JUZHENLILUNJIQIYINGYONG

矩阵理论及其应用

卢树铭　郭敏学　编著

JUZHENLILUNJIQIYINGYONG

辽宁科学技术出版社

矩阵理论及其应用

卢树铭
郭敏学　编著

辽宁科学技术出版社

矩阵理论及其应用

Juzhen Lilun Jiqi YingYong

卢树铭 郭敏学 编著

辽宁科学技术出版社出版（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行 朝阳新华印刷厂分厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7 5/8 字数：167,000
1989年12月第1版 1989年12月第1次印刷

责任编辑：宋纯智 责任校对：李秀芝
封面设计：邹君文

印数：1-2,015

ISBN7-5381-0720-7/O·36 定价：3.50元

序

在各种类型的可结合的代数系统中，矩阵代数具有其特殊重要的地位，这不仅是由于矩阵的运算规律比较简单具体，更重要的是，它的理论有极其丰富的内容，而且可以用来表示许多代数现象与性质。因此，虽然矩阵概念的发现已有了很长的历史，但目前仍是许多代数学家的主要研究对象。

任何一种数学理论在发展到一定的程度时，必然会被考虑其应用，有的理论可被运用于数学中的某些分支，也有的理论将可被运用于数学以外的一些学科。矩阵的理论则兼而有之，它不但在数学的各个方面，例如，几何学，函数论，概率统计等都有其极为重要的应用，即使在物理，化学，工程，甚至于经济，社会等各个方面，矩阵的理论与方法也都是不可缺少的数学工具。

卢树铭同志长期从事于工科数学的教学工作，在教学实践中累积了丰富的教学经验，在这方面造诣良深。近年来，卢树铭同志与郭敏学同志合作，依据他们多年的教学经验与心得，著此《矩阵理论及其应用》一书，笔者阅后，深感其证论谨严恰当，叙述流畅易懂，理论与应用兼备，实为一本为工科院校师生所适用的不可多得的教学参考书或教科书。因此乐于推荐，是为序。

周伯壎　1988年8月于南京大学

前 言

矩阵理论作为数学的重要组成部分，理论丰富，应用广泛。不仅是研究近代数学，特别是计算数学的重要工具，而且是工程技术，经济管理以及自然科学的其它领域不可缺少的数学工具。特别是在电子计算机及计算技术高度发展的今天，矩阵理论的作用就更显得重要了。近年来，国内不少高等工科院校相继为工科研究生，本科高年级学生开设这门课程，从事实际工作的工程技术人员及计算工作者，也迫切希望能系统地掌握矩阵的有关理论及常用方法，便于阅读科技文献及实际计算。然而，到目前为止，以工科学生及工程技术人员为主要对象，结合工科院校和工程技术人员的数学基础的现状和实际工作的需要，有针对性，有重点地系统介绍有关矩阵的理论、方法及应用的专门论著或教科书，在国内还是为数不多的。本书正是为适应这种需要而写的。

本书写作的出发点在于针对我国高等工科学校本科生和研究生的培养规格，适应工程技术的实际需要，同时兼顾目前国内高等工科学校学生及工程技术人员的现有数学水平，以微积分和线性代数的初步知识为起点，既突出重点，又全面、系统地介绍在实际中广泛应用的有关矩阵的理论、方法及应用，尤其是通过对典型例题的剖析，详尽地介绍各种方法的具体运用。在编排上，力求与现有的微积分教材的体系同步，在阐述上力求简明，确切，通俗易懂，深入浅出，总之，

力求使本书既便于教又便于学。

本书的读者对象是高等工科院校的本科生、研究生、工科专业教师以及从事实际工作的工程技术人员，从事理论研究的经济管理人员和计算工作者。对前者来说，本书可作为教科书或教学参考书．对后者来说，本书可作为他们理论提高和实际应用的参考读物。

