2002

公共课系列

研究生入学考试应试指导丛书

Entrance Exams for MD

北京大学研究生院策划

# 研究生入学考试
# 概率统计讲义

姚孟臣 编著

7

北京大学出版社

2002年研究生入学考试应试指导丛书

# 概率统计讲义

姚孟臣　编著

北京大学出版社
·北　京·

**图书在版编目(CIP)数据**

概率统计讲义/姚孟臣编著. —北京:北京大学出版社,2001.5
(2002年研究生入学考试应试指导丛书)
ISBN 7-301-04941-2

Ⅰ.概… Ⅱ.姚… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-教学参考资料 ②数理统计-研究生-入学考试-教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第21140号

## 内 容 简 介

本书是2002年工学类、经济和管理学类硕士研究生入学考试科目"概率论与数理统计"的应试指导书,它是作者多年来在全国各地考研辅导班(提高班)讲课的讲稿基础上整理而成的. 全书共分三部分:讲稿、历年试题分析和附表(国标). 第一部分"讲稿"共分五讲:随机事件和概率(5学时),随机变量及其分布(3学时),多维随机变量及其分布(4学时),随机变量的数字特征与中心极限定理(4学时),数理统计(4学时);第二部分"历年试题分析"给出1999年至2001年的"试题分析""内容分布"和"题型分布";第三部分附表2~5分别给出了按照最新国家标准颁布的正态分布、$\chi^2$分布、$t$分布和$F$分布的分位数表,这些表在考研中已正式使用. 为方便考生复习,本书每小节都对应掌握的考核点提出若干问题供思考,并在书中留空以便考生填写.

本书作者多年在全国各地考研辅导班(提高班)上讲课,具有丰富的教学经验,深知考生的疑难与困惑,因而本书能紧扣考试大纲,贴切考试实践,在每一讲编制了知识网络图和考核要求,有针对性的对重点、难点内容多侧面、从不同角度进行剖析,同时对考核要点提出问题请考生思考,对典型例题用多种解法进行讲解,以开拓学生思路,从而迅速提高考生在做习题以及实际应用方面分析、解决问题的能力.

本书可作为2002年工学类、经济和管理类硕士研究生入学考试"概率论与数理统计"考研辅导班(提高班)的辅导用书或教学参考书,对于理工类、经济管理类的本科生及数学工作者本书也是一本较好的学习用书或参考书.

**书　　名:概率统计讲义**
著作责任者:姚孟臣　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-04941-2/G·644
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京飞达印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787×1092　16开本　10.25印张　240千字
2001年5月第1版　2001年5月第1次印刷
定　　价:14.00元

# 出 版 前 言

由北京大学研究生院策划、北京大学出版社出版的《2002年研究生入学考试应试指导丛书》包括公共课系列、法律硕士联考系列、MBA联考系列和经济管理硕士系列共40部。该套丛书是为了帮助有志于攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面地、系统地复习有关的课程内容，而编写的一套题量大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本套丛书的总体设计是在北京大学研究生院的有关方面专家指导下，在大量的调查和研究的基础上，根据国家教育部最近制定的“全国硕士研究生入学考试各科考试大纲”的有关要求，并结合作者多年参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验进行的。

本套丛书有如下几个特点：

**一、本套丛书作者阵容强大**

作者皆为北京大学、清华大学、对外经贸大学、中国科技大学等考研辅导名师。他们都多年从事研究生入学考试的阅卷、辅导及教学工作，有些还是原研究生入学考试命题组成员，对研究生入学考试有相当丰富的经验。他们所编写的辅导书和所教授的辅导课在历年研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

**二、体系明晰、内容精练**

应试指导丛书的每一章或每一部分都由以下几项内容构成：

（一）考试要求。编写该部分的目的是使广大考生明确每一章或每一部分考的内容是什么，掌握到什么程度就可以了。在编写过程中，根据作者多年来参加有关命题的经验把考试大纲所要求的内容加以细化、归纳和总结，使广大考生能够正确地把握考试要求，这是区别于其他研究生入学考试辅导书的一大特点。

（二）重要定义、定理及公式。该部分根据考试大纲的要求将概念、定理和公式（数学类）方法进行了简明扼要的叙述、归纳和总结；精选了各种典型的例题并作详细的解答，使得考生能在较短的时间内对重点、难点、疑点问题进行复习，全面、系统地掌握所需要的知识，在考试时能够拿得出、用得上。

