·高等学校试用教材·

计算方法引论

徐萃薇 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

计算方法引论

徐萃薇 编

高等教育出版社

内容提要

本书是作者在北京大学为非计算数学专业的学生讲授计算方法课程时所编写的教材。

全书共分十四章，内容主要包括：插值法、数值微分、数值积分、线性方程组和非线性方程组的解法、矩阵特征值和特征向量的计算、常微分方程和偏微分方程数值解法、有限元方法。本书选材深浅适度，文字通俗易懂，有较丰富的例题，便于自学。可作为高等学校非计算数学专业的教材或参考书，也可供科技人员以及其他人员自学或参考。

本书由清华大学李庆扬、蔡大用先生，吉林大学冯果忱先生审阅。

高等学校试用教材

计算方法引论

徐萃薇 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

开本850×1168 1/32 印张10.375 字数260,000

1985年1月第1版 1985年4月第1次印刷

印数 00,001—18,700

书号 13010·01037 定价 2.15元

序 言

本书是作者 1976 年—1980 年在北京大学为非计算数学专业的学生讲授计算方法课程时所写的教材.

由于电子计算机的迅速发展，国内外关于计算方法的教程和专著日益增多. 对于非计算数学专业的学生来说，虽然他们需要学习计算方法，但并不需要在计算数学的理论问题上花费过多的时间. 这样，写一本适合于物理系、计算机系、地球物理系、力学系等大学生和研究生的计算方法教材就成为十分必要的了. 作者本人讲授这门课程四次，每讲完一次都对教材进行了修改. 另外，北京的几个兄弟院校（北京工业大学、北京工业学院、北京化工学院、北京师范大学和北京师范学院等）从 1980 年起也采用此书作为教材，反映也比较好，并曾根据使用情况对此教材的内容提出了许多宝贵意见，本书就是在采纳了大家提出的修改意见后定稿的.

本书内容共分三部分. 第一部分是数值分析，第二部分是数值代数，第三部分是常微分方程数值解法和偏微分方程数值解法. 全书讲授时数为 72—80 学时. 如果学时少于 72 学时，可少讲或不讲偏微分方程数值解法. 如果学时多于 80 学时，可根据本书参考书目，增加所需的内容.

学习本书所必须的数学基础是微积分和线性代数，以及常微分方程和偏微分方程的基本概念. 这是一般理工科大学的学生都具备的. 对于自学过这些课程的青年，如果他们想进一步自学计算方法，以解决一些实际应用问题，本书对他们也是适宜的. 本书每章都附有一定数量的习题，通过这些习题可以加深对各章内容的理解，掌握必要的解题技巧.

作者特别感谢北京大学计算数学教研室主任胡祖炽教授，他

仔细地审阅了原稿，提出了大量的宝贵意见和建议；还要感谢北京师范大学沈嘉骥同志和北京大学王逵芬同志，他们根据使用这本教材的情况，给作者提出了不少有价值的修改意见。

徐萃薇

1982年冬识于北京大学燕东园

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第一章　误　差

§1　误差的来源

用数学工具来解决实际问题在哪些地方会产生误差呢？首先是用数学模型来描述具体的物理现象要作许多简化，因此，数学模型本身就包含着误差，这种误差叫做“模型误差”．在数学模型中通常总要包含一些观测数据，这种观测结果不会是绝对准确的，因此还有“观测误差”．现举例说明．

例 1　设一根铝棒在温度 t 时的实际长度为 L_t，在 $t=0$ 时的实际长度为 L_0，用 l_t 来表示铝棒在温度为 t 时的长度计算值，并建立一个数学模型：

$$l_t = L_0(1+\alpha t)$$

其中 α 是由实验观测到的常数：

$$\alpha = (0.0000238 \pm 0.0000001)1/°\mathrm{C}$$

则称 $L_t - l_t$ 为“模型误差”．$0.0000001/°\mathrm{C}$ 是 α 的“观测误差”．

例 2　我们用

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,\quad g \approx 9.81\ 米/秒^2$$

来描述自由落体下落时距离和时间的关系．设自由落体在时间 t 的实际下落距离为 $\widetilde{s}_t$，则把 $\widetilde{s}_t - s(t)$ 叫做“模型误差”．

在解实际问题时，数学模型往往很复杂，因而不易获得分析解，这就需要建立一套行之有效的近似方法或数值方法．模型的准确解与用数值方法求得的准确解之差称为“方法误差”，或者叫做“截断误差”．

例 3 一个无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

在实际计算时，我们只能取前面有限项(例如 n 项)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

来代替，这就抛弃了无穷级数的后半段，因而出现了误差，这种误差就是一种"截断误差"．对这个问题来说，截断误差是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

