泛函分析初步

[英] I. J. Maddox 著

朱晓亮 张文深 译

人民教育出版社

本书根据英国 Cambridge University Press 1970 年出版的 I. J. Maddox 著 Elements of Functional Analysis 一书译出. 它介绍了泛函分析的初步知识以及泛函分析在一个特殊的数学领域——“序列空间中的矩阵变换”上的应用. 可作高等学校数学类各专业教学参考之用.

本书不要求读者具备 Lebesgue 积分的知识,没有学过实变函数的读者也可以阅读.

泛函分析初步

[英] I. J. Maddox 著

朱晓亮 张文深 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7 75 字数 185,000

1981 年 9 月第 1 版 1983 年 5 月第 1 次印刷

印数 00,001—14,000

书号 13012·0655 定价 1 05 元

目　　录

第一章　集论及分析基础

§1　集与函数

伟大的德国数学家 G. Cantor(1845—1918) 通常被认为是集论的创立者. 本书就采用他关于集的定义作为出发点. 这个定义是:"一个集[①]是由我们思想中的或者可感知的一些确定的, 可以分辨的对象所组成, 并被看成一个整体的任意一个集体."定义中说到的对象称为集的元素或元. 通常我们用大写字母表示集, 用小写字母表示集的元素. 如果 X 是一个集, 那么 $x \in X$ 表示 x 是集 X 的一个元素. 当 x 不是集 X 的元素时记为 $x \notin X$.

下面, 我们将使用下列的集而不加解释, 它们在整个数学中都会出现:

$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 全体正整数的集;

$Z = \{0, 1, -1, \cdots\}$, 全体整数的集;

Q, 全体有理数的集;

R, 全体实数的集;

C, 全体复数的集.

上述记号的来历是: N 来自英文 natural numbers(自然数), Z 来自德文 Zahlen(整数), Q 来自英文 quotient(商). 记号 R 和 C 来自英文 real(实的)和 complex(复的).

通常, 在某一个具体的讨论中, 我们取定一个固定的集, 并且一切讨论仅仅关于它来进行. 这时, 这个固定的集称为论域. 例如, 在数论中论域是 Z. 在论域 X 内构成一个集的通常的方法是在 X 中取某一类型的对象, 然后考虑所有这样的对象的集. 例

① "集"也常译成"集合"——译者注。

如，在 Z 中定义称为素数的对象，于是可以考虑全体素数的集.

在本书中，我们主要是对集作运算，而不是讨论它的更深的性质. 为此，我们引进记号和定义，同时讲述一些简单的结果.

首先，一般地说，没有一个明显地写出集的所有元素的方法. 例如，正整数 N 的集按其本性就不能明显地列出它的全部元素. 我们不得不满足于写 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$；省略号留下很多想象余地. 通常，我们用花括号来记集，在括号中或者是写出集的少数几个元素，然后用省略号表示构成集的元素的规则是大家知道的或是明显的；或者在花括号中写出构成集的元素的规则. 例如，$\{x|x\in N$ 且 $x>8\}$ 读为"所有 x 的集，x 满足：x 是正整数且 x 大于8". x 后面的竖线读为"满足"或"使得". 所以，上面的集也可以写为 $\{9, 10, 11, \cdots\}$. 又如 $\{x|x\in R$ 且 $x>0\}$ 表示全体正实数的集. 在这个情形不能明显地写出元素，甚至要把构成集的元素的规则表述出来也是不可能的，这是实数的性质. 事实上，以后我们将看到，集 $\{x|x\in R$ 且 $x>0\}$ 是不可列的，因此，元素不能写成一个无穷序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$. 我们注意，在一个集中元素的顺序一般是没关系的. 例如，N 与 $\{2, 1, 4, 3, 6, 5, \cdots\}$ 是相同的集.

设 A, B 是集，则记号 $A\subset B$ 表示集 A 的每一个元素也是集 B 的一个元素. 如果 $A\subset B$，则称 A 是 B 的一个子集，A 包含在 B 中，亦即 B 包含 A. 记号 $B\supset A$ 看作与 $A\subset B$ 等价. 当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 时，定义 $A=B$；当且仅当 $A\subset B$，但 $A\neq B$ 时称 A 是 B 的一个真子集. 例如，奇数集是 Z 的一个真子集. 注意，有些作者用记号 $A\subseteq B$，这个记号允许两集相等，而给真子集保留记号 $A\subset B$. 有时我们也说："严格地 $A\subset B$"，意即 A 是 B 的一个真子集.