（三）典型例题分析。该部分根据考试大纲要求的题型进行了分类，归纳总结了各种题型解题的方法及技巧，开阔了考生的解题思路，使所学的知识能够融会贯通，并迅速提高考生的综合解题能力。

（四）自测练习题。每一章或每一部分的最后都精选了适量的练习题，全部习题都附有答案或提示。这些题目作为考生巩固所学知识、复习有关内容时使用，有利于提高考生分析问题和解决问题的能力。

本套丛书模拟试卷由两部分组成：一是为了检查前一阶段考生复习效果、更好地提高考生的应试能力而设计编制的全真模拟试卷及其参考答案；二是近几年考研试题及解答。作者是在深入研究了历年考研试卷的结构、知识点及难度的分布，并紧密结合他们的命题实践、阅卷过程中的常见问题及在全国各大城市“考研辅导班”辅导的经验来编好每一道题。因此，每一份试卷都从不同角度选择了具有多种风格的题目，基本上涵盖了全部命题思路，能够达到实际考试效果。这样，有利于广大考生检验自己复习的效果，更加全面地、系统地掌握所需知识，迅速地提高综合解题能力。

我们认为，这套丛书的出版，必将有助于硕士研究生入学考试应试者开拓思路，提高其分析问题、解决问题的能力，以便考出好成绩。

北京大学出版社

2001年4月于北京大学

## 北京大学研究生院2002年考研暑期辅导班招生

为迎接2002年考研的来临，北京大学研究生院应广大考生的要求和建议，决定举办2002年考研暑期辅导班"。

北京大学研究生院考研班将利用研究生院强大的信息、资源优势，精选北大、清华考研辅导中享有盛誉的名师授课，名师荟萃，强强联合，实力雄厚！

北京大学研究生院考研班将博采众长、创新求实，进一步拓展考研辅导和考研信息服务新领域，提供给考生一个高标准、高质量、高效益的考研辅导和服务，助考生迈向辉煌的成功！

**辅导安排**：2001年7月19日—8月13日

**英 语 班**：由清华大学吴永麟教授全程主讲，70学时，7月19日—7月25日

**政 治 班**：由北京大学赵建文、江长仁、陈德民等教授主讲，75学时，7月26日—8月2日

**数 学 班**：清华大学李永乐教授、北京大学李正元、姚孟臣、范培华等教授主讲，100学时，8月3日—13日

**收费标准**：英语班：350元；政治班：文科380元、理科350元；数学班：理工类400元、经济类360元。

**上课地点**：北京大学校内

**报名时间**：2001年3月1日开始，每天上午9时至12时；下午2时至5时，额满为止！

**报名地点**：北京大学研究生院指定报名点

1. 北大出版社读者之家。（北大南门外西侧）电话：62754141
2. 北大书店（北大校内博实商场内2楼）电话：62753573
3. 函报地址：北京大学出版社北大书店

**联系人**：王艳春　　**邮编**：100871　　**咨询人**：杨老师　　**电话**：13701131078

## 北京大学研究生院2002年考研冲刺班招生辅导安排

**2001年12月8日—12月30日**

**数 学 班**：李永乐、李正元、姚孟臣、范培华教授主讲　16学时——12月8日、9日

**政 治 班**：由赵建文、江长仁、陈德民教授等主讲　28学时——12月15日、16日、22日、23日

**英 语 班**：由吴永麟教授主讲　12学时——12月29日、30日

**收费标准**：英语班：120元（含资料）；政治班：160元（含资料）；数学班：120元（含资料）　**上课地点**：北京大学校内

**报名时间**：2001年9月1日开始，每天上午9时至12时；下午2时至5时，额满为止！

**报名地点**：北京大学研究生院指定点

1. 北大出版社读者之家。（北大南门外西侧）电话：62754141
2. 北大书店（北大校内博实商场内2楼）电话：62753573
3. 函报地址：北京大学出版社北大书店

