



学科教育学丛书

主编 田万海



数学教育学

XUEKEJIAOYUXU
CONGSHU

● 浙江教育出版社

G633.6

T58



学科教育学丛书

数学教育学

XUEKEJIAOYUXUECONGSHU ●

主编 田万海

浙江教育出版社

第一章 数学教育的发展

数学教育发展的源头，可以上溯到古代。因为古代中国的“六艺”（礼、乐、射、御、书、数）教育和西方的“七艺”（文法、修辞、逻辑学、算术、几何、天文、音乐）教育中都包含了数学内容。随着社会政治、经济、文化、科学、技术和生产的发展，数学本身也已枝繁叶茂，数学教育呈现出勃勃生机。那么，作为学校教育一个重要组成部分的数学教育，从古到今有哪些发展？为什么会有这样的发展？发展前景又将怎样？本章将对这些问题作一简要的回顾、探讨和展望。

第一节 数学教育发展的历史

数学教育的发展大致可划分为古代（19世纪以前）、近代（19世纪至20世纪50年代）和现代（20世纪50年代以后）三个阶段。在此我们不可能全面回顾世界各国数学教育的发展历程，只能采取重点介绍的办法，以先综述时代背景后分析具体历程，先国外后国内的顺序进行论述。

一、古代的数学教育

古代希腊曾创造了丰富多彩的文化，尤其是它在文学、艺术、哲学、数学等领域的成就，对古罗马和后世的欧洲有着极

为深刻的影响。所以，我们不妨就选择古希腊的数学教育作为研究这一时期国外数学教育发展的一个代表。

在古希腊，直到公元前 6 世纪，它的数学、科学技术相对当时的东方来说，还是落后的。在那里，人们鄙视商业活动和手工业劳动，崇尚哲学和艺术，认为理想的人应该是一个才智见识超众的哲人，教育的任务就是培养这种充满智慧的人。如何培养呢？只有学习文法、修辞、逻辑学、算术、几何、天文、音乐这七艺。

古希腊的学校教育可分为初级和中级两个阶段。初级教育一直持续到 14 岁，数学教学内容主要是一些日常生活中的实用算术。接着四年的中级教育中，有关数学的科目是几何和天文学。这一阶段的数学教学重点已转为训练思维和增长才智，但数学在七艺中的地位仍排在文法、修辞与逻辑学之后。

古希腊数学是在学习了古埃及和古巴比伦的数学的基础上发展起来的，带有浓厚的民族特色。希腊人十分重视理性和美，认为物理世界始终在变，不会有终极结论，只有观念世界才是永恒的。观念不仅不会受到纷繁多变的具体事物的干扰，而且当它被描述和简化为语言符号时，比学习许多个别事物还能起到更有成效和综合的作用。因此，古希腊的数学家强调学习和研究数学不能被具体事物所束缚，应将数学与应用分开，摆脱一贯使用的经验说明方法，把演绎推理作为唯一的数学证明方法，坚持细致、严密的治学风格。这种数学观和治学风格在欧几里得 (Euclid) 的《几何原本》等西方数学教科书中得到了很好的体现，并通过它们对数学产生了极为深远的影响，以至于《几何原本》和尼可玛可 (Nicomachus) 的《算术入门》成为沿用了千余年的权威教材。

中国是一个历史悠久的文明古国，在古代，为实行高度集

权统治，必须树立以皇帝为最高权威的金字塔形的等级观念。长期以来，无论哪个朝代，都把“君为臣纲、父为子纲、夫为妻纲”和“仁、义、礼、智、信”等一套伦理道德作为传统教育的主要内容，所以，最受古代中国人重视的就是道德和礼仪。至于数学，则“自古儒士论天道定律历皆学通之，然可以兼明，不可以专业”，甚至于“后世数则委之商贾贩鬻辈，学士大夫耻言之，皆以为不足学，故传者益鲜”。

