

主编 沈俊 胡瑞雯



CHUANGWEI

创维名题

(初三年级)



数学

SHUXUE

华中师范大学出版社



吃透一题 能通百题

——关于《创维名题》理论与实践的报告

“少年维特”式的烦恼

学生都在发问:教材中的例题、习题越编越简单,考试对能力和素质的要求越来越高,弄懂了例题,不一定会做习题;会做习题,不一定会考试。教材与考试、理想与现实的矛盾导致学生普遍存在学习不适应感。《创维名题》全方位地汇集了最有价值的各类教学与考试皆涉及的典型、新颖、实用的经典名题,可以最集中、最有效地提高你的适应能力和解题能力,帮你逾越鸿沟,解除烦恼。

认识例题的力量

学习首先源于模仿,然后才能学会创造,例题的作用正体现于教会模仿,引发创造。教与学水平欠佳,大多是因为忽视了例题的价值与作用。《创维名题》以人教社教材为蓝本,以经典名题为基础,从初中到高中,各科配套,按每课(节)讲名题,每单元(章)设检测,同时附期中、期末考和参考答案的体系,在轻松愉快的氛围内,帮助你学懂、弄通课本知识,提高学习与阅读兴趣,并教给你提高解题能力所必须具备的知识、方法和能力。

考试在平时,例题是关键

有经验的教师常讲:平常的训练要像考试一样慎重,考试要保持平常训练时的心态。多数学生训练成绩不佳,考试成绩不理想,根源在平时的教学中,教师对学生的知识、能力、方法缺乏科学的全方位的训导。《创维名题》把每门学科所应掌握的知识要点,以名题的形式按A、B、C三级层次设例,同步进行深入浅出的解析,指出解题过程中带有规律性、值得横向推广的解题思路 and 技巧,注重名题所及相关知识点的归纳、整理和提炼,既切中肯綮,传递了教师们多年的教学精华;又丝丝入扣,抓住了学生求知求解的心扉。

在头脑运动中创建思维的高速公路

今天的教育愈来愈推崇创新,只有具备了创新能力的学生,才能做未来的赢家。《创维名题》“名”在创新,创新就是要打破常规,敢于创“前书”之所未有:新的体系,新的框架,新的思考,新的概括;新栏目,新特色,新视点,新方法……

▲【回归】 引导学生在课本中寻找解题的落脚点,体现“源于教材,高于教材”的解题意识。

□【启示】 开放的空间,精当的解析,给学生无尽的想像与启迪。

◆【想一想】 由此题联想到彼题,通过相对活跃的方式激发学生多向思维、发散式思维。

★【比较】 将易混、难辨的问题进行对照,强化相似知识的区别与联系。

※【注意】 诠释学习中遇到的困难与问题,全方位透析知识和方法要领。

✱【例外】 阐明概念适用的范围及规律例外之处,防止犯以偏概全的错误。

●【评注】 解题之后的反思,知识的拓展、延伸,解题结论的推广等。

一切创新的目的在于打破传统教辅图书的定势,充分发掘学生的创新思维能力,引导学生在头脑运动中创建思维的高速公路,使学生不满足于“知其一”,更追求“知其二、知其三”,举一反三,一通百通。

所以,《创维名题》遵循教、学、练、测、考、解这一整体思路,注重了学习问题的研究和排除学习障碍方法的研究,加上其构思与编排独特,学生喜欢读,读得进并吸收得了。

别把学习输在起跑线上。

教育不发达的地区或非重点学校的学生抱怨道:我校教学低水平,例题吃不透,信息又封闭,使我们一开始就输在起跑线上。《创维名题》与新版教材同步,与课堂教学同步,与综合考试同步,教参、学参、考参三位一体,把名师请到你身边,即使你地教育再落后、学校再差,你可以同样享受到全国知名教师的耐心训导!准备好,你现在是站在同一起跑线上的哟。

现在,我们以也曾当过学生的情怀,以出版工作者的良知,向你郑重推荐华师出版社精心策划的两套“姊妹篇”丛书——《创维名题》和《反馈精编》,“创维”重在“精讲”,“反馈”重在“精练”,二者相辅相成,相得益彰。动脑看“名题”,动手做“精编”。这两者会为你提供一种全新的组合套餐,让你即看即会,即学即练,即考即得,百战百胜!



华中师范大学出版社第二编辑室
2001.5.6.