集的包含 $\subset$ 有两个简单的性质：

(i) $A\subset A$，

(ii) 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$, 那么 $A\subset C$.

如果 A 是一个给定的集, 我们考虑 A 的子集 $\{x\in A|x\neq x\}$. 这个集没有元素, 称为空集. 空集用符号 $\emptyset$ 表示, 它有性质: 对每个集 A, $\emptyset\subset A$. 每个集 $A\neq\emptyset$, 至少有两个明显的子集: A 与 $\emptyset$. 如果 A 仅有这样两个子集, 那么 A 一定是一个单元素集, 比如说 $A=\{a\}$, 这里 a 是 A 的唯一元素. $\emptyset$ 没有元素, 但是单元素集 $\{\emptyset\}$ 是不空的.

集的并与交 给定集 A, B, 用它们构成两个新的集:

$$A\cup B=\{x|x \text{ 至少属于 } A \text{ 与 } B \text{ 中之一}\},$$

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

我们称集 $A\cup B$ 为集 A 与集 B 的并, 称集 $A\cap B$ 为集 A 与集 B 的交①. 例如,

$$\{1, 2, 3\}\cup\{1, 4, 3\}=\{1, 2, 3, 4\},$$

$$\{2, 3\}\cap\{1, 3, 2\}=\{2, 3\}.$$

对任意的集 A 和 B, 显然 $A\cap B\subset A\subset A\cup B$. 如果 $A\cap B=\emptyset$, 那么称 A 与 B 不相交.

我们经常需要构造一类(或族)集的并或交. 假定 $\mathscr{S}$ 是由一些集 A 所成的一个集类(集族). 我们定义

$$\cup\{A|A\in\mathscr{S}\}=\{x|x\in A, \text{ 至少对于一个 } A\in\mathscr{S}\},$$

$$\cap\{A|A\in\mathscr{S}\}=\{x|x\in A, \text{ 对于所有 } A\in\mathscr{S}\}.$$

有时我们写 $\cup A_\alpha$, $\cap A_\alpha$, 这里, 我们认为 α 取遍某一个指标集. 如果 α 取遍 N, 通常写为

$$\cup\{A_n|n\in N\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

类似地有 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$. 记号中的 ∞ 是按惯例写的, 引入它即使不说造成混乱, 但也是多余的. 要特别指出, 在族 $\{A_n|n\in N\}$ 中并没有

① 集的"并"、"交"也常叫"并集"、"交集"——译者注.

A_∞. 还要注意，上面叙述中没有涉及极限过程. 因此，比如说 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，意即存在一个正整数 p 使得 $x\in A_p$.

例 1 设 A_n 是实数直线上的区间 $\left[0,\ 1+\dfrac{1}{n}\right)$，即

$$A_n=\left\{x\in R\,|\,0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right\},\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

那么
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[0,\ 1]=\{x\in R\,|\,0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

为了证明它，我们首先证明 $[0,\ 1]\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，其次证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset[0,\ 1]$. 设 $x\in[0,\ 1]$，那么有 $0\leqslant x\leqslant 1<1+\dfrac{1}{n}$ 对一切 $n\in N$ 成立，就是说对一切 $n\in N$，$x\in A_n$，即 $x\in\bigcap A_n$. 反过来，若对一切 $n\in N$，$x\in A_n$，则有 $0\leqslant x<1+\dfrac{1}{n}$，由此 $0\leqslant x\leqslant 1$.（令 $n\to\infty$ 即得；或假定 $x>1$，这与 $x<1+\dfrac{1}{n}$ 对一切 $n\in N$ 成立矛盾.）

集的覆盖 设 $\mathscr{S}$ 是一些集 A 所成的一个集类，当且仅当

$$X\subset\bigcup\{A\,|\,A\in\mathscr{S}\}$$

时，称 $\mathscr{S}$ 为集 X 的一个覆盖. 如果 $\mathscr{S}$ 的某一子类也覆盖 X，那么称它为 $\mathscr{S}$ 的一个子覆盖.

在第二章，关于紧致集要用到开覆盖的概念. 这里“开”是指覆盖中的集是拓扑意义下的开集. 目前我们只举一个很简单的覆盖例子.