本书共分七章。第一章作为本书的预备知识，主要介绍目前高等工科学校线性代数课程教学基本要求中没有涉及或在教科书中讨论不够充分，而又为学习本书其它内容所必需的有关线性代数的内容，如线性空间、内积空间、酉空间以及矩阵的约当标准形及其求法等；第二章，以矩阵多项式为出发点，介绍矩阵函数的有关理论及矩阵函数的求法；第三章着重介绍向量的范数，矩阵的范数概念，讨论向量范数与方阵范数之间的关系，并在此基础上讨论向量序列与矩阵序列的极限理论；第四章介绍矩阵的微积分知识，在这一章里，通过具体例题介绍纯量函数关于矩阵、矩阵关于矩阵的求导方法以及矩阵的微分和积分的求法；第五章主要介绍矩阵级数敛散性判定，矩阵幂级数以及矩阵函数的幂级数展开等有关知识；第六章介绍矩阵微分方程的有关知识，以及求解线性齐次矩阵微分方程、线性非齐次矩阵微分方程初值问题的各种常用方法，如用矩阵函数、用矩阵的特征值和特征向量、用矩阵的向量函数以及用矩阵柯西序列的极限求解等。作为本书的结束，我们在第七章中介绍了应用较为广泛的广义逆矩阵 A^-、A^+ 的概念、性质及求法，分别介绍它们在求解相容方程组和不相容方程组中的应用（包括求不相容方程组的最小二乘解）。

本书所介绍的内容，我们曾先后分别在合肥工业大学高

等数学教学时结合相应内容作过介绍和在淮南矿业学院作为工科研究生课进行讲授，实践表明，按本书的处理既便于教，也便于学，教学效果还是比较理想的。

在本书写作的过程中，得到我们的益师江苏省数学学会理事长、南京大学数学系教授周伯壎先生的热情支持，亲切关怀和指教，并在百忙之中为本书作序，对我们给予了莫大的鼓励和鞭策，在此，特表示我们衷心的感谢。

限于我们的水平，书中谬误之处恐所难免，敬请国内同行和广大读者批评指正。

卢树铭　郭敏学

1988年7月

目　录

第一章　预备知识

第二章　矩阵函数

第三章　向量与矩阵序列的极限

第一章　预备知识

本章所介绍的概念及一些方法都是最基本的，它是与线性代数的衔接和学习后面几章内容所必需的。至于象矩阵的运算、逆矩阵以及二次型等有关内容，都是假定是读者已经熟悉的。

第一节　线性空间、欧几里得空间与酉空间

一、线性空间（向量空间）

线性空间又称向量空间，是线性代数中一个重要的基本概念，不仅在线性代数中占有重要的地位，而且是学习矩阵的有关理论不可缺少的。

定义1　设K是一个数域（实的或复的），V是一个非空集合，K中的数用拉丁字母a，b，…表示，V中的元素用希腊字母α，β，γ，…表示。如果具有

1. **可加性**　对于任意α、$\beta\in V$，总存在唯一的一个元素$\gamma\in V$与它们对应，γ称为α与β的和，记作$\gamma=\alpha+\beta$，并且满足：

（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；　　（交换律）

（2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；　　（结合律）

（3）在V中存在零元素0，对于任意$\alpha \in V$，都有$\alpha+0=\alpha$；

（4）对任意$\alpha \in V$，都存在α的负元素$\beta \in V$，使得$\alpha+\beta=0$，记$\beta=-\alpha$

2．**与K中元素的可乘性** 对任何$k \in K$与任何$\alpha \in V$，总存在唯一的一个元素$\delta \in V$与之对应，δ称为数k与α的数量乘积，记作$\delta=k\alpha$，并且满足：

（1）$1 \cdot \alpha=\alpha$；

（2）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$；（结合律）

（3）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；$k$、$l \in K$ （分配律）

（4）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

则称非空集合V为数域K上的一个**线性空间**，K称为V的**系数域**。线性空间也称为**向量空间**。线性空间V中的元素α，β，γ，…称为**向量**。

在定义1中，若数域K为实数域R，则称V为定义在R上的实线性空间；若数K为复数域C，则称V为定义在C上的复线性空间。

例1 按通常的加法与乘法，由实数全体所成的集合R，在实数域上构成一实线性空间；复数全体所成的集合C，在复数域上构成一复线性空间。

例2 按通常向量的加法及数量与向量的乘法，由n元有序实数组成的数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$全体所构成的集合

$$V=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in R, \ i=1, 2, \cdots, n\}$$

