统的数学模型就是系统的输出与输入间的数学表达式，可以从理论上分析求得，也可以用实验方法求得，两种方法往往是相辅相成的。理论分析大致确定数学模型的阶次、参数与结构，而试验方法可以最终确定数学模型的形式。

从理论上建立系统数学模型，常称为理论建模，这往往是困难的。为建立一个系统的理想的数学模型，必须注意下面几点：

(1) 必须对元件或系统的构造、工作情况等有足够的了解。一个系统是由很多元件组成的，这些元件可能从属于机械、电气、光学、液压与气压等一类或几类。按系统的工作要求组成一些独立的部件，不仅元部件内部结构不同，而且外界扰动因素又是很复杂的。因而掌握元部件、系统的工作原理与工作情况，对于推导系统的数学模型是十分必要的。

(2) 忽略一些次要因素，进行合理的简化。如系统中含有分布参数元件、非线性元件以及常数变化的元件等，如果全部因素都予以考虑，建立起来的数学模型往往是极其复杂的，从工程角度来看很难有实用的价值。

(3) 不同元件或系统应采用与之相应的物理定律来建立输入与输出的关系。如机械系统常用牛顿定律、能量守恒定律，电气系统采用基尔霍夫定律等。这是建立数学模型的基础。

二、线性系统

一个系统，无论是用代数方程还是用微分方程描述，其组成项的最高指数，称为方程的次数。一次微分方程叫做线性微分方程，二次以上的微分方程叫做非线性微分方程。

一个能够用线性微分方程（或线性代数方程）描述的系统叫做线性系统。

例如，可以分别用下列微分方程描述的系统

$$3y = 2x + 4$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 6\frac{dx}{dt} + 3x$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 4x$$

就叫做线性系统。

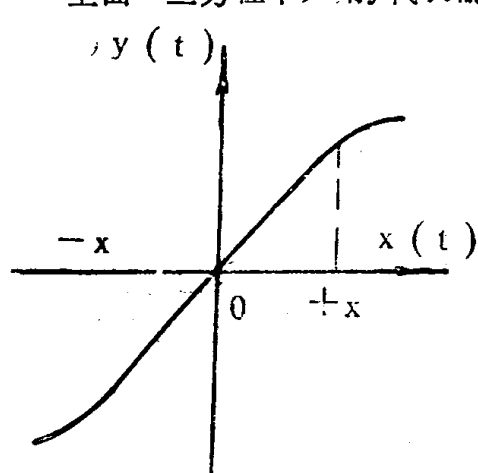
而如方程

$$3y = x^2 + 3xy + x$$

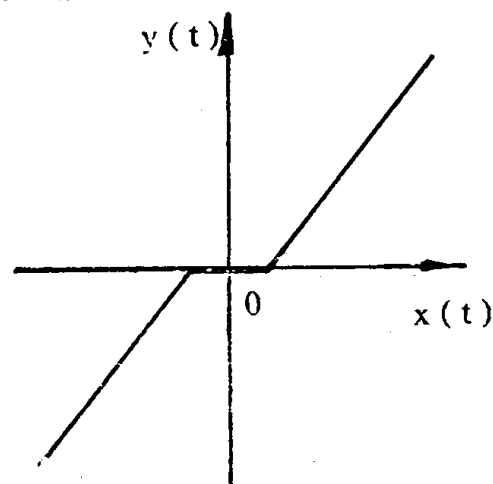
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y = x$$

描述的系统叫做非线性系统。

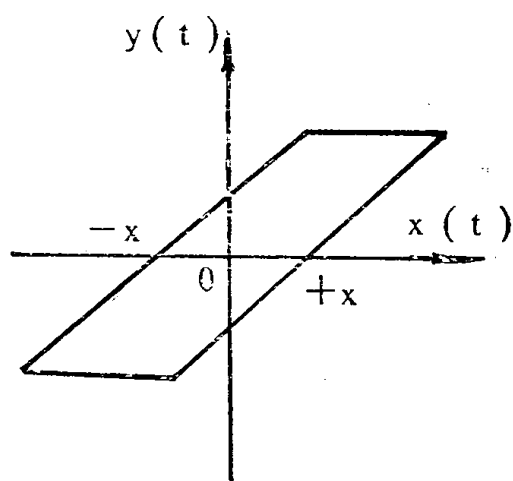
上面一些方程中，用 y 代表输出量，以 x 代表输入量，一般习惯上都把输出量写在