例 2 （i）设 I_n 是实数直线上的开区间

$$(n,\ n+1)=\{x\in R\,|\,n<x<n+1\},$$

那么集族 $\{I_n|n\in Z\}$ 不是 R 的一个覆盖，因为整数不属于 $\bigcup\{I_n|n\in Z\}$.

（ii）设 $J_n=\{x\in R\,|\,n\leqslant x<n+1\}=[n,\ n+1)$，那么集族 $\{J_n|n\in Z\}$ 是 R 的一个覆盖.

(iii) 设 $S[a, r]=\{z\in C \mid |z-a|\leqslant r\}$, 其中 $a\in C$, $r>0$. 那么 $S[a, r]$ 是复平面上以 a 为圆心、以 r 为半径的闭圆盘. 显然集族 $\{S[m+in, 1] \mid m, n\in Z\}$ 是 C 的一个覆盖.

余集 设 X 是论域, A、$B\subset X$, 定义

$$A\sim B=\{x\in X \mid x\in A, x\notin B\},$$

我们称集 $A\sim B$ 是集 B 关于集 A 的余集. 用 $\sim A$ 表示 $X\sim A$, 并称 $\sim A$ 为 A 的余集. 显然 $A\sim B=A\cap(\sim B)$, $\sim(\sim A)=A$, 和 $A\subset B$ 等价于 $\sim B\subset\sim A$.

关于余集的下列两个结果通常称为 De Morgan 法则:

$$\sim\bigcup A_\alpha=\bigcap(\sim A_\alpha); \quad \sim\bigcap A_\alpha=\bigcup(\sim A_\alpha).$$

作为例子. 我们证明第一个法则. 只须注意对一切 α, $x\in\sim A_\alpha$ 等价于对任一 α, $x\notin A_\alpha$.

容易证明并和交的另外一些性质:

(i) $\bigcap A_\alpha\subset A_\alpha\subset\bigcup A_\alpha$, 对任何 α 成立,

(ii) $A\cup(\bigcap A_\alpha)=\bigcap(A\cup A_\alpha)$,

(iii) $A\cap(\bigcup A_\alpha)=\bigcup(A\cap A_\alpha)$.

有序对 设 x, y 是任何对象. 那么定义有序对 (x, y) 为集 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. 容易验证有序对的基本性质: $(x, y)=(u, v)$ 当且仅当 $x=u$, $y=v$. 更一般地, 我们可以类似地定义一个有序 n 元组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 它具有性质: $(x_1, \cdots, x_n)=(y_1, \cdots, y_n)$ 当且仅当 $x_1=y_1$, $\cdots$, $x_n=y_n$.

关系 一个关系 ρ 定义为由有序对所成的集. 例如, $\rho=\{(1,2), (a, b)\}$ 是一个关系.

与 $(x, y)\in\rho$ 等价的记号是 $x\rho y$. 于是, 上例中可以写 $1\rho 2$ 代替 $(1, 2)\in\rho$.

一类重要的关系是

Descartes 乘积 设 X、Y 是给定的集, 那么称

$$X\times Y=\{(x,\ y)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}$$

为 X 与 Y 的 Descartes 乘积.

另一个重要关系是

等价关系　设 X 是一个给定的集. X 上的一个关系 ρ 称为 X 上的一个等价关系,当且仅当它满足(i)自反性,即对所有 $x\in X$,有 $x\rho x$;(ii)对称性,即若 $x\rho y$,那么 $y\rho x$;(iii)传递性,即若 $x\rho y$, $y\rho z$,那么 $x\rho z$. 通常用 $\sim$ 而不用 ρ 表示等价关系,这样表示几乎没有与余集混淆的危险.

例 3　(i) 相等显然是任何集上的一个等价关系.

(ii) 设 $X=\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\in N\}$. 如果定义 $(x,\ y)\sim(u,\ v)$ 是指 $xv=yu$,那么 $\sim$ 是集 X 上的一个等价关系. 例如,我们验证传递性:设 $(x,\ y)\sim(u,\ v)$, $(u,\ v)\sim(z,\ w)$,那么 $xv=yu$, $uw=vz$,由此 $xvuw=yuvz$,从而 $xw=yz$,即 $(x,\ y)\sim(z,\ w)$.

(iii) 如果定义 $x\sim y$ 是指 $x-y$ 能被 2 除尽. 容易验证 $\sim$ 是集 Z 上的一个等价关系.

