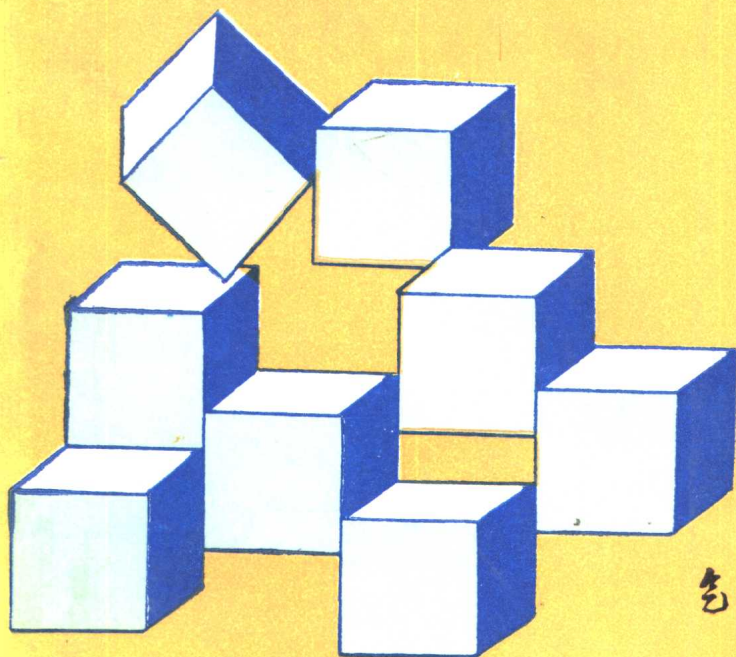


# 数值天气预报 基础

游性恬 编著  
张兴旺

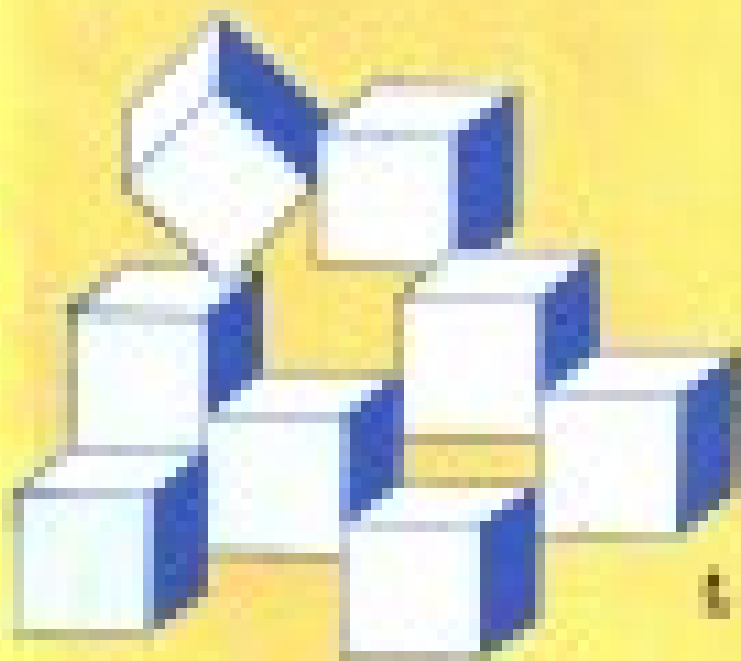


气象出版社

# 数值天气预报

## 基础

张松海 主编  
张松海 副主编



气象出版社

# 数值天气预报基础

游性恬  
张兴旺 编著

气象出版社

(京)新登字046号

### 内 容 简 介

本书较系统而全面地介绍了数值天气预报的基础理论和基本方法。内容包括：各种水平和垂直坐标下的大气运动基本方程组，差分计算方法、过滤模式、正压原始方程模式、斜压原始方程模式、客观分析及数值产品的应用等。为便于读者自学，对基本而重要的公式给出了关键性的推导，并配有一定数量的习题、提示和答案。为了读者查阅方便或上机练习，书末附录中给出了一些有关的计算方法、运算规则以及两个简单模式的计算程序和说明。