最后，还有一类误差是因为在计算时总是只能取有限位数字进行运算而引起的，这种误差称为"舍入误差"．

例 4 $\pi=3.1415926\cdots,\sqrt{2}=1.41421356\cdots,\frac{1}{3}=0.3333\cdots$等等．在计算机上运算时只能用有限位小数，如我们取小数点后四位数字，则

$$\rho_1=3.1416-\pi=+0.0000074\cdots$$
$$\rho_2=1.4142-\sqrt{2}=-0.000013\cdots$$
$$\rho_3=0.3333-\frac{1}{3}=-0.000033\cdots$$

就是"舍入误差"．

总括起来，误差一般有：模型误差；观测误差；截断误差；舍入误差．但在计算方法中主要讨论的是截断误差和舍入误差．

§2 误差、误差限、有效数字

如何来定义误差？ 若用 x^* 来表示 x 准确值的一个近似值，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

则此近似值 x^* 和 x 准确值的差称为误差，用 e^* 来表示：

$$e^*=x^*-x$$

这样定义后，就有 $x=x^*-e^*$，即近似值去掉(减去)它的误差就是准确值. 因此，把误差的负数 $-e^*$ 叫做近似值 x^* 的“修正值”. 或者说，近似值加上它的修正值就是准确值.

误差可正可负，当误差为正时，近似值偏大，叫做“强近似”，当误差为负时，近似值偏小，叫做“弱近似”.

由于在一般情况下准确值 x 是不知道的，所以误差 e^* 的准确值也不可能求出，但根据具体测量或计算的情况，可以事先估计出误差的绝对值不能超过某个正数 ε^*， 我们把 ε^* 叫做误差绝对值的“上界”，或称“误差限”.

定义 如果

$$|e^*|=|x^*-x|\leqslant\varepsilon^*$$

ε^* 就叫做近似值 x^* 的“误差限”. 误差限一定是一个正数.

因为在任何情况下都有

$$|x^*-x|\leqslant\varepsilon^*$$

即

$$x^*-\varepsilon^*\leqslant x\leqslant x^*+\varepsilon^*$$

这就表明 x 在 $[x^*-\varepsilon^*, x^*+\varepsilon^*]$ 这个区间内，我们用

$$x=x^*\pm\varepsilon^*$$

来表示近似值 x^* 的精确度，或准确值所在的范围.

例 5 用一把有毫米刻度的米尺，来测量桌子的长度，读出的长度 $x^*=1235$ 毫米，是桌子实际长度 x 的一个近似值，由米尺的精度我们知道，这个近似值的误差不会超过半个毫米，则有

$$|x^*-x|=|1235-x|\leqslant\frac{1}{2}\text{毫米}$$

即

$$1234.5\leqslant x\leqslant 1235.5$$

这表明 x 在[1234.5,1235.5]这个区间内，写成

$$x=1235\pm0.5\text{ 毫米}$$

例 6 光速 c 的近似值目前公认的是：

$$c^*=2.997925\times10^{10}\text{ 厘米/秒}$$

通常记为

$$c=(2.997925\pm0.000,001)\times10^{10}\text{ 厘米/秒}$$

取 x 的近似值 x^*，我们通常用四舍五入的方法取前面几位。

例 7 $x=\pi=3.14159265\cdots$

按四舍五入的原则

取一位：$x_1^*=3$, $e_1^*\approx-0.14$.

取三位：$x_3^*=3.14$, $e_3^*\approx-0.0016$.

取五位：$x_5^*=3.1416$, $e_5^*\approx+0.000007$.

取六位：$x_6^*=3.14159$, $e_6^*\approx-0.000003$.

如果近似值 x^* 的误差限是某一位上的半个单位，该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，我们就说 x^* 有“n 位有效数字”．或者说 x^* 准确到该位．用四舍五入法取准确值的前 n 位作为近似值 x^*，则 x^* 有 n 位有效数字．上面例子中的 $x_3^*=3.14$ 是以三位有效数字来表示 π，它的误差限为

$$|x_3^*-\pi|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-2}$$

$x_5^*=3.1416$ 是以五位有效数字来表示 π，它的误差限为

$$|x_5^*-\pi|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

下面我们再来说明有效数字位和误差限之间的关系．

定义 若用 x^* 表示 x 的近似值，并将 x^* 表示成

$$x^*=\pm0.a_1a_2\cdots a_n\times10^p \tag{1-1}$$

若其误差限

$$|x^*-x|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{p-n}$$

便说近似值x^*具有n位有效数字，这里p是一个整数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，每个都是从 0～9 中的一个数字，而且假定 $\alpha_1 \neq 0$.

从这里可以看出误差限和有效数字位之间的关系，并可以通过有效数字位来刻划误差限.