我们回到一般的关系. 关系的定义域是它的元素的所有第一个坐标的集,关系的值域是它的元素的所有第二个坐标的集. 如果 $\sim$ 是集 X 上的一个等价关系,那么我们定义 $E_x=\{y\in X\,|\,y\sim x\}$,并称 E_x 为含元素 x 的等价类. 例如,在例 3(iii)中,我们有

$$E_0=\{0,\ \pm2,\ \pm4,\ \cdots\}.$$

一般,容易验证:当且仅当 $x\sim y$ 时, $E_x=E_y$,而且还可验证:如果 $E_x\neq E_y$,那么 $E_x\cap E_y=\emptyset$. 显然,集类 $\{E_x\,|\,x\in X\}$ 构成集 X 的一个划分,即 X 是这些不相交的 $E_x(x\in X)$ 的并. 例如在例 3(iii)中,我们有

$$Z=\{0,\ \pm2,\ \pm4,\ \cdots\}\cup\{\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \cdots\}.$$

数学中出现的最重要的一类关系或许就是所谓函数关系. 有些分析书广泛地使用函数而实际上没有定义函数,对于习惯于这

样的分析书的那些人，下列函数的定义似乎是相当古怪的.

函数 函数 f 定义为一个关系，它满足：如果 $(x, y)\in f$，$(x, z)\in f$，那么 $y=z$. 函数的另外四个术语是映象，映射，算子，变换.

我们这个作为一定的有序对的集的函数概念，有些人称它为函数的图. 因为通常他们定义函数是一个法则或者类似的东西. 有时，当用"函数的图"的术语看来能更好表达时，我们将使用它，然而，对我们来说，函数和它的图完全是同一回事.

例 4 （i） $\{(1, 2), (2, 2)\}$ 和 $\{(z, z+1)|z\in C\}$ 是函数.

（ii） $\{(1, 2), (1, 4)\}$ 和 $\{(x^2, x)|x\in R\}$ 不是函数. 例如 $(1, 1)$ 和 $(1, -1)$ 都在第二个集中.

（iii） $\{(x^2, x)|x\in R^+\}$ 是一个函数. 其中 $R^+=\{x\in R|x>0\}$. 在这个情形，如果第一个坐标是相等的，即 $x^2=y^2$，那么 $(x-y)(x+y)=0$，所以 $x=y$，即第二个坐标是相等的.

如果 f 是一个函数，$(x, y)\in f$，那么我们记 $y=f(x)$，这是 y 作为 x 的一个函数的常用记号. 称 y 是 f 在 x 处的值，或 y 是 x 在 f 下的象.

记号 $$f: X\rightarrow Y$$

现在在数学中广泛地使用. 它可以解释为：f 是把集 X 映到集 Y 中的一个函数. 它的意思是 X 是 f 的定义域，且 f 的值域是 Y 的一个子集，而不必是整个 Y.

如果 $f: X\rightarrow Y$ 且 $A\subset X$，那么，对于 $a\in A$，由 $g(a)=f(a)$ 所定义的函数 $g: A\rightarrow Y$ 称为是 f 在 A 上的限制.

例 5 （i） 定义 $f: f(x)=e^x$，$x\in R$，即 f 的定义域是 R，且 $f=\{(x, e^x)|x\in R\}$. f 的值域实际上是 R^+，这是大家熟知的. 我们可以写为 $f: R\rightarrow R$，也可以更精确地写为 $f: R\rightarrow R^+$.

（ii） 定义 $f: f(z)=|z|$，$z\in C$. 一步比一步精确地写出就是

$f:C\to C$, $f:C\to R$, 以及$f:C\to\{x\in R|x\geqslant 0\}$.

双射映象　设$f:X\to Y$. 如果对每一$x_1, x_2\in X$, 由$f(x_1)=f(x_2)$可得到$x_1=x_2$, 那么称f为单射的. 如果f的值域是整个Y, 那么称f是满射的. 如果一个映射f既是单射的, 又是满射的, 那么称f为双射的.

"单射的", "满射的"和"双射的", 有时又分别称为"一一的", "映上的", "一一对应的".

例 6　如果$f:R\to\{x\in R|x\geqslant 0\}$由$f(x)=x^2$所定义, 那么$f$是满射的, 但不是单射的. 如果对$f$用同样的等式表示, 但写成$f:R^+\to R^+$, 那么$f$就是双射的.