本书可作为高等学校气象专业大专班的教材，亦可供广大气象业务人员及大学本科生参考。

### 数值天气预报基础

游性恬 编著  
张兴旺

责任编辑 陆 勇

\*

气象出版社出版

(北京西郊白石桥路46号)

北京昌平环球科技印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

\*

开本：850×1168 1/32 印张：10.875 字数：279千字

1992年3月第一版 1994年5月第二次印刷

印数：1001-2800

ISBN 7-5029-0812-9/P·0415(课)

定价：6.35元

# 前 言

当前，在改革开放和新技术革命的新形势下，气象部门迫切需要一支数量上能基本满足要求，质量上又有较高水平的专业队伍，以加速实现气象现代化。

根据这个总要求，则需大力发展气象教育事业，尤其需要办好大专层次教育，而进行教材建设又是一项重要的基础工作。为此，我司委托北京气象学院编写了一套适合气象专科层次的通用教材，同时它也可用于专科函授、自学考试，还可做为气象、农林、水利、航空等部门的气象专业人员学习参考用书。这样就弥补了过去气象大专层次教材的空白，从而拓宽了这套教材的使用面。

这套教材是北京气象学院在经过多届教学实践的基础上进行逐步修改而成的，共编写了《计算方法》、《气象学》、《天气学教程》、《动力气象》、《数值天气预报基础》、《气象统计预报》、《天气分析和诊断方法》等七种。编写的指导思想是尽力面向实际和反映新技术发展及新方法的应用，在保持教材的科学性、系统性和一定水平的条件下，力求通俗易懂，从而照顾到中级气象专业人员进行学习参考使用。

参加这套教材编写工作的都是学院有教学经验的教师。初稿完成后，我司还组织了部分气象高等院校的专家、教授进行审查，对教材修改提出了许多宝贵的意见，编者根据这些意见又进一步作了修改。在修改过程中，还得到了有关专家和教授的指导，并对教材进行了全面审订工作。最后，使得教材趋于完善。在此一并表示衷心感谢。

国家气象局科教司

# 序 言

数值天气预报是气象科学中近四十年来迅速发展中的一个分支。它是通过用数值方法近似求解支配大气运动的流体动力学和热力学方程组，来预报未来的大气环流形势和天气。因此数值天气预报的主要内容就是研究大气运动所遵循的基本物理规律的数学表达式——流体动力学和热力学方程组，以及求解这个方程组的数值计算方法。

人类生活在大自然中，人们的生产和生活跟天气状况有密切的关系。早在远古时代，我们的祖先就开始积累看天经验。以后，由于航海及军事上的直接需要，也由于科学技术及观测手段的发展，到十九世纪中叶诞生了天气图的预报天气方法。但是用这种方法作天气预报在相当大的程度上依赖于预报员的经验，存在着不客观、不定量的缺点。因此人们希望使天气预报建立在更坚实的理论基础上，寻求一种较为客观定量的预报方法。这就需要把大气运动规律用严谨的数学语言表达出来，把天气预报问题变为数学物理问题。马克思曾说过：“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。”数学是一切科学的有力助手和工具。任何学科如果成功地应用了数学这一工具，才能精确地描绘客观事物的状况和变化规律，甚而从已知状态（初值）推算出未来的状态。近代计算机的飞速发展及应用数学提供了强有力的武器。数值天气预报的实现和推广就是力图在气象中应用数学工具，从而使天气预报客观定量的一个重要尝试和体现。

挪威锋面气旋学派的创造人皮叶克尼斯 (V. Bjerknes) 在本世纪初首先提出数值天气预报的思想。他指出，数值天气预报，就是根据某一时刻实际观测到的大气状态和运动，通过描述大气

运动规律的基本方程组,来计算将来某一时刻大气的状态和运动。也就是用数学物理方法,通过具体计算,数值求解控制大气运动的基本方程组,从而使天气预报从主观到客观,从定性到定量。