**联系人**：王艳春　　**邮编**：100871　　**咨询人**：杨老师　　**电话**：13701131078

## 北京大学研究生院重庆、成都辅导班

**重庆点金学校**

**一、授课教师**

政治组：杨树先、赵建文、李顺荣、邵汉德、杨淑娴

英语组：吴永麟、王长喜、关慎果、毕金献

数学组：陈文登、葛严麟、陈魁、何坚勇、黄先开、施明存、刘金甫、李永乐

除以上老师之外，还有重庆师范学院、四川外语学院的教授授课。

**二、地址**：重庆师范学院培训中心103室

**电话**：(023)65310089

**成都点金文化培训中心**

**一、授课教师**

政治组：赵建文、周鸿、孙蚌珠、邵汉德、朱开云、杨淑娴

英语组：毕金献、吴永麟等

数学组：胡金德、李秀淳、陈魁

**二、地址**：四川大学东区桃林村食堂旁，省建行后

**电话**：(028)5412181

基础班：英语A班：4月14日—6月17日，B班：4月28日—7月1日周六、周日（全天）　收费：280元

数学A班：4月10日—6月12日，B班4月24日—6月26日二、四、六晚　收费：（数1、3、4）：230元，（数2）：200元

暑期班：英语7月13日—24日　收费：300元　政治7月29日—8月15日　收费：280元（理科）；290元（文科）

数学8月14日—8月30日　收费：（数1、3、4）：300元，（数2）：260元

双休班：英语9月29日—10月7日　收费：300元　政治10月13日—11月5日　收费：280元（理科）；290元（文科）

数学10月20日—11月20日　收费：（数1、3、4）300元，（数2）：260元

冲刺班：政治11月24日—12月9日　收费：180元　时事政治：4课时，收费：40元

英语11月12日—16日　收费：170元　数学11月21日—12月1日　收费：180元

# 前　言

“概率论与数理统计”是全国硕士研究生入学数学考试的一个重要组成部分. 从研究必然问题到处理随机问题，不仅大多数初学者感到比较困难，对于曾经学过（或只学过）概率论的广大考生来说也觉得问题不少，特别是在做习题以及解决实际应用方面遇到的问题会更多一些. 从近几年的硕士研究生入学数学考试阅卷结果也可以看出这部分试题得分率普遍较低，有些考生甚至完全放弃这部分试题. 为了帮助有志攻读硕士研究生的广大考生能在较短的时间内全面、系统地复习有关的内容，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的有关“概率论与数理统计”的要求，结合我们多年参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验，先后编写了“概率论与数理统计”应试指导的基础篇：《概率论与数理统计》与提高篇：《概率统计讲义》两本书.

《概率统计讲义》一书是作者多年来在全国各地考研辅导班（提高班）讲课的讲稿基础上整理而成的. 全书分为三部分：讲稿、历年试题分析和附表（国标）. 第一部分的“讲稿”中将其全部内容按考核要求及目前的实际授课时数（20 学时）分为五讲：第一讲“随机事件和概率”（5 学时）；第二讲“随机变量及其分布”（3 学时）；第三讲“多维随机变量及其分布”（4 学时）；第四讲“随机变量的数字特征与中心极限定理”（4 学时）；第五讲“数理统计”（4 学时）. 为了方便广大考生的复习，我们在每一讲中编制了知识网络图和考核要求. 通过网络图和考核要求使得考生了解到：“大纲”中每部分的内容是什么，需要掌握到什么程度. 每一位考生便可以根据自己复习的情况，明确在什么地方适量增加练习，提高复习的效率，从而迅速提高考生在做习题以及实际应用方面分析、解决问题的能力. 本书出版，一方面可以使得参加辅导班的同学在听讲时可以少记或不记笔记，避免出现“顾得上听，顾不上记”的矛盾；另一方面也可以使得不能参加辅导班的同学了解辅导班讲课的内容. 由于篇幅的限制，我们不可能将课上所讲的内容一字不落的写出，特别是“典型例题”中有针对性的分析等仍然需要参加辅导班的同学根据本人领会的情况在课上作一些记录. 因此，本书不可能全面代替辅导班的作用. 第二部分的“历年试题分析”中分别给出了 1999 年至 2001 年的“试题分析”“内容分布”和“题型分布”，在此基础上，对各章的重点考核点及常考的题型进行归纳和总结，有利于广大考生在复习时能抓住要害，突出重点；第三部分的附表 2～5 中，分别给出了按照最新国家标准颁布的正态分布、$\chi^2$ 分布、$t$ 分布、$F$ 分布的分位数表，这些表在考研中已正式使用. 需要指出的是，读者在阅读本书前应该对基础篇：《概率论与数理统计》一书的基本内容有所了解.

本书不仅是硕士研究生入学考试概率统计科目应试者的一本复习用书，同时对于理工类、经济管理及文科类的本科生及数学工作者也是一本较好的学习用书或参考书.