反函数　设$f: X\to Y$是双射的. 因为f是满射的, 所以如果$y\in Y$, 那么存在$x\in X$, 使得$y=f(x)$. 又由于f是单射的, 所以这个x是唯一的. 因此, 有一个反函数$g:Y\to X$, 使得对一切$x\in X$, 有$g(f(x))=x$, 以及对一切$y\in Y$, 有$f(g(y))=y$. 通常记为$g=f^{-1}$.

例 7　由$f(x)=e^x$定义的$f: R\to R^+$是双射的, 它的反函数$f^{-1}:R^+\to R$用 log 表示.

等势集　集X, Y称为是等势的(记为$X\sim Y$), 当且仅当存在双射映象$f: X\to Y$. 我们注意, $\sim$是一个等价关系. 例如$X\sim X$, 因为由$f(x)=x$给出的映象$f:X\to X$就是一个合适的双射.

例 8　(i) $\{1, 2, 3\}\sim\{1, 3, 5\}$; $\{2, 4, 6, \cdots\}\sim N$, 且$N\sim Z$.

(ii) $\{1, 2\}$与$\{1, 2, 3\}$不是等势的.

(iii) R中的区间$(-1, 1)$与R是等势的. 因为

$$f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

就是合适的双射.

可列集　一个集称为是可列的,当且仅当它与集 N 等势或与 N 的子集等势. 否则称它为不可列集. 在集与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 等势的情形,称它为 n 元有限集.

集 N, Z 和 Q 都是可列集的例子. 实数集 R 是不可列集(见习题12). 显然,可列集的任何子集是可列集. 还有,如果 A_n, $n=1, 2, \cdots$ 是一列可列集,那么 $\cup\{A_n|n\in N\}$ 是可列集, 这就是说,可列个可列集的并集是可列集. 为了"列出"可列集 $\cup A_n$ 的元素,我们这样来做. 设 $A_n=\{a_{n1}, a_{n2}, \cdots\}$, $n=1, 2, \cdots$, 那么只要剔除重复,集

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, \cdots\}$$

是 A_n 的并集且是可列集. 例如,如果

$$A_1=\{2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}, \quad A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\},$$

那么按上述作法得到集 $A_1\cup A_2=\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 10, \cdots\}$.

例9　设 $A_n=\{m/n|m\in Z\}$, $n=1, 2, \cdots$. 因为 Z 是可列集,所以每一个 A_n 是可列的, 并且 $\cup A_n=Q$. 因此 Q 是可列的. 于是 Q 与 N 等价,尽管 N 是 Q 的一个非常"稀疏的"子集.

象和原象　设 $f: X\to Y$, 且 $A\subset X$, $B\subset Y$. 那么定义 $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ 为集 A 在映射 f 下的象. 定义 $f^{-1}(B)=\{x|x\in X$ 且 $f(x)\in B\}$ 是集 B 的原象. 注意 $f^{-1}(B)$ 是 X 的子集; 为了我们可以写 $f^{-1}(B)$, 不必要求 f 是双射的.

下面给出象和原象的基本性质.

定理1　设 $f: X\to Y$, 且 $\{A_\alpha\}$ 是集 X 的子集所成的类, $\{B_\alpha\}$ 是 Y 的子集所成的类, 那么

(i) 如果 $A_\alpha\subset A_\beta$, 就有 $f(A_\alpha)\subset f(A_\beta)$;

(ii) 如果 $B_\alpha\subset B_\beta$, 就有 $f^{-1}(B_\alpha)\subset f^{-1}(B_\beta)$;

(iii) $f(\cup A_\alpha)=\cup f(A_\alpha)$;

(iv) $f(\bigcap A_\alpha)\subset\bigcap f(A_\alpha)$;

(v) $f^{-1}(\bigcup B_\alpha)=\bigcup f^{-1}(B_\alpha)$;

(vi) $f^{-1}(\bigcap B_\alpha)=\bigcap f^{-1}(B_\alpha)$;

(vii) $A_\alpha\subset f^{-1}(f(A_\alpha))$;

(viii) $f(f^{-1}(B_\alpha))\subset B_\alpha$.