英国数学家理查森(L·F·Richardson)对皮叶克尼斯的想法进行了勇敢的实践,于1922年出版了“天气预报中的数学方法”一书。他在1916—1918年曾组织大量人力,利用1910年5月20日的资料,计算了中欧一个点的地面气压未来6小时的预报值,得到6小时变压为145毫巴的结果,而实况却很少变化。这一试验以失败而告终。现在看来,理查森失败的主要原因有:

(1) 方案过于普遍化,对大气波动和数值计算中的一些基本理论问题认识不够。理查森的方案里包含了移速较慢的超长波、长波和移速快的水平声波、重力惯性波等,它们的传播速度可以相差十来倍。数值计算中理查森取了相当长的时间步长(几小时),导致极大的误差,重力波振幅虚假地扩大了。

(2) 缺乏完善的观测资料。当时的气象资料不仅误差大,而且不完整。当时只有西欧和北美的地面观测及有限高度的测风纪录,而由气球测风值外插高空风,由山脉观测值外插高空温度。初值和边界值都没有经过恰当的处理。

从数学上看,由运动方程计算加速度是由二个大项求小差,如果观测和计算没有足够的精度,则误差很大。

(3) 缺乏先进的计算工具,计算速度慢而不准。理查森曾估计,为赶上天气变化的速度,作24小时预报需要64,000人的紧张计算才行。

理查森试验失败以后的二十年里数值天气预报无人问津,但是这期间计算数学和气象科学都在不断地向前发展。1928年得出了著名的关于线性差分计算稳定性C·F·L条件。三十年代随着无线电探空仪的发明建立起高空观测网。在大量高空观测资料的基础上,罗斯贝(C·G·Rossby)提出了著名的长波理论。四十年代前期,苏联基别尔(И·А·Кибель)由小扰动摄动法理论

得出准地转的预报方程。不久,恰尼(J·G·Charney)等人从尺度分析出发,对大气基本方程组进行简化,也得到准地转的预报关系式。这些都为数值天气预报方法的诞生准备了必要的理论基础。四十年代末,美国造出世界上第一台ENIAC型电子计算机。1950年恰尼、冯·诺曼(J·von Neumann)和菲耶托夫(R·Fjortoft)等人用准地转一层模式和实际初始资料在此计算机上作出了500毫巴未来24小时的气压形势预报。预报场与实况场的相关系数为0.75,数值天气预报首次获得成功。1954年瑞典军事气象局与国际气象研究所合作,使用正压模式,第一个实现了业务数值预报。同时,美国、苏联、西欧、日本等各国的气象学者们也竞相开展数值预报的研究和应用。六十年代前期,在过滤模式的基础上,吸取了理查森失败的教训,研制出正压原始方程模式并投入业务。七十年代里,气象学者们又进而将各种复杂的物理因子,如积云对流和水汽相变过程,行星边界层内水汽、热量和动量的湍流输送及大气辐射等非绝热过程引入大气基本动力学方程组,对连续大气进行垂直分割,开发了斜压原始方程模式并投入业务。近十多年来,数值天气预报更是取得了长足的进步,其中主要有:

(1) 预报范围扩大,时效延长,设计了高分辨的谱模式或多重套网格模式。业务模式的预报范围多已扩大到半球或全球。1979年8月欧洲中期天气预报中心(ECMWF)开始发布1—10天的预报,其他一些国家也开展了中期或长期数值预报的业务或试验研究。模式的垂直分层更为稠密,尤其是在边界层内。欧洲中心的业务模式在垂直方向上已达19层,并发展了多重套网格的预报方法,这样既可增加局部地区的水平分辨率,也使计算量不致过分激增。

(2) 大气中各种物理过程的描述更加细致。如对积云参数化、行星边界层、地形、辐射及海气相互关系等的处理都更加合理、周到。



(3) 数值计算方法和客观分析方法不断改进、提高。各国气象工作者设计或引用了具有多种守恒性的差分格式，深入讨论非线性相互作用以及有关的分支、突变理论。通过四维分析，广泛使用包括气象卫星探测等各种非常规资料，采用最优插值、多元统计分析、变分法等多种改进的初值化方案。数值预报业务中已实现资料的处理分析全部自动化。