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2001 年 4 月于北京大学中关园

# 目　　录

## 第一部分　讲　　稿

## 第二部分 历年试题分析

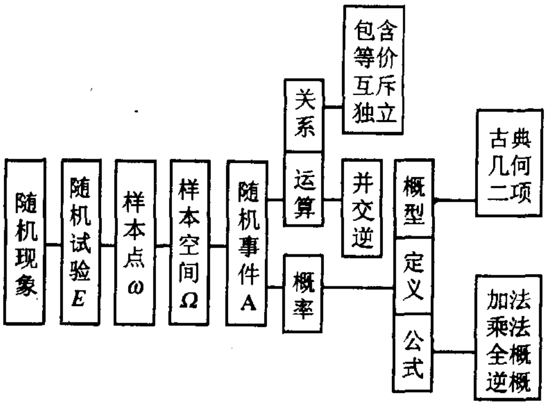


## 第三部分 附 表

# 第一部分　讲　　稿

## 第一讲　随机事件和概率

### 一、知识网络图




### 二、重点考核点的分布

(1) 样本空间与随机事件；

*(2) 概率的定义与性质(含古典概型、几何概型、加法公式)；

*(3) 条件概率与概率的乘法公式；

**(4) 事件之间的关系与运算(含事件的独立性)；

**(5) 全概公式与贝叶斯(Bayes)公式；

(6) 伯努利(Bernoulli)概型.

各个考核点前面加"**"：表示重点考核点；"*"：表示次重点考核点；括号前没有标注的表示一般考核点(下同).

### 三、课上复习内容

## 1.1　预 备 知 识

**1. 集合初步**

(1) 二值集合的概念及运算(略)

(2) 可列集

设 $A$,$B$ 是两个集合. 如果 $B$ 的每一个元素对应于 $A$ 的唯一的元素，反之 $A$ 的每一个元素

对应于 $B$ 的唯一的元素，那么就说在 $A$ 和 $B$ 的元素之间建立了一一对应关系，并称 $A$ 与 $B$ **等价**，记作

$$A \sim B.$$

与自然数集 $N$ 等价的任何集合，称为**可列集**. 显然，一切可列集彼此都是等价的. 今后我们常称这类集合中元素的个数为**可列个**(或**可数个**)，并把有限个或可列个统称为**至多可列个**(或**至多可数个**).

**例 1** 设 $A=\{a \mid a=2n, n\in N\}$，$B=\{b \mid b=n^2+1, n\in N\}$，则 $A\sim B$.

**2. 基本原理与排列组合**

(1) 加法原理

**定理 1** 设完成一件事有 $n$ 类方法，只要选择任何一类中的一种方法，这件事就可以完成. 若第一类方法有 $m_1$ 种，第二类方法有 $m_2$ 种，…，第 $n$ 类方法有 $m_n$ 种，并且这 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法里，任何两种方法都不相同，则完成这件事就有 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 种方法.

(2) 乘法原理

**定理 2** 设完成一件事有 $n$ 个步骤，第一步有 $m_1$ 种方法，第二步有 $m_2$ 种方法，…第 $n$ 步有 $m_n$ 种方法，并且完成这件事必须经过每一步，则完成这件事共有 $\prod_{i=1}^{n} m_i$ 种方法.

(3) 排列

**定义** 从 $n$ 个不同的元素中，每次取出 $m$ 个元素，按照一定顺序排成一列，称为从 $n$ 个元素中每次取出 $m$ 个元素的排列.

(不同的：可以辨认的，以下简称为“可辨的”)

排列可以分为：

(i) 元素可重复排列——“有放回地抽取”；

(ii) 元素不可重复排列——“无放回地抽取”.

**定理 3** 从 $n$ 个不同元素中，有放回地逐一取出 $m$ 个元素进行排列(简称为**可重复排列**)，共有 $n^m$ 种不同的排列.

**例 2** 由 1，2，3 三个数码可以组成多少个不同的两位数？

**解** 显然这是一个可重复的排列问题. 由定理 3 可知 $n=3, m=2$，所以三个数码可以组成 $n^m=3^2=9$ 个两位数.

**例 3** 袋中有 $N$ 个球，其中 $M$ 个为白色，从中有放回地取出 $n$ 个：

① $N=10, M=2, n=3$； ② $N=10, M=4, n=3$.

考虑以下各事件的排列数：

(i) 全不是白色的球； (ii) 恰有两个白色的球；

(iii) 至少有两个白色的球； (iv) 至多有两个白色的球；

(v) 颜色相同； (vi) 不考虑球的颜色.