在实数域R也构成一个实线性空间，记作R^n。同样，由n元有序复数组成的数组$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$全体所构成的集合

$$V=\{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots \xi_n) \mid \xi_i \in C, \ i=1, 2, \cdots, n\}$$

在复数域C上构成一复线性空间，记作C^n。

例 3 按照矩阵的加法及数与矩阵的乘法，由数域K的元素构成的全体$m\times n$矩阵所成的集合

$$V=\{(a_{ij})_{m\times n}\,|\,a_{ij}\in K,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

在数域K上构成一个线性空间。

由定义 1 不难推出线性空间的一些基本性质：

性质 1 在线性空间V中，零元素是唯一的。

性质 2 在线性空间V中，任一元素 α 的负元素是唯一的。

性质 3 在线性空间V中，下述关系式成立：

$$0\cdot\alpha=0;\ (-1)\alpha=-\alpha;\ k\cdot 0=0$$

性质 4 在线性空间 V 中，若$k\alpha=0$，则必有 $k=0$或$\alpha=0$.

定义 2 设V是数域K上的一个线性空间，U是V的一个非空子集，如果U对于V中所定义的加法及与数量的乘法两种运算也构成一个数域K上的线性空间，则称非空集合U为线性空间V的一个**线性子空间**。

例 4 设V是数域K上的一个线性空间，则仅由V的唯一一个零元素构成的集合$U=\{0\}$是V的一个线性子空间；V自身也是V的一个线性子空间。

例 5 设V是由所有的$m\times n$矩阵组成的线性空间，则非空集合

$$U=\{(a_{ij})_{m\times n}\,|\,a_{ij}\in K,\ a_{i1}=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

是V的一个线性子空间（由定义 1，不难验证U是K上的一个线性空间，再由定义2即知它是V的线性子空间）。

定义 3 若$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$是线性空间V中的n个线性

无关的向量，且V中任意向量都是$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$的线性组合，则称V是一个n维的线性空间，n称为线性空间V的**维数**$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$称为V的一个**基底**。对于任意的$\alpha\in V$，由于α是$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$的线性组合，即

$$\alpha=c_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

故称有序数组（a_1，a_2，…，a_n）为向量$\alpha\in V$在基底$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$下的**坐标**。

显然，（a_1，a_2，…，a_n）是被向量α的基底e_1，e_2，…，e_n所唯一确定的。

例6　在n维实线性空间R^n中，显然

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是R^n的一个基底。

对于任意的向量

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in R^n$$

由于α可以写成

$$\alpha=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

且这种表示对于基底$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_n$来说是唯一的，因此（a_1，a_2，…，a_n）就是向量α在这个基底下的坐标。

二、欧几里得空间（内积空间）

在线性空间（向量空间）中，两个向量之间的基本运算，

仅限于向量的加法以及数与向量的乘法，没有象解析几何中直观的向量空间那样引入向量的长度，两个向量的夹角等度量概念，而这些概念在许多问题中却又十分需要，因此，作为本书的预备知识，我们引进这些概念以及欧几里得空间（内积空间）的概念。

定义 4 设V是实数域R上的线性空间，如果对于任意两个向量α，$\beta\in V$，恒有唯一的一个实数与之对应，记作(α, β)，它满足

（1）$(\alpha, \beta)=(\beta, \alpha)$；

（2）$(k\alpha, \beta)=k(\alpha, \beta)$；　　　　k为任意实数；

（3）$(\alpha+\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$；

（4）$(\alpha, \alpha)\geqslant 0$，当且仅当$\alpha=0$时，$(\alpha,\alpha)=0$，则称实数$(\alpha, \beta)$为向量$\alpha$，$\beta$的**内积**，并称这样的实线性空间$V$为**欧几里得空间**，简称为**欧氏空间**或**内积空间**。