MU LU

录

代数部分

第十二章 一元二次方程	(1)
第一节 一元二次方程	(1)
12.1 一元二次方程	(1)
12.2 一元二次方程的解法	(2)
12.3 一元二次方程的根的判别式	(7)
12.4 一元二次方程的根与系数的关系	(10)
12.5 二次三项式的因式分解(用公式法)	(15)
12.6 一元二次方程的应用	(19)
第二节 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程	(22)
12.7 分式方程	(22)
12.8 无理方程	(26)
第三节 简单的二元二次方程组	(29)
12.9 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成 的方程组	(29)
12.10 由一个二元二次方程和一个可以分解成两个	

二元一次方程的方程组成的方程组	(34)
第十二章检测题	(40)
第十三章 函数及其图象	(42)
13.1 平面直角坐标系	(42)
13.2 函数	(45)
13.3 一次函数的图象和性质	(49)
13.4 二次函数及其图象	(56)
13.5 反比例函数及其图象	(64)
第十三章检测题	(70)
第十四章 统计初步	(72)
14.1 平均数、中位数、众数	(72)
14.2 方差、标准差	(76)
14.3 频率分布	(79)
第十四章检测题	(85)

几何部分

第六章 解直角三角形	(89)
第一节 锐角三角函数	(89)
第二节 解直角三角形	(94)
第六章检测题	(101)
第七章 圆	(104)
第一节 圆的有关性质	(104)
第二节 直线和圆的位置关系	(109)
第三节 圆和圆的位置关系	(117)
第四节 正多边形和圆	(128)
第七章检测题	(133)
初三年级期中检测题	(137)
初三年级期末检测题	(140)
中考模拟试题一	(144)
中考模拟试题二	(148)
参考答案与提示	(152)

代数部分

第十二章 一元二次方程

第一节 一元二次方程

12.1 一元二次方程

名题 No. 1A 下列各方程中一定是关于 x 的一元二次方程的是()

- A. $3x^2 = 4x + m$ B. $ax^2 - 8 = 0$
C. $x + y^2 = 0$ D. $5xy - x + 6 = 0$

【解析】 方程 $3x^2 = 4x + m$ 两边都是关于未知数 x 的整式,在这整式方程中,只含有一个未知数 x ,且未知数 x 的最高次数是 2. 方程 $ax^2 - 8 = 0$ 中, a 是二次项 ax^2 的系数,有 $a \neq 0$ 与 $a = 0$ 两种情形,故此方程不是一元二次方程. 答案为 A.

名题 No. 2A 下列命题正确的是().

- A. $x^2 - 6x = 0$ 不是 x 的一元二次方程
B. 把一元二次方程 $(2x - 1)^2 = 3x - 7$ 化成一般形式是 $(2x - 1)^2 - 3x + 7 = 0$
C. $x^2 = 5$ 的两个根是 $\sqrt{5}$ 和 $-\sqrt{5}$
D. $2x^2 - 1 = 0$ 不是 x 的一元二次方程

【解析】 方程 $x^2 - 6x = 0$ 的常数项为 0,应是一元二次方程. 方程 $(2x - 1)^2 - 3x + 7 = 0$ 没有完成整理,不是一元二次方程的一般形式. $\sqrt{5}$ 和 $-\sqrt{5}$ 代入方程中能使方程 $x^2 = 5$ 成立. $2x^2 - 1 = 0$ 是缺一次项的一元二次方程. 答案为 C.

名题 No. 3A 设关于 y 的方程 $-y^2 + 4y - 1 = 0$.

(1) 二次项系数为 _____; 一次项系数为 _____; 常数项为 _____.

(2) 证明 $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ 是它的一个根.

▲ 回归: 课本 P4 ~ P5.

◆ 想一想: 怎样正确判断一个方程是一元二次方程?

◆ 注意: 任何一个关于 x 的一元二次方程,经整理后,都可以化成 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的形式, $a \neq 0$ 的条件一定不能忽略.

▲ 回归: 课本 P5.

◆ 想一想: 什么是一元二次方程的根?

◆ 注意: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 中一次项系数 b 和常数项 c 可以是任何实数.

▲ 回归: 课本 P5.

◆ 注意: 一元二次方程各项系数的符号的正确性.

◆ 启示: $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ 不要直接代入原方程进行验证,

【解析】一元二次方程经过整理,化成一般形式后,各项的系数符号要写清楚。证明 $y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 是它的一个根,只需把

$y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 化成 $y = 2 + \sqrt{3}$ 代入原方程中便可得到验证。答:

(1) $-1; 4; -1$ 。(2) 证明:因为 $y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, 即 $y = 2 + \sqrt{3}$, 那么 $-y^2 + 4y - 1 = -(2 + \sqrt{3})^2 + 4(2 + \sqrt{3}) - 1 = -4 - 4\sqrt{3} - 3 + 8 + 4\sqrt{3} - 1 = 0$ 。

所以 $y = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 是原方程的根。

名题 No. 4A (2000年辽宁省中考题) 用换元法解

方程 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$, 设 $\frac{x}{x+1} = y$, 原方程可变为关于 y 的一元二次方程是_____。