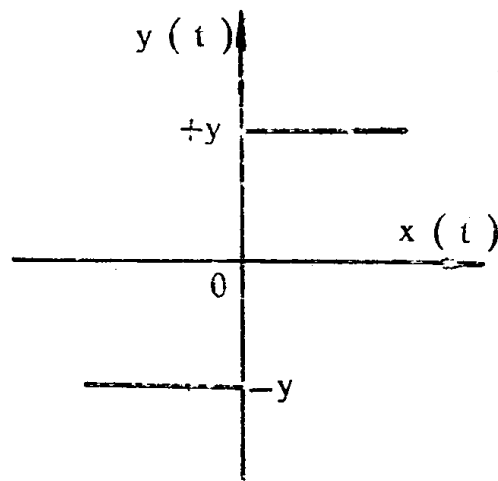
(a) 饱和非线性



(b) 死区非线性



(c) 间隙非线性



(d) 干摩擦与粘性摩擦非线性

图 2—1 常用的非线性特性

方程的左端，而把输入量写在方程的右端。

线性系统最重要的性质就是迭加性。

三、非线性系统

在一个系统中，只要包含一个具有如图 2—1 所示的任一非线性元件，那么，这个系统的微分方程一定为非线性微分方程，这样一个系统就是非线性系统。

严格地说，一切物理系统都是非线性系统，但为了研究方便起见，常常略去那些影响较小的非线性因素所引起的误差，如果工程上允许的话，这个系统就可以作为线性系统来处理。

如图 2—1 (a)、(b) 所示的非线性因素。如果输入量 $x(t)$ ，在一定范围内变动，输入与输出可视为线性关系，则非线性因素可以作为线性因素来处理，只有对那些包含如图 2—1 中的 (c)、(d) 绝对非线性因素的系统才按非线性系统来研究。

第二节 系统数学模型的建立

由第二章第一节的内容可知，建立良好的数学模型不仅要运用基础理论还要有科学实验和工程实践的基础。下面举例说明数学模型的建立过程，再讨论建立控制系统数学模型的一般步骤。

〔例 2—1〕 滤波网络

设有由两个形式相同的 RC 电路串联而成的滤波网络 (图 2—2)，试建立以输出电压 u_2 为输出量和以输入电压 u_1 为输入量的系统的数学模型。

〔解〕 设 R_1 、 R_2 分别为两串联 RC 电路的电阻； C_1 、 C_2 分别为两串联 RC 电路的电容。

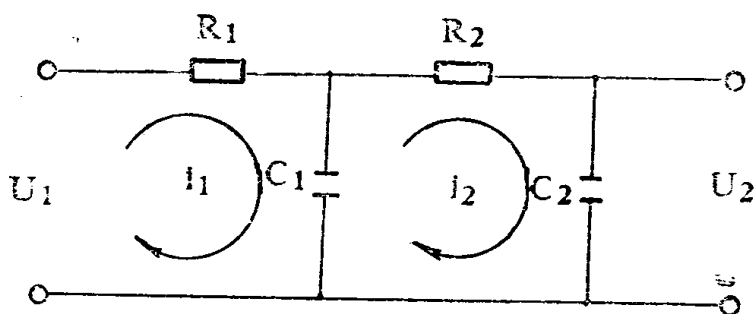


图 2—2 滤波电路

根据基尔霍夫定律，列出下列方程：

$$\frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt + i_1 R_1 = u_1 \quad (2-1)$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_2 R_2 = \frac{1}{C_1} \int (i_1 - i_2) dt \quad (2-2)$$

$$\frac{1}{C_2} \int i_2 dt = u_2 \quad (2-3)$$

消去中间变量后得到

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$

(2-4)