答案是：① 当 $M=2$ 时，

(i) $8^3$； (ii) $3\times 2^2\times 8$； (iii) $3\times 2^2\times 8+2^3$；

(iv) $3\times 2^2\times 8+3\times 2\times 8^2+8^3$(或 $10^3-2^3$)； (v) $2^3+8^3$； (vi) $10^3$.

② 当 $M=4$ 时，将上面的 $2\to 4$，$8\to 6$ 即可.

**分析** 这是一个可重复的排列问题.由定理 3,可求出其排列数.

**问题** 恰有两个白色球的答案中为什么是 3 倍的 $2^2\times 8$,而不是 1 倍或 6 倍的?

**提示** 根据加法原理.

**定理 4** 从 $n$ 个不同元素中,无放回地取出 $m$ 个($m\leqslant n$)元素进行排列(简称为**选排列**)共有

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

种不同的排列.选排列的种数用 $A_n^m$(或 $P_n^m$)表示,即

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!},$$

特别地,当 $m=n$ 时的排列(简称为**全排列**)共有

$$n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$$

种不同排列.全排列的种数用 $P_n$(或 $A_n^n$)表示,即

$$P_n=n!,$$

并规定 $0!=1$.

**例 4** 在北京、武汉、广州的民用航空线上需要几种不同的飞机票?

**解** 由于从每一站到其他两个站都是不同的飞机票,而且往返两站之间的票也不相同,所以这是一个 $n=3,m=2$ 的选排列问题.因此共有 $A_3^2=3\times 2=6$ 种飞机票.

(4) 组合

**定义** 从 $n$ 个不同的元素中,每次取出 $m$ 个元素不考虑其先后顺序作为一组,称为从 $n$ 个元素中每次取出 $m$ 个元素的组合.

(任意抽取——"任取")

组合可以分为:

(i) 一般组合;

(ii) 不同类元素组合.

**定理 5** 从 $n$ 个不同元素中取出 $m$ 个元素的组合(简称为**一般组合**)共有

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

种不同的组合.一般组合的组合种数用 $C_n^m$(或 $\binom{n}{m}$)表示,即

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

并且规定 $C_n^0=1$.不难看出

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}.$$

**例 5** 袋中有 $N$ 个球,其中 $M$ 个为白色,从中任取 $n$ 个:

① $N=10,M=2,n=3$; ② $N=10,M=4,n=3$.

考虑以下各事件的排列数:

(i) 全不是白色的球；

(ii) 恰有两个白色的球；

(iii) 至少有两个白色的球；

(iv) 至多有两个白色的球；

(v) 颜色相同；

(vi) 不考虑球的颜色.

答案是：① 当 $M=2$ 时，

(i) $C_8^3C_2^0$；　(ii) $C_2^2C_8^1$；　(iii) $C_2^2C_8^1$；

(iv) $C_2^2C_8^1+C_2^1C_8^2+C_2^0C_8^3$(或 $C_{10}^3$)；

(v) $C_8^3$；　(vi) $C_{10}^3$.

② 当 $M=4$ 时，

(i) $C_6^3C_4^0$；　(ii) $C_4^2C_6^1$；　(iii) $C_4^2C_6^1+C_4^3C_6^0$；

(iv) $C_4^2C_6^1+C_4^1C_6^2+C_4^0C_6^3$(或 $C_{10}^3-C_4^3$)；　(v) $C_4^3+C_6^3$；　(vi) $C_{10}^3$.

**分析**(略)

**定理 6**　从不同的 $k$ 类元素中，取出 $m$ 个元素. 从第 1 类 $n_1$ 个不同元素中取出 $m_1$ 个，从第 2 类 $n_2$ 个不同的元素中取出 $m_2$ 个，…，第 $k$ 类 $n_k$ 个不同的元素中取出 $m_k$ 个，并且 $n_i \geqslant m_i > 0 (i=1,2,\cdots,k)$(简称为**不同类元素的组合**)，共有

$$C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k} = \prod_{i=1}^{k} C_{n_i}^{m_i}$$

种不同取法.

**例 6**　从 3 个电阻，4 个电感，5 个电容中，取出 9 个元件，问其中有 2 个电阻，3 个电感，4 个电容的取法有多少种？

**解**　这是一个不同类元素的组合问题. 由定理 6 知，共有

$$C_3^2 \cdot C_4^3 \cdot C_5^4 = C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 = 60$$

种取法.

**例 7**　五双不同号的鞋，从中任取 4 只，取出的 4 只都不配对(即不成双)，求(i) 排列数；(ii) 组合数.

答案是：(i) $C_{10}^1C_8^1C_6^1C_4^1$；　(ii) $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$.