【解析】引入适当的辅助未知数把形式较复杂的方程化成二次方程,在许多情况下都会用到这种方法。答: $y^2 - 5y - 6 = 0$ 。

名题 No. 5B 设 $x^3 - 4 + 3x - 10 = 0$ 和 $x^{3b-4} + 6x + 8 = 0$ 都是一元二次方程,求 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2002} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2002}$ 的值。

【解析】由题设得 $\begin{cases} 3-a=2 \\ 3b-4=2 \end{cases}$ 解得 $a=1, b=2$ 。

原式 $= (a-b)^{2002} = 1$ 。

12.2 一元二次方程的解法

名题 No. 1A (2000年西安市中考题) 用直接开平

而应先进行分母有理化,化成 $y = 2 + \sqrt{3}$ 后代入原方程,使检验过程简化。

▲回归: 课本 P4

□启示: 利用换元法化繁为简,运用方便

●注意: 在实际解题时,如果

把 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$ 展开后整理,一则很繁,再则难以解出。换元后,方程变得简单易解了。“换元”这一方法在今后学习中有着广泛的应用。

▲回归: 课本 P4

□启示: 一元二次方程的未知数 x 的最高次数是 2,可列出二元一次方程组,求得 a 和 b 的值,使看起来较复杂的问题,变得简单易解。

▲回归: 课本 P8

◆想一想: 用直接开平方法

方法解方程 $(x-3)^2 = 8$ 得方程的根为()。

- A. $x = 3 + 2\sqrt{2}$
B. $x = 3 - 2\sqrt{2}$
C. $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}, x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$
D. $x_1 = 3 + 2\sqrt{3}, x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$

【解析】方程 $(x-3)^2 = 8$ 的一边是含有未知数的一次式的平方,另一边是一个非负数,用直接开平方方法求解。答案为 C。

解形如 $(x-a)^2 = b (b \geq 0)$ 的方程时, $b \geq 0$ 的条件非常重要,为什么?

■ 注意:因为负数没有实数的平方根,如果一元二次方程的一边是含有未知数的一次式的平方,而另一边是一个负数,那么这个方程无实数解。

名題 No. 2A

用配方法解方程 $x^2 + 2x - 4 = 0$ 得方程的根为()。

- A. $x_1 = 1 + \sqrt{5}, x_2 = 1 - \sqrt{5}$
B. $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$
C. $x_1 = 2 + \sqrt{5}, x_2 = 2 - \sqrt{5}$
D. $x_1 = -1 + \sqrt{5}, x_2 = -1 - \sqrt{5}$

【解析】方程 $x^2 + 2x - 4 = 0$, 即 $x^2 + 2x = 4$ 。配方,得 $x^2 + 2x + 1^2 = 4 + 1^2, (x+1)^2 = 5$, 解得 $x_1 = -1 + \sqrt{5}, x_2 = -1 - \sqrt{5}$ 。此即为不能直接用开平方方法求解的一元二次方程,可先通过配方成完全平方,形如 $x^2 = c$ 或者 $ax^2 + b = 0 (a \neq 0)$, 实际上就是求常数 $c (c \geq 0)$ 或者 $-\frac{b}{a} (a \neq 0, \frac{b}{a} \leq 0)$ 的算术平方根。答案为 D。

▲ 回归: 课本 P10。

◆ 想一想: 用配方法解一元二次方程与用直接开平方方法求解有什么联系?

□ 启示: 一元二次方程的求根公式, 就是利用配方后直接开平方推导出来的。

名題 No. 3A

(2000 年武汉市中考题) 一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根为 3, 4, 那么二次三项式 $x^2 + px + q$ 可分解为()。

- A. $(x+3)(x-4)$
B. $(x-3)(x+4)$
C. $(x-3)(x-4)$
D. $(x+3)(x+4)$

【解析】一元二次方程的两个根为 3, 4, 即 $(x-3)(x-4) = 0$, 那么 $x^2 + px + q = (x-3)(x-4)$ 。答案为 C。

▲ 回归: 课本 P20。

□ 启示: 若已知一元二次方程的两个根, 那么可把方程 $x^2 + px + q = 0$ 写成两个一次因式的积等于 0 的形式, 从而写出二次三项式 $x^2 + px + q$ 的分解因式。

名题 No. 4A

(2000年吉林省中考题) 一元二次方程

$x^2 + 4x - 12 = 0$ 的根是 _____; 一元二次方程 $(x-1)^2 = 2$ 的根是 _____.

【解析】一元二次方程 $x^2 + 4x - 12 = 0$, 可根据自己熟悉的方法求解, 在这里用因式分解法较为简便; 一元二次方程 $(x-1)^2 = 2$ 用直接开平方法求解.