中国历代所办学校可分为官学和私学两种。官学是各级官府所办的学校，西周已有。西周的国学是当时官学的一种，分为小学和大学两个阶段。小学以书、数为主，这“数”便是数学，内容大都包涵在《九章算术》中，多半是些结合日常生活和劳动的基本计算。对于大多数学生来说，他们一生中所受的数学教育主要也就是这些启蒙教育，因为大学阶段转而教授“礼”、“乐”、“射”、“御”。可见，官学中教数学是仅为经世致用而已，但在专门传授数学的私学中情况则完全不同。私学是私人所办的学校，多半采用个别教学，教材及学习年限也不固定。在潜心数学学习和研究的私学中，师生完全沉浸在钻研数理的快乐之中，获得了大量具有世界先进水平的数学成果。隋朝之后，虽然建立了国家最高学府——国子寺，并在国子寺里增设了明算学，开创了我国高等数学教育机构，但由于历代统治者对数学教育的兴废无常，这一机构的作用极不稳定。因此，传授数学的私学依然是培养数学人材最主要的基地。

和古希腊数学一样，中国古算学也有着极明显的民族特色。也许是因为当时人们（包括少数的数学家）只看到数学的实用价值而没有发现它的训练价值和教育价值，所以中国古算学发展的目标主要是解决应用问题和提高计算技术。这从上千部遗留下来的中国古代数学著作中可以得到佐证。其中最有代

表性也最有影响的就是《九章算术》，它奠定了以应用和计算见长的中算风格。

《九章算术》是我国最早独立成科的数学专门著作之一。全书采用问题集的形式，按“问”、“答”、“术”的顺序编写。因此，对大多数要用数学但又不想深究算理的人来说，只需学会依“术”行事，保证计算结果正确就可以了。而少数以数学为专业的人则可借助《九章算术》的注书，探究“术”中蕴含着的深奥的算理。我国古代数学家无不研习《九章算术》，可见，它对我国古代数学的教学和研究有着多么深刻的影响。

二、近代的数学教育

进入19世纪，西方国家的科学技术迅速发展，但学校教育依然是传统的人文学科占领着统治地位。于是，古典教育和科学教育之间展开了一场比以往任何时候都更为激烈的斗争。坚持古典教育的人，自诩其教学几门课程便能给予人的心智以一般的训练，并使所得能力能够迁移到后来的一切学习中去，而且，这些课程均由观念构成，与道德培养密切相关。他们攻击科学教育必然会为了包揽一切功利的事项而汗牛充栋，何况，这种科学教育课程是由事实构成的，与道德培养毫不相关。而倡导科学教育的人则强烈要求将近代科学引进学校教育，坚持在学校课程中，自然科学知识应占最重要的地位，应以实用的知识代替那些传统的不切实际的装饰性知识。在这场斗争中，科学教育思想首先在英国战胜了古典教育思想。科学教育的倡导者赫胥黎（M.N. Huxley）认为：“像英国这样一个具有深厚的工商业利益的殖民主义大国，没有良好的物理和化学的教学，就会严重阻碍工商业的发展。不重视科学的教育是极其鼠目寸光的政

策。”^① 斯宾塞 (Spencer) 也认为: 科学的价值是无穷无尽的, 不仅在实用价值上, 而且在训练价值、教育价值上, 远胜于传统的人文学科。他们提出这些观点, 正值国际贸易竞争激化的时候, 所以很快就被英国采纳了。19世纪中叶后, 其他工业大国, 如德国、法国和美国, 也都相继采纳了他们的主张。于是, 以科学为中心的学校课程体系开始建立起来。数学也因其与自然科学密不可分的联系从此在学校教育中占有了重要地位。

进入20世纪以后, 人们发现, 学校课程变得越来越庞杂, 学生简直到了不堪负担的地步。许多人开始反思学校教育的目的究竟是什么? 学校教育又该如何响应工业的发展、教育的普及、教育心理理论的更新? 又一场教育改革运动开始酝酿了。

