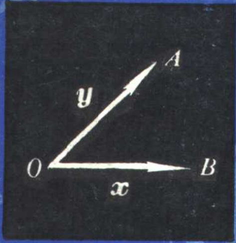


黄午阳 编

线性代数

（修订本）

上海科学技术文献出版社

线 性 代 数

(修 订 本)

黄 午 阳 编

上海科学技术文献出版社

线 性 代 数

(修 订 本)

黄 午 阳 编

*

上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路 2 号)
新华书店上海发行所发行
上 海 商 务 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 5.25 字数 121,000
1984 年 7 月第 1 版 1984 年 7 月第 1 次印刷
印数: 1—23,000

书号: 13192·59 定价: 0.55 元

《科技新书目》73-209

编 者 的 话

本书是在原书的基础上，参照教育部审订的职工高等工业专科学校线性代数课程的教学大纲修订改编的．在改编时，除保留原教材中从具体到抽象以及通过实例来说明较复杂的定理等特点外，主要作了如下的修改和补充：在第二章中补充了线性方程组有解的判别条件；第四章改为两章，删去了线性变换，但补充了线性方程组解的结构、向量的内积、实对称矩阵的相似矩阵等内容．

本书可作为职工高等专科学校的试用教材或参考书．本书前四章的教学时数约 28 学时，少学时的专业可不学第五章．

书末的附录一及附录二不作教学内容，主要供读者学习其他学科时查阅．

编　　者

1984.1

目　　录

第一章　行列式及其性质……………………………………1
§1　二阶行列式……………………………………………1
§2　三阶行列式……………………………………………2
§3　n阶行列式……………………………………………5
§4　克莱姆法则……………………………………………18
习题一……………………………………………………21
第二章　矩阵………………………………………………25
§1　矩阵的定义……………………………………………25
§2　矩阵的运算……………………………………………27
§3　矩阵乘积的行列式与矩阵的逆……………………35
§4　矩阵的分块……………………………………………39
§5　矩阵的初等变换………………………………………44
习题二……………………………………………………62
第三章　二次齐式…………………………………………66
§1　一般二次齐式的标准形………………………………66
§2　实二次齐式……………………………………………75
习题三……………………………………………………83
第四章　线性空间…………………………………………85
§1　线性空间的定义………………………………………85
§2　向量的线性相关与线性无关…………………………88
§3　基底与坐标……………………………………………90
§4　基底变换与坐标变换…………………………………99
§5　线性方程组解的结构…………………………………102
习题四……………………………………………………110

第五章　相似矩阵 ……………………………………………112

§1　向量的内积 ……………………………………………112

§2　方阵的特征值与特征向量 ………………………………120

§3　相似矩阵 ………………………………………………125

习题五 ……………………………………………………132

附录一　矩阵的微分运算与积分运算 ……………………134

附录二　多项式与多项式矩阵 ……………………………138

习题答案 …………………………………………………152

第一章　行列式及其性质

工程上的很多问题可归结为解一个线性方程组的问题. 本章将从求二元、三元线性方程组的解引出二阶及三阶行列式的概念，然后推广到 n 阶行列式，最后给出解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1　二阶行列式

为了解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

可以 a_{22} 乘第一个方程，以 a_{12} 乘第二个方程，然后将两式相减，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}.$$

同样，如以 a_{21} 乘第一个方程，以 a_{11} 乘第二个方程，然后将两式相减，可得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

若 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$，就得到：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为了便于记忆 x_1 及 x_2 的表达式，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

这叫做二阶行列式. 其中横写的叫做行,竖写的叫做列,二阶行列式含有两行、两列. 从上式可知,二阶行列式是这样两项的代数和:一项是在左上角到右下角的对角线上的两个数的乘积,取正号;另一项是在右上角到左下角的对角线上的两个数的乘积,取负号.