答案为 $x_1 = -6, x_2 = 2; x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

名题 No. 5B

(2000年河南省中考题) 已知关于 x

的二次方程 $4x^2 + 4kx + k^2 = 0$ 的一个根是 -2 , 那么 $k =$ _____.

【解析】把 $x = -2$ 代入方程 $4x^2 + 4kx + k^2 = 0$ 中, 得方程 $k^2 - 8k + 16 = 0$, 解关于 k 的一元二次方程, $k_1 = k_2 = 4$, 故答案为 4.

名题 No. 6A

用直接开平方法解下列方程:

(1) $3x^2 = \frac{1}{3};$ (2) $x - x^2 = 7x^2 + x;$

(3) $(3x-5)^2 = 1;$ (4) $5(2x+1)^2 - 55 = 0.$

【解析】(1) $3x^2 = \frac{1}{3}, x^2 = \frac{1}{9}, x = \pm \frac{1}{3}, x_1 = \frac{1}{3},$

$x_2 = -\frac{1}{3};$

(2) $8x^2 = 0, x^2 = 0, x_1 = x_2 = 0;$

(3) $3x - 5 = \pm 1, x = \frac{5 \pm 1}{3}, x_1 = 2, x_2 = \frac{4}{3};$

(4) $(2x+1)^2 - 11 = 0, 2x+1 = \pm \sqrt{11}, x = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2},$

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{11}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{11}}{2}.$

▲ 回归: 课本 P8, P14, P20.

※ 注意: 学习一元二次方程的解法, 其中公式法是主要的.

▲ 回归: 课本 P15.

※ 注意: 关于 k 的方程 $k^2 - 8k + 16 = 0$ 有两个相等的实数根.

□ 启示: -2 是关于 x 的二次方程 $4x^2 + 4kx + k^2 = 0$ 的一个根, 代入原方程后转化为求关于 k 的一元二次方程的根. 这种方法是求此类问题最有效的方法之一.

▲ 回归: 课本 P7.

□ 启示: 设 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. 当 $b = 0$ 时, 用直接开平方法求解.

(1) 若 $c = 0$, 则 $x_1 = x_2 = 0;$

(2) 若 $\frac{c}{a} > 0$, 原方程无实数根;

(3) 若 $\frac{c}{a} < 0$, 则 $x_1 =$

$\sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

◆ 想一想: 当 $x^2 = c$ 时, c 必须是一个非负数, 方程才有解, 为什么?

名题 No. 7A 用配方法解下列方程:

(1) $x^2 + 5x + 2 = 0$;

(2) $-2x^2 - \sqrt{2}x + 30 = 0$;

(3) $y^2 + my + n = 0 (m^2 - 4n \geq 0)$.

【解析】(1) $x^2 + 5x = -2$, 配方, 得 $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$, $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$, 故 $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}$;

(2) 方程两边乘 -1 得, $2x^2 + \sqrt{2}x - 30 = 0$, $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x = 15$, 由配方, 得 $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 15 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$, $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{121}{8}$, $x + \frac{\sqrt{2}}{4} = \pm \frac{11\sqrt{2}}{4}$, 故 $x_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -3\sqrt{2}$;

(3) $y^2 + my = -n$, 配方, 得 $y^2 + my + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = -n + \left(\frac{m}{2}\right)^2$, $\left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2 - 4n}{4}$, 由 $m^2 - 4n \geq 0$, 得 $y + \frac{m}{2} = \pm \frac{\sqrt{m^2 - 4n}}{2}$, 故 $y_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$, $y_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$.

名题 No. 8B 用公式法解下列方程:

(1) $x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = 0$;

(2) $y^2 - 2\sqrt{3}y + 2 = 0$;

(3) $y^2 - ny + 2n^2 = 0 (n \neq 0)$;

(4) $x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x + \sqrt{3} - 3 = 0$.

【解析】(1) 方程两边乘以 3 , 得 $3x^2 + 2x - 3 = 0$,
 $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{6}$
 $= \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$, $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{10}}{3}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{10}}{3}$.

▲ 回归: 课本 P10.

★ 注意: 设 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 方程两边都除以二次项系数 a , 得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0$, 配方, 得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, 即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, 在配方过程中

准确找到 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 是关键.

□ 启示: 配方法中方程的两边都加上一项系数一半的平方的前提是方程二次项系数为 1 . (2) 中 $-2x^2 - \sqrt{2}x + 30 = 0$ 变形为 $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x = 15$ 是关键步骤, 要切实掌握.

▲ 回归: 课本 P14.