**分析**(略)

**3. 微积分**(略)

## 1.2　样本空间与随机事件

**1. 随机现象及其统计规律性**(略)

**2. 随机试验与随机事件**

为了叙述方便，我们把对随机现象进行的一次观测或一次实验统称为它的一个试验. 如果这个试验满足下面的两个条件：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 试验都有哪些可能的结果是明确的，但每次试验的具体结果在试验前是无法得知的，那么我们就称它是一个**随机试验**，以后简称为**试验**. 一般用字母 $E$ 表示.

**问题**　“一个具体的人，在一次乘车郊游时，因发生交通事故而受伤”，是否为随机试验？

在随机试验中，每一个可能出现的不可分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**，用 $\omega$ 表示；而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 $\Omega$.

**例 1** 设 $E_1$ 为在一定条件下抛掷一枚匀称的硬币，观察正、反面出现的情况. 记 $\omega_1$ 是出现正面，$\omega_2$ 是出现反面. 于是 $\Omega$ 由两个基本事件 $\omega_1,\omega_2$ 构成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

**例 2** 设 $E_2$ 为在一定条件下掷一粒骰子，观察出现的点数. 记 $\omega_i$ 为出现 $i$ 个点($i=1,2,\cdots,6$). 于是有 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

**问题** 例 1、例 2 中样本空间 $\Omega$ 的子集个数是多少？为什么？

所谓**随机事件**是样本空间 $\Omega$ 的一个子集，随机事件简称为**事件**，用字母 $A,B,C$ 等表示. 因此，某个事件 $A$ 发生当且仅当这个子集中的一个样本点 $\omega$ 发生，记为 $\omega\in A$.

在例 2 中，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，而 $E_2$ 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合. 例如，设事件 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现的点数大于 4$\}$，$C=\{$出现 3 点$\}$，可见它们都是 $\Omega$ 的子集. 显然，如果事件 $A$ 发生，那么子集$\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$中的一个样本点一定发生，反之亦然，故有 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$；类似地有 $B=\{\omega_5,\omega_6\}$和 $C=\{\omega_3\}$. 一般而言，在例 2 中，任一由样本点组成的 $\Omega$ 的子集也都是随机事件.

## 1.3 事件之间的关系与运算

事件之间的关系有："包含"、"等价(或相等)"、"互不相容(或互斥)"以及"独立"四种.

事件之间的基本运算有："并"、"交"以及"逆".

如果没有特别的说明，下面问题的讨论我们都假定是在同一样本空间 $\Omega$ 中进行的.

**1. 事件的包含关系与等价关系**

设 $A,B$ 为两个事件. 如果 $A$ 中的每一个样本点都属于 $B$，那么称事件 $B$ **包含**事件 $A$，或称事件 $A$ 包含于事件 $B$，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，那么称事件 $A$ 与事件 $B$ **等价**或**相等**，记为 $A=B$.

在下面的讨论中，我们经常说"事件相同、对应概率相等"，这里的"相同"指的是两个事件"等价".

**2. 事件的并与交**

设 $A,B$ 为两个事件. 我们把至少属于 $A$ 或 $B$ 中一个的所有样本点构成的集合称为事件 $A$ 与 $B$ 的**并**或**和**，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

设 $A,B$ 为两个事件. 我们把同时属于 $A$ 及 $B$ 的所有样本点构成的集合称为事件 $A$ 与 $B$ 的**交**或**积**，记为 $A\cap B$ 或 $A\cdot B$，有时也简记为 $AB$.

**3. 事件的互不相容关系与事件的逆**

设 $A,B$ 为两个事件，如果 $A\cdot B=\varnothing$，那么称事件 $A$ 与 $B$ 是**互不相容**的(或**互斥**的).

对于事件 $A$，我们把不包含在 $A$ 中的所有样本点构成的集合称为事件 $A$ 的**逆**(或 $A$ 的**对立事件**)，记为 $\overline{A}$. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件 $A$ 与 $\overline{A}$ 不会同时发生(即 $A\cdot\overline{A}=\varnothing$，称它们具有**互斥性**)，而且 $A$ 与

$\overline{A}$ 至少有一个发生(即 $A+\overline{A}=\Omega$,称它们具有**完全性**).这就是说,事件 $A$ 与 $\overline{A}$ 满足:

$$\begin{cases} A \cdot \overline{A} = \varnothing, \\ A + \overline{A} = \Omega. \end{cases}$$

**问题** (1) 事件的互不相容关系如何推广到多于两个事件的情形?

(2) 三个事件 $A,B,C$,$ABC=\varnothing$ 与

$$\begin{cases} AB = \varnothing, \\ AC = \varnothing, \\ BC = \varnothing \end{cases}$$

关系如何?