证明 作为例子，我们证明(iii). 如果$y\in f(\bigcup A_\alpha)$，那么存在$x\in\bigcup A_\alpha$，使得$y=f(x)$. 这就是说，存在某个α，使得对$x\in A_\alpha$，$y=f(x)$. 所以，$y\in f(A_\alpha)\subset\bigcup f(A_\alpha)$. 反过来，如果$y\in\bigcup f(A_\alpha)$，那么存在某一个$\alpha'$，使得$y\in f(A_{\alpha'})$，那么$y=f(x)$，其中$x\in A_{\alpha'}\subset\bigcup A_\alpha$. 因此$y\in f(\bigcup A_\alpha)$. 这就证明了(iii). 其余结果的证明留作习题. 要注意(iv)和(vi)之间的不同.

复合函数 设$f: X\to Y$，且$g: Y\to Z$，这里f、g是任何函数，且X、Y、Z是任何集. 对每一个$x\in X$，用$(gf)(x)=g(f(x))$定义复合(或乘积)函数$gf: X\to Z$.

复合函数显然是初等微积分中所说的函数的函数.

半序关系 设X是一个集. 集X上的半序关系(通常用$\prec$表示)是满足下列条件的一个关系: (1)自反性(即对每一$x\in X$有$x\prec x$). (2)传递性(即如果$x\prec y$和$y\prec z$，那么$x\prec z$). (3)反对称性(即如果$x\prec y$和$y\prec x$，就有$x=y$).

如果一个半序关系$\prec$还具有性质：对任何x、y，或者$x\prec y$，或者$y\prec x$，那么称$\prec$为一个全序关系.

半序集是由集X和集X上的半序关系组成的对$(X, \prec)$. 全序集可以类似地定义.

例 10 (i) 设$\mathscr{A}$是任何一个集族. 那么集的包含关系$\subset$是集族$\mathscr{A}$上的半序，一般它不是$\mathscr{A}$上的全序.

(ii) 实数集R上的"自然的"全序当然是$\leqslant$.

(iii) 在N上定义$\prec$如下：设x, $y\in N$，当且仅当x是y的整

数倍时，定义 $x \prec y$. 那么显然$\prec$是 N 上的一个半序，它不是全序. 例如，3 不是 2 的整数倍，3 的整数倍也不会是 2.

设$(X, \prec)$是一个半序集，$a \in X$，当且仅当对一切 $x \in X$，由 $a \prec x$ 就有 $x = a$，那么称 a 是 X 的极大元. 设 $b \in X$，当且仅当对一切 $x \in X$，由 $x \prec b$ 就有 $x = b$，那么称 b 是 X 的极小元.

设 $A \subset X$，元 $M \in X$ 称为集 A 的一个上界，当且仅当对一切 $x \in A$，有 $x \prec M$. 类似地，元 $m \in X$ 称为集 A 的一个下界，当且仅当对一切 $x \in A$，有 $m \prec x$.

例 11 设 X 是一个非空集，$P(X)$是 X 的所有子集所成的集类(称 $P(X)$是 X 的幂集)，那么$(P(X), \subset)$是一个半序集. 如果 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集所成的任何集类，那么 $\cup\{A \mid A \in \mathscr{A}\}$是 $\mathscr{A}$ 的一个上界，$\cap\{A \mid A \in \mathscr{A}\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个下界.

为了证明一些数学分支中的许多重要结果，援引集论中称为 Zorn 引理的基本公理是必要的. 我们现在叙述这个引理，以后还对它作些注释.

Zorn 引理 假设 X 是一个半序集，如果它的每一个全序子集有一个上界，那么 X 有一个极大元.

本书中有两处必须用这个公理. 在第三章 § 2，我们用它证明每一个线性空间有一个 Hamel 基. 在第四章 § 5，重要的 Hahn-Banach 延拓定理的证明，要再次用到这个引理.

Zorn 引理直观上似乎是不显然的，要求读者作为集合论的公理接受它. 如果期望证明某些存在性类型的结果，这个公理是有力的.

我们注意，可以证明 Zorn 引理等价于集合论的另外两个公理：(1)选择公理，(2)良序原理. 为了我们的目的，出于技术的原因，采用 Zorn 引理是最好的. 对三个公理的等价性有兴趣的读者可查阅列入文献目录的 P. C. Suppes 著的书.

习 题 1

1. 证明：当且仅当 $C\subset A$ 时，集合等式

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$$

成立.

2. (i) 证明：

$$\{x\in R\mid e^x=0\}=\emptyset.$$

(ii) 确定

$$\{x\in R\mid e^x=-1\} \text{ 和 } \{z\in C\mid e^z=-1\}.$$

3. (i) 设 $A_\alpha=(\alpha,\infty)$ 是以 α 为左端点的开区间，即 $A_\alpha=\{x\in R\mid \alpha<x\}$. 证明 $\cup\{A_\alpha\mid \alpha\in R\}=R$.