□ 启示: 设 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 令 $\Delta = b^2 - 4ac$. (1) 当 $\Delta < 0$ 时, 原方程无实数根; (2) 当 $\Delta = 0$ 时, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$; (3) 当 $\Delta > 0$ 时, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. 在运用公式法解方程时, 先将原方程整理成一般形式.

$$(2) y = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2}{2} = \sqrt{3} \pm 1, y_1 = \sqrt{3} + 1, y_2 = \sqrt{3} - 1.$$

(3) 这里有字母系数 n , 可先求 $\Delta = (-n)^2 - 4 \times 2n^2 = -7n^2 < 0$, 故此方程无实数解。

$$(4) x = \frac{(1+2\sqrt{3}) \pm \sqrt{[-(1+2\sqrt{3})]^2 - 4(\sqrt{3}-3)}}{2} \\ = \frac{(1+2\sqrt{3}) \pm 5}{2}, x_1 = 3 + \sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3} - 2.$$

名题 No. 9B 若一元二次方程 $(x-m)(mx+2) = m-2$ 的各项系数之和等于 4, 求方程的解。

【解析】 方程整理后, 得 $mx^2 + (2-m^2)x - 3m + 2 = 0$, 由题设知 $m + 2 - m^2 - 3m + 2 = 4$, 即 $m^2 + 2m = 0$, $m(m+2) = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = -2$. 当 $m = 0$ 时, 原方程不是一元二次方程, 故应舍去, 把 $m = -2$ 代入原方程中, 得 $x^2 + x - 2 = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = -2$.

名题 No. 10C (2000 年北京市朝阳区中考题) (1)

解下列方程:

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \cdots \textcircled{1} \quad 2x^2 + 3x - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \cdots \textcircled{3} \quad x^2 + 6x + 3 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

(2) 上面四个方程中, 有三个方程的一次项系数有共同特点, 请你用代数式表示这个特点, 并推导出具有这个特点的一元二次方程的求根公式。

【解析】 (1) 解方程 $x^2 - 2x - 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$, 得 $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

$$\text{解方程 } 2x^2 + 3x - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}, \text{ 得 } x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}.$$

确定二次项、一次项系数 a, b 和常数项 c .

◆ 注意: 在方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 中运用公式法确定 a, b, c 的值时, 要注意符号。

▲ 回归: 课本 P14.

◆ 想一想: 不能直接解方程时, 怎样根据题设列出方程, 找到解题途径?

◆ 注意: 题设条件中已知方程 $(x-m)(mx+2) = m-2$ 是一元二次方程, 整理为一般形式并求出 m 的值后, 二次项系数不能为 0 的条件不能忽略。

▲ 回归: 课本 P13.

◆ 想一想: 在熟练掌握一元二次方程解法的基础上, 你能在这些题中观察和分析出问题的一般性吗?

● 评注: 解了四个一元二次方程后, 反思其中某些方程的一次项系数的共同特点, 得出其中三个方程的一次项系数为偶数, 用一般式表示这个偶数, 然后运用一元二次方程的求根公式推导出公式的新的表达形式, 使自己学得的知识拓展、延伸, 这是一种创

解方程 $2x^2 - 4x + 1 = 0 \cdots \textcircled{3}$, 得 $x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, x_2 =$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

解方程 $x^2 + 6x + 3 = 0 \cdots \textcircled{4}$, 得 $x_1 = -3 + \sqrt{6}, x_2 = -3 - \sqrt{6}.$

(2) 其中方程 $\textcircled{1}\textcircled{3}\textcircled{4}$ 的一次项系数为偶数 $2n$ (n 是整数).

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 其中 $b^2 - 4ac \geq 0, b = 2n, n$ 为整数.

因 $b^2 - 4ac \geq 0$, 即 $(2n)^2 - 4ac \geq 0$, 故 $n^2 - ac \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{故 } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-2n \pm 2\sqrt{n^2 - ac}}{2a} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - ac}}{a}. \end{aligned}$$

所以一元二次方程 $ax^2 + 2nx + c = 0$ ($n^2 - ac \geq 0$) 的求根公式为 $x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - ac}}{a}.$

创造性的劳动。

12.3 一元二次方程的根的判别式

名题 No. 1A (2000 年南京市中考题) 方程 $x^2 -$

$4x + 1 = 0$ 的根的情况是()。

- A. 有两个不相等的实数根
- B. 有两个相等的实数根
- C. 有一个实数根
- D. 没有实数根

【解析】 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$, 方程有两个不相等的实数根. 答案为 A.

▲ 回归: 课本 P27.

◆ 想一想: 这里判断一元二次方程的根的情况, 为什么不用解方程, 就可根据 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值来进行判断呢?

☐ 启示: 判别式的应用十分广泛, 应准确掌握。

名题 No. 2A 下列关于 x 的二次方程中, 一定没有

实数根的是()。

- A. $3x^2 + a^2 = 0$
- B. $x^2 + ax - 1 = 0$

▲ 回归: 课本 P27.

◆ 想一想: 利用判别式判定一元二次方程的实数根的各种情况时, 对用字母的表达式如何讨论?