这一时期, 学校先是重视职业教育, 后又重视生活适应教育, 但总的来说, 数学课程没有被忽视。由于初等、中等教育日益走向普及, 学习数学的学生也随之大量增加, 因此, 当时对数学教育的改革重点是使数学课程变得能够满足不同学生的需要和更容易为学生所掌握。比如, 设置水平不同的数学课程, 综合地处理数学的各科内容, 在教学中强调直观, 等等。

1901年, 在英国学术协会年会上, 近代数学教育改革的倡导者之一——培利 (Perry), 发表了著名的《论数学教学》的演说。他认为, 可以从教学内容和教学原则两方面去改革英国的数学教育。在数学教学内容上, “要从欧几里得《几何原本》的束缚中完全解脱出来; 要充分重视实验几何学; 要重视各种实际测量与近似计算; 要充分利用坐标纸; 应多教些立体几何 (画法几何); 较过去更多地利用几何学知识; 应尽早地

^① J. S. 布鲁巴克: “西方课程的历史发展”, 《教育学文集 课程与教材》(上册), 人民教育出版社, 第60页。

教授微积分概念”^①。相应地,关于数学教学原则,他强调“在儿童们了解事物的根源之前,必须先对那事物有亲近感,并进行观察。即便是简单的事物,与其由教师指出,不如让学生自己去发现”^②。可惜,他的激进的演说并没有被当时保守的英国数学教育界采纳。

这一时期的德国数学教育改革在教材编写方面很有特色。19世纪末,先后出版了用射影的方法统一几何、代数和三角的《初等几何教科书》,以及融合了代数、几何、三角、画法几何的《初等数学教科书》,使几个分支综合起来,互相为用,互相渗透。德国伟大的数学家、国际数学教育委员会第一任主席克莱茵(F.Klein)热心倡导数学教育改革。他的《高等观点下的初等数学》告诫人们:数学教育的改革不能采取保守的、旧式的态度,数学教育工作者的头脑里应始终保持着近代的、新的数学的进步、新教育的进展,来改造初等数学。他还主张:教育必须是用发生的方法,因此,空间的直观、数学上的应用、函数概念是非常必要的。他的改革方案注重让知识的呈现次序符合学生的认识过程,提倡以函数思想为中心组织教学内容,重视数学的应用。经1905年在意大利米兰召开的数学理科教授协会会议的讨论,这一改革方案发展成为著名的“米兰要目”。据此要目,出版了《近代主义数学教科书》。1915年,日本将其译出,用作教材。

在1908年举行的国际数学家大会上,美国的史密斯(Smith)曾向大会提出了和当时美国教师密切相关的一些问题:取消代数与几何分设两科的结果是什么?在同一年级中同时教授这两门课程会怎么样?至今为止在这些问题上有什么可推荐的?欧

①②马忠林编著:《比较数学教育学》,辽宁教育出版社,第76~78页。

几里得几何、微积分及力学的最低标准是什么？中学应把数学的应用及其与纯数学的关系放在什么地位？对那些不打算进大学学习的人与想继续深造的人来说，中学课程的相应属性各是什么？从这些问题中，也许我们可以看出这一阶段国际数学教育改革的主线。