(ii) 设 $I_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，求 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$.

4. 对于任何集类 $\{A_\alpha\}$ 与任一集 A，证明

$$A\cup(\cap A_\alpha)=\cap(A\cup A_\alpha),$$

$$A\cap(\cup A_\alpha)=\cup(A\cap A_\alpha).$$

5. 证明：对任何集 A, B, C，有 $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ 成立. 其中"$\times$"表示 Descartes 乘积.

6. 设 (x, y), (u, v) 是有序对，证明：$(x, y)=(u, v)$ 的充要条件是 $x=u$ 与 $y=v$.

7. 证明：在实数集 R 上定义的关系 $<$，它具有传递性，但没有自反性，也没有对称性.

8. 设 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ 是实数序列. 如果 $x_n-y_n\to 0$，那么定义 $x\sim y$. 证明：$\sim$ 是一个等价关系，并指出含有序列 $(1, 1, \cdots)$ 的等价类.

9. 设 $\sim$ 是集 X 上的一个等价关系. 证明：$E_x=E_y$ 的充要条件是 $x\sim y$，又如 $E_x\neq E_y$，那么 $E_x\cap E_y=\emptyset$.

10. 指出下列关系中哪几个是函数：

(i) $\{(2, 1), (1, 2),$ (王后, 1), (主教, 2), (王后, 3)$\}$

(ii) $\{(z, e^z)\mid z\in C\}$,

(iii) $\{(e^z, z)\mid z\in C\}$.

11. (i) 设 a、$b\in R$，定义 $f(x)=ax+b$. 证明：当且仅当 $a\neq 0$ 时，$f: R\to R$ 是双射的，并绘图说明.

(ii) 设 $a, b, c\in R$, 在 R 上定义 $f(x)=ax^2+bx+c$, 试求 f 为双射的必要充分条件.

12. 设 S 是所有由 0 和 1 两个数字组成的序列的集, 那么 $s\in S$ 表示 $s=(s_1, s_2, \cdots)$, 其中 s_n 或者是 0, 或者是 1. 用反证法证明 S 是不可列的. 即设 S 可列成 $\{s^{(1)}, s^{(2)}, \cdots\}$, 其中 $s^{(1)}=(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \cdots)$, $s^{(2)}=(s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \cdots)$, 等等. 适当改变对角线元素 $s_1^{(1)}, s_2^{(2)}, s_3^{(3)}, \cdots$, 容易构造一个序列 $s\in S$, 使得对一切 $n\in N$, $s\neq s^{(n)}$. 这与假定 S 是可列的矛盾.

从 S 的不可列性推导由所有实数所成的集 R 是不可列的. 作为一个提示,设想把 R 的元素表示成小数.

13. 设 $a<b$, (a, b)是 R 中的开区间. 证明 $(a, b)\sim(0, 1)$. 由此说明,$(0, 1)$与 R 是等势的集,即$(0, 1)\sim R$.

14. 说明 R 中所有无理数的集是不是可列的.

15. 用 $f(x)=x^2$ 定义 $f: R\to R$. 求 $f(\{1, 2\})$和 $f^{-1}(\{1, 4\})$. 并同定理 1(vii)比较.

16. 证明定理 1 的全体.

17. 证明: 当且仅当 f 是单射时,有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

18. (i) 设$\mathscr{A}=\{A, \emptyset\}$, 其中 $A\neq\emptyset$. 对于集的包含关系 $\subset$, $\mathscr{A}$ 是不是全序集?

(ii) 设 $\mathscr{A}$ 是集 $\{1, 2\}$ 的所有子集的族,说明集的包含不是 $\mathscr{A}$ 上的一个全序.

§2 实数与复数

在短短的这一节中,我们汇集了有关数、序列、极限以及级数的一些基本概念, 预计读者已经完全熟悉大多数概念. 我们所希望的是使读者回想起这些基本概念, 而显然不是提供一个初等分析教程.

众所周知,实数系 R 可以从有理数系 Q 构成, 有理数系 Q 又可以从正整数系 N 构成. 这样作虽然有好处,但任务是长的和艰巨的, 通常是采取一个更简单的处理方法, 也就是定义 R 是一个满足上界公理的全序域. 全序域是一个域, 其上定义一个全序关