C. $x^2 - \sqrt{a}x + a = 0 (a > 0)$

D. $x^2 + (a-4)x + b^2 = 0$.

【解析】A. $\Delta = -12a^2$, 当 $a = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; B. $\Delta = a^2 + 4 > 0$, 方程有两个不相等的实数根; C. $\Delta = -3a$, 由 $a > 0$ 知 $\Delta = -3a < 0$, 方程一定没有实数根; D. $\Delta = (a-4)^2 - 4b^2$, 分三种情况: ① 当 $a = 4, b = 0$ 时, $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; ② 当 $a = 4, b = 0, \Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根. ③ 当 $a = 4, b \neq 0$ 时, $\Delta < 0$, 没有实数根. 答案为 C.

名题 No. 3B (1997 年盐城中考题) 若关于 x 的一元二次方程 $2(k+3)x^2 + 4kx + 3k-6 = 0$ 的两个根分别为 α, β , 且 $\alpha^2 = \beta^2$, 则 k 的值是 ()

A. $-3, 0$

B. $0, -6$

C. $-6, 0, 3$

D. $-6, -3, 0, 3$

【解析】由 $\alpha^2 = \beta^2$ 得 $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0$, 故 $\alpha + \beta = 0$ 或 $\alpha - \beta = 0$. 当 $\alpha + \beta = 0$ 时, 即 $\frac{4k}{2(k+3)} = 0$, 故 $k = 0$. 当 $\alpha - \beta = 0$ 时, $\alpha = \beta$, 即 $\Delta = 0$, 而 $\Delta = (4k)^2 - 4 \times 2(k+3) \times 3(k-2) = -8k^2 - 24k + 24 \times 6 = 0$. 故 $k^2 + 3k - 18 = 0$, $k = -6$ 或 $k = 3$. 答案为 C.

名题 No. 4A (2000 年辽宁省中考题) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 $m =$ _____.

【解析】已知方程有两个相等的实数根, 所以 $\Delta = 0$, 即 $36 - 4m = 0$, 解得 $m = 9$.

名题 No. 5B (1996 年云南省中考题) 如果 m 为任何实数, 一元二次方程 $x^2 - mx + \frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2} = 0$ 的解的情况是 _____.

◆ 启示: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 没有实数根, 反过来也成立.

▲ 回归: 课本 P27.

◆ 启示: 当方程有两个相等的实数根时, $\Delta = 0$, 从而得到了关于 k 的一元二次方程.

◆ 注意: 题设 $\alpha^2 = \beta^2$, 得 $\alpha + \beta = 0$ 与 $\alpha - \beta = 0$. 在研究问题时, 条件不能遗漏.

▲ 回归: 课本 P27.

◆ 启示: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 当 $\Delta = 0$ 时, 有两个相等的实数根, 反过来也成立.

▲ 回归: 课本 P27.

◆ 注意: 当 Δ 的表达式中出现字母时, 可通过配方确定它的符号.

【解析】 $\Delta = (-m)^2 - 4(\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{3}{2}) = -m^2 - 4m - 6 = -(m+2)^2 - 2$, 当 m 为任何实数时, $(m+2)^2 \geq 0$, $-(m+2)^2 - 2 < 0$ 即 $\Delta < 0$, 答案为没有实数根.

名题 No. 6B (2000 年海南省中考题) 已知 $k+3$

是正数, 关于 x 的方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 + \frac{3}{4} = 0$ 有实数根, 求实数 k 的取值范围.

【解析】因方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 + \frac{3}{4} = 0$ 有实数根, 故 $\Delta = (2k-1)^2 - 4(k^2 + \frac{3}{4}) \geq 0$, 即 $-4k - 2 \geq 0$, 故 $2k + 1 \leq 0, k \leq -\frac{1}{2}$. 又因 $k+3 > 0$, 故 $k > -3$. 解得 $-3 < k \leq -\frac{1}{2}$.

名题 No. 7B 已知关于 x 的方程 $4x^2 - 2(m+2)x + (m+2) = 0$. 试讨论它的解的情况, 当有解时求出它的解.

【解析】 $\Delta = [2(m+2)]^2 - 16(m+2) = 4m^2 - 16$, 分三种情况: (1) 当 $\Delta < 0$ 时, 即 $4m^2 - 16 < 0$, 得 $-2 < m < 2$, 原方程无实根. (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 即 $m = \pm 2$, 原方程有两个相等实根. 若 $m = 2$ 时, 原方程变为 $4x^2 - 8x + 4 = 0$, 这时 $x_1 = x_2 = 1$. 若 $m = -2$ 时, 原方程变为 $4x^2 = 0$, 这时 $x_1 = x_2 = 0$. (3) 当 $\Delta > 0$ 时, 这时 $4m^2 - 16 > 0$, 得 $m < -2$ 或 $m > 2$, 原方程的两个根是

$$x = \frac{2(m+2) \pm \sqrt{4m^2 - 16}}{8} = \frac{(m+2) \pm \sqrt{m^2 - 4}}{4}.$$

名题 No. 8B (2000 年天津市中考题) 已知关于 x 的方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根, 试判断直线 $y = (2m-3)x - 4m + 7$ 能否通过点 $A(-2, 4)$, 并说明理由.