例如,
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5-(-2)\times 3=11.$$

根据二阶行列式的定义,(2)式中两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

如果采用记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

于是,方程组(1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=1, \\ x+3y=2. \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2,\ D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3.$

故
$$x=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad y=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

§2 三阶行列式

我们再来解三元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.
\end{cases} \tag{1}
$$

从方程组(1)中的前两式消去 x_3, 后两式消去 x_3, 再从所得到的两个方程中消去 x_2, 就得到

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}\\
&\qquad -a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\
&\quad =(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}\\
&\qquad -a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).
\end{aligned}
$$

若 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时, 得出

$$
\begin{aligned}
x_1=\frac{1}{D}(&b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}\\
&-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3).
\end{aligned}
$$

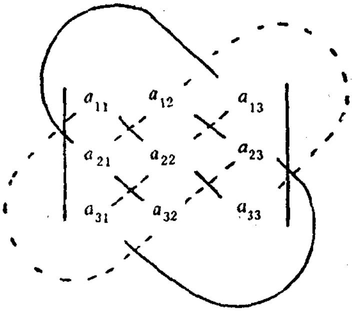
同样, 我们可求得

$$
\begin{aligned}
x_2=\frac{1}{D}(&a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3\\
&-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}),\\
x_3=\frac{1}{D}(&a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}\\
&-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).
\end{aligned}
$$

为了便于记忆, 引进三阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}
-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{2}
$$

它含有三行、三列, 是六项的代数和. 这六项可这样来记忆: 如下图所示, 实线上三个数的乘积构成的三项都取正号, 虚线上三



个数的乘积构成的三项都取负号．例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-5)\times1+(-4)\times3\times1$$
$$+1\times(-1)\times1-1\times(-5)\times1$$
$$-3\times(-1)\times2-(-4)\times1\times1$$
$$=-10-12-1+5+6+4=-8.$$

引进三阶行列式后，上面 x_1、x_2、x_3 的表达式中，分母都是三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而分子则分别是行列式 D_1、D_2、D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

容易看出，D_1 是 D 的第一列中的 a_{11}、a_{21}、a_{31} 分别换成 b_1、b_2、b_3 得到的. D_2 是 D 的第二列中的 a_{12}、a_{22}、a_{32} 分别换成 b_1、b_2、b_3 得到的. D_3 是 D 的第三列中的 a_{13}、a_{23}、a_{33} 分别换成 b_1、b_2、b_3 得到的.

若 $D\neq0$，则方程组(1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases}2x-4y+z=1,\\ x-5y+3z=2,\\ x-y+z=-1.\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-8,\quad D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6.$$

故方程组的解为

$$x=-\frac{11}{8},\quad y=-\frac{9}{8},\quad z=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}.$$

§3 n 阶行列式

一、n 阶行列式的定义

有了二阶、三阶行列式，就可把 $D\neq0$ 时第1、2节中的方程组(1)的解很简单地表示出来. 我们在解 n 元线性方程组时，自然会想到它的解是否也能用 n 阶行列式来表示呢？这里碰到的

问题是如何定义 n 阶行列式. 为此,我们先从研究二阶、三阶行列式的结构入手,找出其内在的联系,然后根据这些联系来定义 n 阶行列式,并用它来解 n 元线性方程组.

观察上节三阶行列式(2)的结构可以得到:

1. (2) 中每一项都是三个数的乘积, 各项中因子的第一个下标的次序均为 1, 2, 3, 而第二个下标的次序则分别为: 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 3, 2, 1. 故 (2) 的任意项可写成 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$, 这里 i_1, i_2, i_3 是 1, 2, 3 的一个排列.

2. (2) 中每一项都带有符号, 不是正号便是负号, 这是根据什么规律确定的呢? 为了搞清楚这个问题, 先介绍排列 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 的逆序数的意义. 在排列中一个数 i 的左边比 i 大的数字的个数称为该数字 i 的逆序数. 排列中所有数字的逆序数的和称为该排列的逆序数. 例如, 当 $n=3$ 时, 排列 2, 3, 1 中 1 的逆序数为 2, 2 和 3 的逆序数均为 0, 因此排列 2, 3, 1 的逆序数为 $2+0+0=2$; 而排列 3, 2, 1 中, 1 的逆序数为 2, 2 的逆序数为 1, 3 的逆序数为 0, 因此排列 3, 2, 1 的逆序数为 $2+1+0=3$.

排列的逆序数可按下述方法计算: 首先计算有多少记数排列在 1 的前面, 其次, 把 1 划去, 计算有多少记数排列在 2 的前面(划去的 1 不再计算),然后把 2 划去后,再计算有多少记数排列在 3 的前面,依次类推.

假设在 1 前面有 m_1 个记数, 在 2 前面有 m_2 个记数, $\cdots$, 在 n 前面有 m_n 个记数, 这个排列的逆序数就等于 $m_1+m_2+\cdots+m_n$.

如果一个排列的逆序数为奇数,则称此排列为奇排列;若排列的逆序数为偶数,则称此排列为偶排列.