根据事件的基本运算定义,这里给出事件之间运算的几个重要规律:

(1) $A(B+C)=AB+AC$(分配律);　　(2) $A+BC=(A+B)(A+C)$(分配律);

(3) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$(德·摩根律);　　(4) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$(德·摩根律).

有了事件的三种基本运算我们就可以定义事件的其他一些运算.例如,我们称事件 $A\overline{B}$为事件 $A$ 与 $B$ 的**差**,记为 $A-B$.可见,事件 $A-B$ 是由包含于 $A$ 而不包含于 $B$ 的所有样本点构成的集合.

**例** 在数学系学生中任选一名学生.设事件

$A=\{$选出的学生是男生$\}$, $B=\{$选出的学生是三年级学生$\}$, $C=\{$选出的学生是科普队的$\}$.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的含义.

(2) 在什么条件下,$ABC=C$ 成立?

(3) 在什么条件下,$C\subset B$ 成立?

**解** (1) 事件 $AB\overline{C}$ 的含义是,选出的学生是三年级的男生,不是科普队员.

(2) 由于 $ABC\subset C$,故 $ABC=C$ 当且仅当 $C\subset ABC$.这又当且仅当 $C\subset AB$,即科普队员都是三年级的男生.

(3) 当科普队员全是三年级学生时,$C$ 是 $B$ 的子事件,即 $C\subset B$ 成立.

**4. 事件的独立性**

设 $A,B$ 是某一随机试验的任意两个随机事件,称 **$A$ 与 $B$ 是相互独立**的,如果

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

可见事件 $A$ 与 $B$ 相互独立是建立在概率基础上事件之间的一种关系.所谓事件 $A$ 与 $B$ 相互独立就是指其中一个事件发生与否不影响另一个事件发生的可能性,即当 $P(B)\neq 0$ 时,$A$ 与 $B$ 相互独立也可以用

$$P(A|B) = P(A)$$

来定义.

由两个随机事件相互独立的定义,我们可以得到:若事件 $A$ 与 $B$ 相互独立,则 $\overline{A}$ 与 $B$,$A$ 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

如果事件 $A,B,C$ 满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ **相互独立**.

注意,事件 $A,B,C$ 相互独立与事件 $A,B,C$ 两两独立不同,两两独立是指上述四个式子中前三个式子成立.因此,相互独立一定是两两独立,但反之不一定.

**问题** (1) 两个事件的"独立"与"互斥"之间有没有关系?在一般情况下,即 $P(A)>0$, $P(B)>0$ 时,有关系吗?为什么?

(2) 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$.问 $A$ 与 $B$ 是否独立,为什么?由此可以得到什么结论?

## 1.4 概率的定义与性质

### 1. 概率的公理化定义

**定义** 设 $E$ 是一个随机试验,$\Omega$ 为它的样本空间,以 $E$ 中所有的随机事件组成的集合为定义域,定义一个函数 $P(A)$(其中 $A$ 为任一随机事件),且 $P(A)$满足以下三条公理,则称函数 $P(A)$为事件 $A$ 的**概率**.

**公理 1**(非负性) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

**公理 2**(规范性) $P(\Omega)=1$.

**公理 3**(可列可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互斥,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

由上面三条公理可以推导出概率的一些基本性质.

**性质 1(有限可加性)** 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

**性质 2(加法公式)** 设 $A,B$ 为任意两个随机事件,则

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

**性质 3** 设 $A$ 为任意随机事件,则

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

**性质 4** 设 $A,B$ 为两个任意的随机事件,若 $A\subset B$,则

$$P(B-A) = P(B) - P(A).$$

由于 $P(B-A)\geqslant 0$,根据性质 4 可以推得,当 $A\subset B$ 时,

$$P(A) \leqslant P(B).$$

**例 1** 设 $A,B,C$ 是三个随机事件,且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$,$P(AB)=P(CB)=0$, $P(AC)=\dfrac{1}{8}$,求 $A,B,C$ 中至少有一个发生的概率.