例 7 普通的三维几何空间R^3中的向量全体构成一个欧氏空间。

事实上，由解析几何可知，当$\alpha=(a_1, a_2, a_3)$，$\beta=(b_1, b_2, b_3)$时，α、β的内积$(\alpha, \beta)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$，显然它满足定义 4 中（1）～（4），因此$R^3$是一个欧氏空间。

同样的讨论，我们还可以知道对实的n维向量空间R^n，如果对于向量$\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，规定$(\alpha, \beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，那末$R^n$也是一个欧氏空间。

例 8 实数域R上的所有n阶矩阵，按照通常的矩阵加法及数与矩阵的乘法构成的n^2维实线性空间$R^{n\times n}$。如果对于任意两个矩阵$A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，我们规定其内积为

$$(A, B)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

那末这个实线性空间$R^{n\times n}$是一个欧氏空间。

事实上，我们若记A的迹，即A的主对角线上n个元素的和为$\mathrm{tr}A$，则有

$$(1)\ (A, B)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}=\mathrm{tr}(AB^T)=\mathrm{tr}(BA^T)$$
$$=(B, A)$$

$$(2)(A+B,C)=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{ij}=\mathrm{tr}((A+B)C^T)$$
$$=\mathrm{tr}(AC^T+BC^T)$$
$$=\mathrm{tr}(AC^T)+\mathrm{tr}(BC^T)$$
$$=(A, C)+(B, C)$$

$$(3)\ (kA, B)=\sum_{i,j=1}^{n} ka_{ij}\cdot b_{ij}=\mathrm{tr}(kAB^T)$$
$$=k\mathrm{tr}(AB^T)=k(A, B)$$

$$(4)\ (A, A)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\geqslant 0$$

因此，实线性空间$R^{n\times n}$构成了一个欧氏空间。

由定义 4，不难推出下面关于内积空间的一些基本性质：

性质 1 设$\alpha, \beta\in V$，$k\in R$，则$(\alpha, k\beta)=k(\alpha, \beta)$，

这是因为$(\alpha, k\beta)=(k\beta, \alpha)=k(\beta, \alpha)=k(\alpha, \beta)$

性质 2 设$\alpha\in V$是一个非零向量，则

$$(\alpha, 0)=(0, \alpha)=0$$

事实上，在性质1及其证明过程中取$k=0$即可。

性质3 设α、β、$\gamma\in V$，则

$$(\gamma,\ \alpha+\beta)=(\gamma,\ \alpha)+(\gamma,\ \beta)$$

性质4 设α_i，$\beta_j\in V$，k_i，$l_j\in R(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i,\ \sum_{j=1}^{n}l_j\beta\right)=\sum_{i,\ j=1}^{n}k_il_j(\alpha_i,\ \beta_j)$$

下面我们引入欧氏空间中向量的长度及两向量的夹角、正交等概念。

定义5 设V是一欧氏空间，对于任意的$\alpha\in V$，称非负实数$\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}$为向量α的**长度（范数）**，记作$\|\alpha\|$，即

$$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\ \alpha)}$$

根据这一定义，对于欧氏空间中任意的α，$\beta\in V$及任意实数$k\in R$，有

(1) $\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$

(2) 柯西—许瓦兹（Cauch—Schworz）不等式

$$|(\alpha,\ \beta)|\leqslant\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$$

当且仅当α，β线性相关时，等号成立。

这是因为当$\beta\neq0$时，对于$t\in R$，设$\gamma=\alpha+t\beta$，则由内积定义可知

好心

$$\begin{aligned}(\gamma,\ \gamma)&=(\alpha+t\beta,\ \alpha+t\beta)\\&=(\alpha,\ \alpha)+2t(\alpha,\ \beta)+t^2(\beta,\ \beta)\geqslant0,\end{aligned}$$

其判别式$\Delta=(\alpha,\ \beta)^2-(\alpha,\ \alpha)(\beta,\ \beta)\leqslant0$，即

$$(\alpha,\ \beta)^2\leqslant(\alpha,\ \alpha)(\beta,\ \beta)$$

两边开平方，得