(4) 预报准确率提高，数值预报产品更加丰富。除了高空环流形势预报，还发布地面气压场、降水预报以及多种物理量的诊断场。

现在世界上已有三十多个国家和地区开展了数值天气预报业务。在许多国家数值预报已在中短期环流形势预报中占主导地位，成为现代中短期天气预报的基础，在预报服务中发挥重要的作用。数值预报产品的质量和数量是衡量一个国家天气预报发展水平的重要标志之一。

数值天气预报的发展不仅使气象预报朝着客观、准确、量化的方向迈进了一大步，而且对大气科学也产生了深远的影响。数值模拟和预报、大气环流实验以及近代探测技术的开发和改进，把大气科学带入“实验”科学的阶段，从而大大加速这门学科的发展。近十多年来蓬勃开展的各种数值试验，就是在不同的数值模式的基础上，利用理想初值或者控制各种影响要素和作用因子，借助高速电子计算机，定量“算出”相应的大气状态和演变，有效地揭示了大气运动的规律和机理。

数值天气预报在发展的同时也还存在不少问题。例如：

(1) 次网格尺度物理过程参数化的理论和方法有待进一步改进。

(2) 对非线性理论和数值计算方法需作更深入的研究和改善。

(3) 中长期数值预报和气候模拟，以及中小尺度的灾害性天气预报都是现今尚未解决而又急待研究的课题。

1959年国庆十周年前夕，我国利用准地转正压模式，在电子计算机上作出了亚欧500百帕环流形势预报。1969年利用北半球准地转三层模式进行高空形势预报供各级台站参考。1972年起中国科学院大气物理研究所等单位协作，采用三层原始方程模式作亚欧地区和北半球的24—72小时的天气形势业务预报。在七十年代我国参加了世界气象组织，组建北京气象中心，购进大型电子计算机，实现从资料的接收、处理、分析、预报的全盘自动化。1982年2月北京气象中心开始发布北半球5层斜压原始方程模式的预报图、各标准等压面的分析图及主要物理量的诊断分析图。1983年起又增发了国内降水量预报图。不久还将启用分辨率更高、技术更先进的T42L9大型谱模式来替换现用的业务模式。数值天气预报业务的开展和推广应用已成为我国气象事业现代化的重要组成部分。

本书主要介绍数值天气预报的基本理论、有关的数值计算方法和基础典型模式。考虑到函授教学的特点，对上述内容进行了较为系统而详细的论述，对其中大部分公式给出了具体或关键性的推导。此外还配有一定数量的习题，并给出了计算题的答案和部分提示，以及准地转正压无辐散模式和正压原始方程模式的计算程序，以助于对基本理论的深入理解和掌握应用。

书中第一—三章及序言和附录由游性恬执笔，第四—六章由张兴旺执笔。北京大学张玉玲教授审阅了全文。由于编写者水平所限，其中的不足、不妥或错误之处在所难免，敬希读者不吝指正。

作者

一九九〇年于北京

# 目 录

前言

序言

第一章 大气运动的基本方程组 .....	(1)
§1.1 大气运动的基本方程组 .....	(1)
§1.2 球坐标和局地直角坐标中的基本方程组 .....	(4)
§1.3 普遍垂直坐标转换 .....	(8)
§1.4 $p$ 坐标和 $\sigma$ 坐标中的基本方程组 .....	(12)
§1.5 地图投影 .....	(18)
小结 .....	(31)
习题 .....	(32)
第二章 数值计算方法 .....	(35)
§2.1 差分方法 .....	(35)
§2.2 时间积分方案 .....	(38)
§2.3 线性计算的稳定性 .....	(43)
§2.4 三层格式的计算解 .....	(48)
§2.5 有限网格下的误差 .....	(51)
§2.6 非线性计算不稳定 .....	(61)
§2.7 平滑和过滤 .....	(68)
小结 .....	(73)
习题 .....	(74)
第三章 过滤模式 .....	(78)
§3.1 模式大气和预报模式 .....	(78)
§3.2 尺度分析和过滤模式 .....	(80)
§3.3 大气及大气模式的总涡度守恒 .....	(86)
§3.4 大气及大气模式的总能量守恒 .....	(89)
§3.5 准地转正压模式 .....	(96)