▲ 回归: 课本 P27.

◆ 想一想: 一元二次方程有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值情况如何? 如果有两个相等的实数根呢? 实数 k 的取值范围有什么不同?

▲ 回归: 课本 P27.

□ 启示: 当一元二次方程的系数含有字母时, 对于方程根的情况的讨论, 一般应考虑三种情况, 不得遗漏.

★ 比较: 此题是先分析 Δ 的三种情况, 然后讨论关于 x 的方程的根的情况或求根, 而 No. 6B 是知道方程根的情况反过来讨论 Δ 后求 k 的取值范围.

▲ 回归: 课本 P27.

□ 启示: 通过判断 Δ 的符号, 转化为判断直线所经过的象限, 从而得知直线不通过点 A .

【解析】因方程 $x^2 + (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$ 有两个不相等的实数根,故 $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+2) = 4m-7 > 0$ 即 $4m-7 > 0$,得 $2m - \frac{7}{2} > 0$,即 $2m-3 > 0.5 > 0$,又由 $4m-7 > 0$,得 $-4m+7 < 0$,即直线 $y = (2m-3)x - 4m+7$ 过一、三、四象限,而点 $A(-2,4)$ 在第二象限,所以直线不通过点 A .

名题 No. 9C (2000年北京市东城区中考题) 已知

关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2mx - 3m^2 + 8m - 4 = 0$.

(1) 求证:当 $m > 2$ 时,原方程永远有两个实数根;(2) 若原方程的两个实数根一个小于5,另一个大于2,求 m 的取值范围.

【解析】(1) $\Delta = (-2m)^2 - 4(-3m^2 + 8m - 4) = 4m^2 + 12m^2 - 32m + 16 = 16(m-1)^2$. 因无论 m 取任何实数,都有 $16(m-1)^2 \geq 0$,故 m 取任意实数时,原方程都有两个实数根. 自然,当 $m > 2$ 时,原方程也永远有两个实数根. (2) 解关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2mx - 3m^2 + 8m - 4 = 0$,得 $x = \frac{2m \pm \sqrt{16(m-1)^2}}{2} = m \pm 2(m-1)$. 故 $x_1 = 3m-2$, $x_2 = 2-m$.

解不等式组 $\begin{cases} 3m-2 < 5 \\ 2-m > 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2-m < 5 \\ 3m-2 > 2 \end{cases}$ 得 $m < 0$ 或 $m > \frac{4}{3}$. 即 m 的取值范围是 $m < 0$ 或 $m > \frac{4}{3}$.

12.4 一元二次方程的根与系数的关系

名题 No. 1A (2000年山西省中考题) 若方程 $x^2 -$

$2x - 1 = 0$ 的二根为 x_1, x_2 , 则代数式 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值是().

A. 6 B. 4 C. 2 D. -2

【解析】由 $x_1 + x_2 = 2, x_1 \cdot x_2 = -1, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{2^2 - 2 \times (-1)}{(-1)^2} = 6$. 答案为 A.

◆想一想:由一元二次方程根的判别式确定 m 的取值范围后,一次函数的表达式 $y = kx + b$ 中的 k 与 b 的符号是怎样确定的?

▲回归:课本 P14、P27.

◆想一想:如何把一元二次方程的根的判别式与求根公式结合起来解决问题?

□启示:在解综合性题目时,要注意寻找知识之间的关系,运用所学过的方法解决问题. 这里运用了解一元一次不等式组的方法来求 m 的取值范围.

▲回归:课本 P31.

◆注意: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 在代入数值计算前,要熟练地通分和配方.

名题 No. 2A (2000年杭州中考題) 若 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 3x - 5 = 0$ 的两个根, 則 $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ 的值为 ()。

- A. -7 B. -1
C. $-1 + \sqrt{29}$ D. $-1 - \sqrt{29}$

【解析】根据根与系数的关系可知, $x_1 + x_2 = -3, x_1 \cdot x_2 = -5$. $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = -5 - 3 + 1 = -7$. 答案为 A.

名题 No. 3A (2000年广西壮族自治区中考題) 方程 $x^2 + 3x - 6 = 0$ 与 $x^2 - 6x + 3 = 0$ 所有根的乘积等于 ()。

- A. -18 B. 18 C. -3 D. 3

【解析】这里不必求出两个方程的所有的根, 而是利用方程的根与系数的关系, 得 $-6 \times 3 = -18$. 答案为 A.