〔例2-2〕 机械平移系统

设有一弹簧—物体—阻尼器组成的机械系统。如图2-3所示，现欲建立以 F 为输入量，以 y 为输出量时系统的数学模型。

〔解〕 设 k 为弹性系数， f 为粘性摩擦系数。

系统处于平衡状态，外加 $F(t)$ 力后，按牛顿第二定律，系统的运动方程式为

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma F \quad (2-5)$$

式中， $\Sigma F = F - F_f - F_k$ ，为作用于物体上的作用力总和。

其中， $F_f = f \frac{dy}{dt}$ ，称为阻尼力； $F_k = Ky$ ，称为弹簧力。

因此，系统的运动方程式为

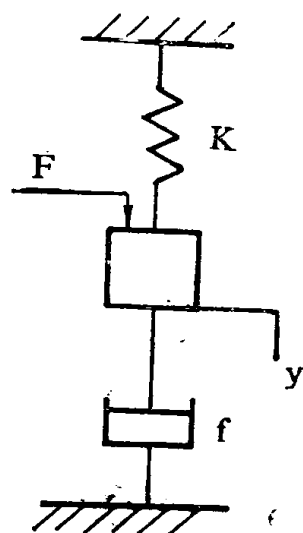


图2-3 机械平移系统

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F - f \frac{dy}{dt} - ky$$

整理得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F \quad (2-6)$$

〔例2-3〕 机械转动系统

设一个机械转动系统由惯性负载和粘性摩擦阻尼器组成。如图2-4所示，现建立以 M 为输入量， W 为输出量的系统数学模型。

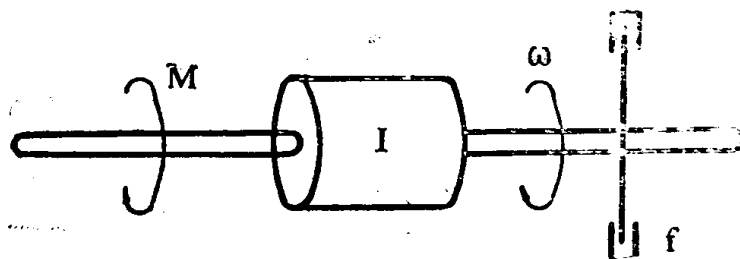


图2-4 机械转动系统

〔解〕 设 f 为粘性摩擦系数；

J 为转动惯量。

按牛顿第二定律，系统的运动方程式为

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \Sigma M \quad (2-7)$$

式中, $\Sigma M = M - M_f$, 为作用于转动系统上的外力矩总和。

其中, $M_f = f \frac{d\theta}{dt}$ 为粘性摩擦阻尼力矩。

于是得

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M - f \frac{d\theta}{dt}$$

最后可得转动系统的运动方程式为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = M \quad (2-8)$$

〔例2—4〕 齿轮传动系统

如图2—5所示的是一个具有二级减速的齿轮传动系统, 试建立以力矩M为输入量和

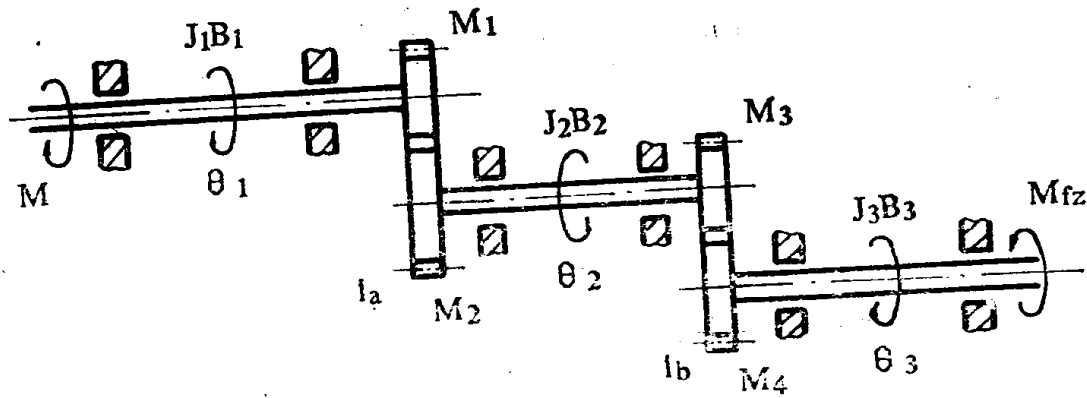


图2—5 齿轮传动系统

以转角 θ_1 为输出量系统的数学模型。

〔解〕 设 (J_1, B_1) , (J_2, B_2) , (J_3, B_3) 分别代表相应轴的转动惯量与粘性摩擦系数;

θ_1 、 θ_2 、 θ_3 分别代表相应轴的转角;

M和 M_1 , M_2 和 M_3 , M_4 和 M_{fz} 分别代表相应轴两端的转矩, 其中 M_{fz} 为负载力矩。

首先从输入轴开始分析, 根据机械转动系统中力矩间的平衡关系, 得

$$M - M_1 = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta_1}{dt} \quad (2-9)$$

式中 $J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2}$ 、 $B_1 \frac{d\theta_1}{dt}$ 分别为输入轴的惯性力矩及摩擦阻尼力矩。

同理, 对中间轴及输出轴来说, 可求得如下关系式, 即

$$M_2 - M_3 = J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + B_2 \frac{d\theta_2}{dt} \quad (2-10)$$

$$M_4 - M_{fz} = J_3 \frac{d^2\theta_3}{dt^2} + B_3 \frac{d\theta_3}{dt} \quad (2-11)$$