§3.6	相当正压模式	(109)
§3.7	荒川的雅可比守恒差分格式	(112)
§3.8	准地转斜压模式	(118)
	小结	(124)
	习题	(125)
<b>第四章</b>	<b>正压原始方程模式</b>	<b>(129)</b>
§4.1	正压原始方程组	(131)
§4.2	正压原始方程的波动解	(134)
§4.3	正压原始方程模式中各物理量守恒性	(137)
§4.4	线性计算稳定性条件	(141)
§4.5	差分格式和地转适应	(143)
§4.6	几种空间差分格式及其守恒性质	(154)
§4.7	半拉格朗日-半隐式格式	(164)
§4.8	时间积分方案——分离解法	(170)
§4.9	水平边界条件	(171)
§4.10	正压原始方程的初值形成	(174)
§4.11	正压原始方程模式设计方案框图	(178)
	小结	(183)
	习题	(184)
<b>第五章</b>	<b>斜压原始方程模式</b>	<b>(188)</b>
§5.1	模式的基本方程组	(189)
§5.2	连续大气的积分性质	(190)
§5.3	差分格式及其守恒性质	(198)
§5.4	初值形成	(207)
§5.5	模式的一些物理过程描述	(211)
§5.6	预报实例	(230)
	小结	(239)
	习题	(239)
<b>第六章</b>	<b>客观分析和数值预报产品应用</b>	<b>(242)</b>
§6.1	气象系统工程——现代天气分析技术的发展	(244)
§6.2	二维客观分析的方法	(250)

§6.3 数值预报产品的加工和应用.....	(257)
小结.....	(290)
习题.....	(292)
附录一 向量运算的基本公式.....	(293)
附录二 场论的几个基本概念和运算公式.....	(296)
附录三 正交曲线坐标及几个常用微分算符在坐标中的表 达式.....	(298)
附录四 利用普遍曲线坐标推导球坐标中的基本方程组 .....	(304)
附录五 利用普遍曲线坐标推导地图坐标中的常用微分算 符表达式.....	(308)
附录六 准地转正压模式的 FORTRAN 程序.....	(309)
附录七 正压原始方程模式的 FORTRAN 程序.....	(314)
附录八 正压原始方程模式的 BASIC 程序.....	(324)
参考文献.....	(332)

# 第一章 大气运动的基本方程组

大气运动的状态和规律可以用一组流体动力学和热力学方程组来表示。数值天气预报就是在给定的初始条件下，通过数值积分描写大气运动的方程组而得到未来某一时刻大气环流的状况和气象要素的分布。因此首先要给出描写大气运动的基本方程组。

## §1.1 大气运动的基本方程组

大气运动遵循的基本物理规律有：动量变化定律（即牛顿第二定律）、质量守恒定律、热力学第一定律等。以下给出这些定律在大气运动中的表现形式，它们与状态方程、水汽方程等一起构成大气运动的基本方程组。

### 一、运动方程

由动力气象学已知，根据牛顿第二定律，在旋转地球上的单位质量空气，遵循以下运动规律：

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_s p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_s + \vec{g} + \vec{F} \quad (1.1)$$

式中  $-2\vec{\Omega} \times \vec{V}_s$  为科氏力， $\vec{\Omega}$  一地球自转角速度。

$\vec{g} = \vec{g}_a - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ ， $\vec{g}_a$  为地球引力， $\vec{r}$  一地心（坐标原点）到空气质点的向径。 $\vec{F}$  一摩擦力。

### 二、连续方程

- 1) 气象中的速度向量  $\vec{V}$ ，以及梯度  $\nabla$ 、散度  $\nabla \cdot$  等微分算符，如不带下标“s”，则一般都代表是二维的。

由质量守恒定律可得到连续方程:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_s \cdot \vec{V}_s = 0 \quad (1.2a)$$

或

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\rho \vec{V}_s) = 0 \quad (1.2b)$$