例 8 若 $x^*=3587.64$ 是x的具有六位有效数字的近似值，那么它的误差限是：

$$|x^*-x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{4-6}=\frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

若 $x^*=0.0023156$ 是x的具有五位有效数字的近似值，则误差限是：

$$|x^*-x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2-5} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-7}$$

§ 3 相对误差和相对误差限

上节引入的误差和误差限的概念，不能说明近似的好坏程度，它是有量纲单位的. 譬如，工人甲平均每生产一百个零件有一个次品，而工人乙则平均生产五百个零件有一个次品. 他们的次品都是一个，但显然乙的技术水平要比甲高. 这就启发我们除了要看次品的多少外，还必须注意到产品的合格率，甲的次品是百分之一，而乙的次品是五百分之一. 我们把近似数的误差与准确值的比值定义为“相对误差”，记作 e_r^*.

定义 记

$$e_r^*=\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$$

为近似数 x^* 的相对误差. 在实际计算中，由于准确值x总是不知道的，所以我们也把

$$e_r^*=\frac{e^*}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*}$$

记为近似值 x^* 的相对误差，条件是 e_r^* 比较小.

与前面引入的误差一样，相对误差可正可负，我们把相对误差绝对值的上界叫做"相对误差限"，记作

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$$

其中 ε^* 是 x^* 的误差限.

为了区别相对误差与§2中讲的误差，我们把§2中讲的误差叫做"绝对误差". 注意，绝对误差不是误差的绝对值.

例 9 $c=(2.997,925\pm0.000,001)\times10^{10}$ 厘米/秒，这时 $c^*=2.997,925\times10^{10}$ 厘米/秒的相对误差限是：

$$\varepsilon_r^* = \frac{0.000,001}{2.997,925} \approx 0.000,000,3$$

c^* 是 c 的很好的近似值。如果我们取

$$c^{**} = 3\times10^{10}\text{厘米/秒}$$

作为光速的近似值，则有

$$\varepsilon_r^{**} = \frac{0.0021}{3} = 0.0007$$

相对误差限不到千分之一. $c^{**}=3.00\times10^{10}$ 厘米/秒是用四舍五入法取 c 的前三位数的近似值，它有三位有效数字.

同样可以给出相对误差限和有效数字位的关系.

设形如(1-1)的近似数 x^* 具有 n 位有效数字，则其相对误差限为

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} \leqslant \frac{1}{2a_1}10^{-(n-1)}$$

要说明这一点并不困难，由定义知 x^* 是具有 n 位有效数字的近似值，因此

$$|x^*-x| \leqslant \frac{1}{2}\times10^{p-n}$$

相对误差限

$$\varepsilon_r^* = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{p-n}}{|x^*|}$$

而$|x^*| \geqslant \alpha_1 \times 10^{p-1}$，所以

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{p-n}}{\alpha_1 \times 10^{p-1}} = \frac{1}{2\alpha_1} 10^{-(n-1)}$$

要注意的是，用相对误差限来得到有效数字位时，其关系略有不同。

形如(1-1)的近似数 x^*，相对误差限满足关系式

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} 10^{-(n-1)}$$

则 x^* 至少具有 n 位有效数字位。

和前面关系不同的是分母为 $2(\alpha_1 + 1)$。这是因为若要 x^*具有 n 位有效数字，则只要能证明

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$$

即可。而

$$|x^* - x| = |x^*| \varepsilon_r^* \leqslant |x^*| \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} 10^{-(n-1)}$$

因为$|x^*| \leqslant (\alpha_1 + 1) \times 10^{p-1}$，所以

$$|x^* - x| \leqslant (\alpha_1 + 1) \times 10^{p-1} \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} 10^{-(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$$

例 10 用 $x^* = 2.72$ 来表示 e 具有三位有效数字的近似值，则相对误差限是：

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2 \times 2} \times 10^{-2}$$

§ 4 和、差、积、商的误差

设 x^* 是 x 的近似值，y^* 是 y 的近似值，用 $x^*\pm y^*$ 来表示 $x\pm y$ 的近似值，则它的误差为：

$$(x^*\pm y^*)-(x\pm y)=(x^*-x)\pm(y^*-y) \tag{1-2}$$

式(1-2)说明和的误差是误差之和，差的误差是误差之差．但是因为

$$|(x^*\pm y^*)-(x\pm y)|\leqslant|x^*-x|+|y^*-y|$$

所以误差限之和是和或差的误差限．以上的结论适用于任意多个近似数的和或差．任意多个数的和或差的误差限等于各数的误差限之和．

若我们把 x^* 的误差 $e^*=x^*-x$ 看作是 x 的微分

$$dx=x^*-x$$

x^* 的相对误差是

$$e_r^*=\frac{x^*-x}{x}=\frac{dx}{x}=d\ln x$$

它是对数函数的微分．

设 $u=xy$，则 $\ln u=\ln x+\ln y$，因而

$$d\ln u=d\ln x+d\ln y$$

这就是说，乘积的相对误差是各乘数的相对误差之和．同样可证，商的相对误差是被除数与除数的相对误差之差．这是因为，若

$$u=x/y$$

则

$$\ln u=\ln x-\ln y$$

因此

$$d\ln u=d\ln x-d\ln y$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com