这一历史时期，中国的社会、学校教育也发生了极大的变化。早在明末清初，西方传教士就带来了《几何原本》等数学著作。这种不用筹算，不用珠算，而用笔算的抽象的系统的数学，令中国数学家耳目一新。徐光启非常推崇《几何原本》，他认为这是一本训练思维的好书，“举世无一人不当学”。从那时起，这本书对中国的初等数学教育开始产生重要影响。但清代中叶以后，清政府采取闭关锁国的政策，甚至多次兴起文字狱，使西方数学的传入受到阻碍，数学家只得埋头于传统数学的整理与研究。1840年鸦片战争以后，中国的大门被打开，帝国主义列强迫使清政府签订了一系列丧权辱国的不平等条约，中国社会开始沦为半殖民地半封建社会。当时，来华的西方传教士不再满足于翻译介绍西方数学，他们在中国兴办教会学校，编写宗教用书和数理化教科书。用美国传教士狄考文(C. W. Mateer)^①的话说，就是“如果我们要取儒学的地位而代之，我们就要准备好自己的人们，用基督教和科学来教育他们，使他们能胜过中国的旧士大夫，因而取得旧士大夫阶级所占的统治地位”。与此同时，清朝统治者中的有识之士也注意到了办学之重要。林则徐提出的“师夷长技以制夷”的主张，得到许多朝野人士的响应。闽浙总督和船政大臣联名启奏皇帝：“水师之强弱，以炮船为宗；炮船之巧拙，以算学为本。”自此，两千

^①狄考文曾任北京同文馆和京师大学堂的总教习，1890年西洋传教士在上海成立中国教育会，他是首任会长。

多年来教学内容几乎没有任何变化的中国学校教育传统受到了巨大的冲击，数学课程在新式学校教育中占有了主要地位。

这一时期我国的数学教育较多地受到美国以及日本、英国的影响。教学内容与其他国家类似，有算术、代数、平面几何、立体几何、三角和簿记。教科书的发展则经历了一个逐渐提高的过程。从教材所用的数学符号和排版格式看，弃先进的西方数学符号不用，重新创造一些汉字符号，排版也沿袭中文的习惯，从右向左，自上而下，这被戏称为“套上中国马夹的西算”。进入20世纪以后，教材的形式已完全西化。再从教材的选用来看，先是以翻译美国传教士编写的水平一般的课本为主，后来发展到以翻译英、日、美等国质量较高的课本为主，以国人自编的课本为辅，到民国初年终于发展到以自编的课本为主，以翻译的课本为辅。20年代，混合算学也开始在我国流行，但30年代以后，又恢复了分别设科的做法。一些国外的分科教材，如《范氏大代数》、《三S平面几何》、《斯、盖、尼三氏解析几何》逐渐流行，国人自编教科书虽也有一定影响，但使用面缩小了。

三、现代的数学教育

20世纪初克莱茵和培利播下的改革种子，直到20世纪50年代才盼来了生长的好气候。当时，经过二次世界大战，各国对科学技术在现代战争中的巨大作用有了深刻的认识。原苏联第一颗人造卫星上天，又一次敲响了战鼓，形成了社会各界支持发展科学教育和数学教育的风尚，这为数学教育改革创造了一个极为有利的外部环境。与此同时，数学与教育学习理论取得了长足的进步，更为数学教育改革指明了方向。在数学方面，首先是应用数学的领域迅速扩大，包括了战争中的通讯、策略制

订，还有生物统计学、计量经济学、控制论等等。这令当时的数学家感到非常的自豪和欢欣鼓舞，他们极力主张国际数学教育委员会(ICMI)调查数学及数学家在当代生活中的作用，不论是智力的、科学的、社会的或是实际应用性质的问题，任何方面都不应忽视。其次是30年代法国的布尔巴基(Bourbaki)小组致力于把全部数学建筑在各种结构的基础上：从最无结构性的数学概念即集合开始，逐步通过各种公理系的引入，使它成为各种不同层次的结构，这样就把整个数学学科建成似一座层次分明、体系完整的大厦。从此，集合论、公理化方法成了各门现代数学的基础。数学这两方面的新发展在当时的初等数学教育中没有任何反映，自然是不能令人满意的。在教育学习理论方面，主要是对儿童的智力发展和学习有了新的了解，一些新理论对传统的讲授、操练、记忆和模仿提出了质疑。其中，尤以布鲁纳(J. S. Brunner)在其《教育过程》中阐述的结构课程论对数学教育改革的指导作用为最大。布鲁纳认为，无论教什么学科，教授和学习该学科的基本结构最重要；学习应该是发现的，不是习得的；课程应由该学科的专家、教师和心理学家共同设计。这些观点在60年代的数学教育现代化运动中得到了较好的贯彻。