由 (2) 可知, 凡排列 i_1, i_2, i_3 为偶排列的项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 带正

号，反之，则带负号。

3．因为1、2、3共有$3!=6$个不同的排列，所以(2)是一个6项的代数和。

于是，上节的三阶行列(2)式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

上面这些规则，对于二阶行列式显然也是适用的。现在根据这些规则来定义n阶行列式：

有n^2个数a_{ij}，$i, j=1, 2, \cdots, n$，排列成n行、n列，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{A}$$

叫做n阶行列式。a_{ij}叫做第i行第j列上的元素，n阶行列式就是所有这些项的代数和。

1．每项是形如$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$的乘积，其中各因子的第一个下标是按1, 2, …, n的次序排列的，第二个下标$i_1, i_2, \cdots, i_n$是1, 2, …, n的一个排列。

2．每一项所带的符号是这样来确定的：若排列$i_1, i_2, \cdots, i_n$为偶排列，取正号；反之，则取负号。

3．因为n个数字的所有排列共有$n!$个，所以这样的项共有$n!$个，用式子表示就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

n阶行列式是指一个含有 $n!$ 项的代数和，每一项都是由(A)中的每一行和每一列任取一个元素，且仅取一个元素所成的积. 把每一项的因子的第一个下标按照自然数的顺序书写，假若第二个下标所成的排列的逆序数为 t，这一项前面的符号就令它为 $(-1)^t$.

因此，当 t 是偶数(0 也当偶数看待)，也就是第二个下标所成的排列为偶排列时，这一项取正号，反之，t 是奇数时，这一项就取负号. 于是，n 阶行列式也表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

二、行列式的性质

根据行列式的定义直接计算行列式是很麻烦的. 为了简化行列式的计算，我们来讨论行列式的一些基本性质. 对这些性质我们只是加以叙述，而不作证明，然后通过实例说明如何利用行列式的性质来进行行列式的计算.

性质 1　如果把行列式的某一行中所有元素同乘以 k，其结果等于用 k 乘原行列式. 或者说，行列式的某一行中所有各数如有公因子 k，则可把 k 提到行列式外面. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 = A,$$

用 2 乘 A 的第一行，得

$$\begin{vmatrix} 2\times2 & 2\times1 & 2\times2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=20=2A.$$

特别当 $k=0$ 时，行列式的值是零，即行列式中如果有某一行完全是零，则行列式的值是零.

性质 2　如果行列式的某行的所有数均可写成两项的和，则这个行列式等于两个行列式的和．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1+1 & 1+2 & 2+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=5+5=10=A.$$

性质 3　交换行列式中的任意两行，行列式只改变符号．

例如，把 A 的第二行与第三行互换，就得到

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-10=-A.$$

根据性质 3, 可得到下面两个推论:

推论 1　行列式中如有两行完全相同, 则这个行列式等于零.

因为把行列式 D 中相同的两行互换, 行列式不变, 但由性质 3 知, 它们又应当反号. 所以 $D=-D$, 即 $2D=0$, 故 $D=0$.

推论 2　行列式中如有两行成比例, 则这行列式等于零.

因为, 如行列式中第 i 行的各数是第 $j(i\neq j)$ 行各对应数的 k 倍, 则把第 i 行的公因子 k 提到行列式外面, 就得到有两行完全相同的行列式, 从而由推论 1 可知这个行列式等于零.

性质 4　如果把行列式的某行中各数同乘以 k 后, 加到另一行的对应的数上, 则这行列式不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如, 用 2 乘 A 的第一行加到第二行上, 得

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4+4 & 3+2 & 1+4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=10=A.$$

注意: 这里用 k 乘行列式 D 的某一行是加到另一行上, 而不是加到同一行上, 如用 k 乘第 i 行又加到第 i 行上, 这样就等于用 $k+1$ 乘 i 行, 其结果是 $(k+1)D$ 而不是 D 了.

例 1　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}.$$

解 把第二行乘以 -1，加到第一行上，然后把第三行乘以 -1 加到第四行上去，就得到：

$$\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & a-c & 0 & 0 \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c-a & a-c & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

下面引进转置行列式的概念.

把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的各行都变为列，不改变它们的前后顺序，所得到的新的行列式

$$D^{\tau} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 D 的转置行列式. 显然 D 也是 D^{τ} 的转置行列式，因此 D 与 D^{τ} 是互为转置的.

性质 5 行列式与它的转置行列式相等.

例如，A 的转置行列式

$$A^{\tau} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 = A.$$