**解** 设 $D=\{A,B,C$ 中至少有一个发生$\}$，则 $D=A+B+C$，于是

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A+B+C)\\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).\end{aligned}$$

又因为

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=P(CB)=0,\quad P(AC)=\frac{1}{8},$$

而由 $P(AB)=0$，有 $P(ABC)=0$，所以

$$P(D)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

**问题** 怎样由 $P(AB)=0$ 推出 $P(ABC)=0$？

**提示** 利用事件的关系与运算导出.

**例 2** 设事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，$P(A)=a$，$P(B)=b$. 若事件 $C$ 发生，必然导致 $A$ 与 $B$ 同时发生，求 $A,B,C$ 都不发生的概率.

**解** 由于事件 $A$ 与 $B$ 相互独立，因此

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=a\cdot b.$$

考虑到 $C\subset AB$，故有

$$\overline{C}\supset\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}\supset\overline{A}\,\overline{B},$$

因此

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-a)(1-b).$$

**2. 概率的统计定义**

**定义** 在一组不变的条件 $S$ 下，独立地重复作 $n$ 次试验. 设 $\mu$ 是 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生的次数，当试验次数 $n$ 很大时，如果 $A$ 的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一数值 $p$ 附近摆动；而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 $p$ 为事件 $A$ 在条件组 $S$ 下发生的**概率**，记作

$$P(A)=p.$$

**问题** (1) 试判断下式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu}{n}=p$$

成立吗？为什么？

(2) 野生资源调查问题　池塘中有鱼若干(不妨假设为 $n$ 条)，先捞上 200 条作记号，放回后再捞上 200 条，发现其中有 4 条带记号. 用 $A$ 表示事件{任捞一条带记号}，问下面两个数

$$\frac{200}{n},\quad \frac{4}{200}$$

哪个是 $A$ 的频率？哪个是 $A$ 的概率？为什么？

**3. 古典概型**

古典型试验：(i) 结果为有限个；(ii) 每个结果出现的可能性是相同的.

等概完备事件组：(i) 完全性；(ii) 互斥性；(iii) 等概性.（满足(i)，(ii)两条的事件组称为完备事件组）

**定义** 设古典概型随机试验的基本事件空间由 $n$ 个基本事件组成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$. 如果事件 $A$ 是由上述 $n$ 个事件中的 $m$ 个组成，则称事件 $A$ 发生的**概率**为

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

所谓**古典概型**就是利用关系式(1.1)来讨论事件发生的概率的数学模型.

根据概率的古典定义可以计算古典型随机试验中事件的概率. 在古典概型中确定事件 $A$ 的概率时，只须求出基本事件的总数 $n$ 以及事件 $A$ 包含的基本事件的个数 $m$. 为此弄清随机试验的全部基本事件是什么以及所讨论的事件 $A$ 包含了哪些基本事件是非常重要的.

**例 3** 掷两枚匀称的硬币，求它们都是正面的概率.

**解** 设 $A=\{$出现正正$\}$，其基本事件空间可以有下面三种情况：

(i) $\Omega_1=\{$同面、异面$\}$，$n_1=2$；

(ii) $\Omega_2=\{$正正、反反、一正一反$\}$，$n_2=3$；

(iii) $\Omega_3=\{$正正、反反、反正、正反$\}$，$n_3=4$.

于是，根据古典概型，对于(i)来说，由于两个都出现正面，即同面出现，因此，$m_1=1$，于是有

$$P(A)=\frac{1}{2}.$$

而对于(ii)来说，$m_2=1$，于是有

$$P(A)=\frac{1}{3}.$$

而对于(iii)来说，$m_3=1$，于是有

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

**问题** 以上讨论的三个结果哪个正确，为什么？

**例 4** 求 1.1 预备知识的例 5 中(i)至(v)间的概率.

答案是：① 当 $M=2$ 时，

(i) $C_8^3/C_{10}^3$； (ii) $C_8^1/C_{10}^3$； (iii) $C_8^1/C_{10}^3$； (iv) 1； (v) $C_8^3/C_{10}^3$.

② 当 $M=4$ 时，

(i) $C_6^3/C_{10}^3$； (ii) $C_4^2C_6^1/C_{10}^3$； (iii) $(C_4^2C_6^1+C_4^3)/C_{10}^3$；

(iv) $(C_{10}^3-C_4^3)/C_{10}^3$； (v) $(C_4^3+C_6^3)/C_{10}^3$.

**分析**(略)

**问题** (1) 例 4 中各问可否使用排列做，为什么？

(2) 用排列或组合完成例 4 时哪种方法较为简便？

**例 5** 求 1.1 预备知识的例 3 中(i)至(v)间的概率.

答案是：① 当 $M=2$ 时，