或

$$\frac{d\alpha}{dt} - \alpha \nabla_s \cdot \vec{V}_s = 0 \quad (1.2c)$$

式中 $\rho$ 为空气密度,  $\alpha = \frac{1}{\rho}$ , 称为比容。

### 三、状态方程

在正常温度和气压变化范围内, 干空气和湿空气可以认为是理想气体。其状态方程为:

$$p = \rho RT \quad (1.3a)$$

或

$$p\alpha = RT \quad (1.3b)$$

其中 $p$ 为气压,  $T$ 为气温(绝对温度),  $R$ 为气体常数。

### 四、热力学第一定律

热力学第一定律反映了能量守恒原理。对单位质量的非粘性气体, 热力学第一定律有以下形式:

$$C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = Q \quad (1.4a)$$

式中  $C_v \frac{dT}{dt}$  为单位质量理想空气内能的变化率,  $C_v$  为空气的定容比热,  $p \frac{d\alpha}{dt}$  为可逆过程中单位质量非粘性气体在单位时间里膨胀所作的功。Q为外界对单位质量空气的加热率。

利用状态方程, 上式可变换为:

$$C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q$$

即

$$C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \omega = Q, \quad \left( \omega = \frac{dp}{dt} \right) \quad (1.4b)$$

热力学方程还可变换为以下常见的形式:

$$\alpha \frac{dp}{dt} + pr \frac{d\alpha}{dt} = \frac{R}{C_p} Q, \quad \left( \gamma = \frac{C_p}{C_v} \right) \quad (1.4c)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) T - \sigma_1 \omega = \frac{Q}{C_p} \quad (1.4d)$$

$$\sigma_1 = \frac{\alpha}{C_p} - \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \left( -\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \sigma_2 \omega = \frac{R}{C_p p} Q \quad (1.4e)$$

$$\sigma_2 = -\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

式中  $C_p$  为气体的等压比热,  $C_p = C_v + R$ ,  $R$  为气体常数,  $\theta$  为位温。利用位温公式, 热力学方程还可表示为:

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{Q}{C_p T} \quad (1.4f)$$

或

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} Q \quad (1.4g)$$

式中  $\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^k$ ,  $k$  为位温,  $k = \frac{R}{C_p}$ ,  $p_0 = \text{常数} = 1013.25$  百帕。

将上述运动方程写成分量形式, 则以上共有六个方程。若摩擦力  $\vec{F}$  和外界加热率  $Q$  为已知函数, 则其中包含 6 个未知数, 在  $z$  坐



标中为:  $u, v, w, p, T, a$ 。因而方程组是闭合的。原则上说, 当给定初始条件和边界条件时, 此方程组应能求解, 从而得到未来时刻的大气状态。

如果考虑水气的相变过程, 则  $Q$  中还应包含相变潜热  $-L \frac{dq}{dt}$ , 其中  $L$  为凝结潜热,  $q$  代表比湿, 这时还要补充一个水汽方程。

### 五、水汽方程

对于边长为  $\delta x, \delta y, \delta z$  的小体积元, 单位时间内通过边界上的交换净得的水汽质量为  $-\nabla_3 \cdot (\rho_v \vec{V}_3) \delta x \delta y \delta z$ , 其中  $\rho_v$  为水汽密度。又设单位时间、单位体积内水汽的源或汇为  $S$ , 它是由水汽的相变过程产生。则水汽方程为:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\nabla_3 \cdot \rho_v \vec{V}_3 + S$$

已知比湿  $q = \rho_v / \rho$ ,  $\rho$ —空气密度, 代入上式, 得到:

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} = -\nabla_3 \cdot \rho q \vec{V}_3 + S$$

利用连续方程, 由上式有:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V}_3 \cdot \nabla_3 q = \frac{S}{\rho} \quad (1.5a)$$

$$\text{或} \quad \frac{dq}{dt} = \frac{S}{\rho} \quad (1.5b)$$

此为单位质量空气的水汽方程。设水汽的源汇  $S$  为已知, 这时大气的基本方程组增加一个方程 (1.5), 同时也增加一个未知数  $q$ , 方程组仍封闭。

## §1.2 球坐标和局地直角

### 坐标中的基本方程组

实际地球是一个椭球体, 其半径在赤道和极地相差22公里。