名题 No. 4A (2000年海甯省中考題) 方程 $(x - 3)(x + 2) = 0$ 与方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的解相同, 則 $a + b =$ _____.

【解析】方程 $(x - 3)(x + 2) = 0$ 的两根为 3, -2. 根据方程根与系数的关系, 可得 $a = -(3 - 2) = -1, b = 3 \times (-2) = -6, a + b = -1 - 6 = -7$. 答案为 -7.

名题 No. 5B 关于 x 的方程 $x^2 + (2k - 3)x + k^2 + 6 = 0$, 两根之积是两根之和的 2 倍, 則 $k =$ _____.

【解析】设已知方程两根为 x_1, x_2 , 則 $x_1 + x_2 = 3 - 2k, x_1 x_2 = k^2 + 6$.

又 $\Delta = (2k - 3)^2 - 4(k^2 + 6) \geq 0$, 解得 $k \leq -\frac{5}{4}$.

▲ 回归: 課本 P31.

◆ 想一想: 利用一元二次方程的根与系数的关系, 怎样求代数式的值?

▲ 回归: 課本 P31.

◆ 注意: 如果分別求各方程的根, 太繁了.

□ 启示: 利用根与系数的关系解題簡捷.

▲ 回归: 課本 P31.

◆ 注意: 方程 $(x - 3)(x + 2) = 0$ 两根是 3, -2, 分別代入方程 $x^2 + ax + b = 0$ 中, 有

$$\begin{cases} 9 + 3a + b = 0 \\ 4 - 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}$$

故 $a + b = -7$. 利用二元一次方程组, 同样可求 $a + b$ 的值, 但較繁.

▲ 回归: 課本 P27, P31.

□ 启示: 一元二次方程根与系数的关系及根的判別式, 要根据題設相結合应用.

根据题意,得 $k^2 + 6 = 7(3 - 2k)$, 即 $k^2 + 4k = 0$,
故 $k_1 = 0$ (舍去), $k_2 = -4$. 答案为 -4 .

名题 No. 6C

(2000 年上海市中考题) 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (2m-1)x + m-2 = 0 (m > 0)$.

(1) 求证: 这个方程有两个不相等的实数根;

(2) 如果这个方程的两个实数根分别为 x_1, x_2 , 且 $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 5m$, 求 m 的值.

【解析】(1) $\Delta = (2m-1)^2 - 4m(m-2) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 8m = 4m + 1$.

因 $m > 0$, 故 $4m + 1 > 0$, 故方程有两个不相等的实数根.

(2) 由 $(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 5m$, 得

$$x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 - 5m = 0.$$

$$\text{故 } x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m}, x_1 x_2 = \frac{m-2}{m}.$$

$$\text{故 } \frac{m-2}{m} - 3 \cdot \frac{2m-1}{m} + 9 - 5m = 0. (*)$$

去分母, 整理后, 得 $5m^2 - 4m - 1 = 0$.

$$\text{解得 } m_1 = 1, m_2 = -\frac{1}{5}.$$

m_1, m_2 都不为零, 都是关于 m 的分式方程 $(*)$ 的根.

因 $m > 0$, 故 $m = -\frac{1}{5}$ 不符合题意, 应舍去, 故 $m = 1$.

名题 No. 7B

(2000 年烟台市中考题) 已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $(m-1)^2 x^2 - (2m-5)x + 1 = 0$ 的两个实数根.

(1) 若 $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, 求 P 的取值范围.

(2) 问 x_1, x_2 能否同为正数, 若能同为正数, 求出 m 相应的取值范围; 若不能同为正数, 请说明理由.

【解析】(1) 因方程有两个实数根,

$$\text{故 } \Delta = [-(2m-5)]^2 - 4(m-1)^2 \cdot 1 = -12m + 21 \geq 0,$$

$$\text{且 } m-1 \neq 0, \text{ 故 } m \leq \frac{7}{4}, \text{ 且 } m \neq 1. \textcircled{1}$$

▲ 回归: 课本 P27, P31.

◆ 注意: m 的值求出后, 要认真审查原题设的条件, 舍去不合题意的 m 的值.

◆ 想一想: 这里运用了一元二次方程根的判别式和方程的根与系数的关系, 题中出现了分式方程, 解题时综合运用所学的知识, 你有什么体会?

▲ 回归: 课本 P27, P31.

□ 启示: 对于一元二次方程根的符号的讨论, 可通过根与系数的关系来进行.

◆ 注意: 在讨论一元二次方程的问题时, 对于二次项系数不为 0 的条件即 $m-1 \neq 0$ 不能忽视.

◆ 想一想: 题中求 P 的取值范围, 实际上是求 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的取值范围, 这里把 P 作