1951年，美国以依利诺斯大学为中心，开始了数学教育改革的实验。1958年，又成立了由国家资助的“学校数学研究小组”(SMRG)。通过1959、1960、1962年的几次国际会议，在60年代一场从美国兴起的“新数学”运动终于波及到世界许多国家。

虽然各国改革的实际情况不尽相同，但在改革的一些基本观点上是一致的。比如，改革者都认为，当前的数学课程严重地落后于社会生产、科学技术和数学本身的发展，学生的数学

学习偏重于记忆和模仿，缺乏对数学的理解，数学课程内容之间缺乏整体联系，因此，需要采取有力措施提高学生的数学素养。这些措施就是要更加强调数学所特有的从公理出发进行演绎推理的方法；导出基本的数学结构，使学生对数学本身有更深刻的理解；削减甚至取消欧几里得几何，以增加新的数学内容。具体地说，就是要尽早渗透集合的概念，然后以集合、关系、映射、运算律、群、环、域、向量空间的代数结构为骨架，把中学数学统一为一个整体；在代数中，强调交换律、结合律和分配律；在几何中，强调对称与变换。数学内容采用螺旋式安排，逐步渗透概率统计、程序设计、极限、矩阵、向量、逻辑等新内容。

从“新数学”倡导者的这些改革措施来看，有许多是合理的，但是改革者在实际执行中却走过了头。比如，英国的 SMP 教材，编写者试图以结构主义观点综合处理数学，打破算术、代数、几何、三角各科的界限，但其课本给人的印象却是知识缺乏系统性，不易抓住线索。受布尔巴基学派的影响，法国试图在中学阶段推行形式的现代化，于是，花了很多时间去给出十分抽象的、复杂的定义，引进大量的符号，以致有人称当时的数学课简直成了语法修辞课。这种种走过头的做法，导致大多数学生既难于理解和掌握现代数学，又未能从学习中获得实际工作中有用的知识，甚至连基本运算都没过关，于是引起了家长、社会的强烈不满，反对“新数学”的呼声越来越高。

70年代以后，各国的数学教育现代化运动都开始降温，进入了调整策略、总结经验教训的稳步改革阶段。新的改革者们开始重视从“新数学”运动一开始就不断传来的数学界内部的反对意见。虽然各国经过调整，都在向后“倒退”，但并不是重蹈60年代改革前的老路。大多数国家还是保留了映射、概率统

计、向量、矩阵、微积分、计算机的使用等的初步知识，但对集合、数理逻辑、数学结构、公理化等严谨的抽象理论和符号不像过去那样过分强调，而是注重在教学中渗透这些思想。对于受“新数学”运动冲击最大的几何，大多数国家采取了让直观几何、变换几何和经过精简的欧氏几何共存的折衷措施。教材的编排不再强求混合，但注意加强各科内容之间的联系。另外，针对传统数学和“新数学”都忽视数学的应用这一弊端，80年代，美国又提出了重视问题求解的口号，并得到了其他国家的响应。

新中国建立以来，我国的数学教育也经历了几次变革。第一次是全面学习原苏联，参照他们课本编写了一套注重系统性的数学教材，但数学教学内容的深度和广度有所降低。第二次是教育大革命，1958年那段时间，许多数学家、教育家、大学师生、广大中学教师就中学数学教育的目的和任务、大纲、教材及课程的现代化问题展开了热烈的讨论，提出了很多意见和方案。但总的来说，这些方案要求过高，脱离实际。1961年开始实行“调整、巩固、充实、提高”的方针，这是第三次变革。当时颁布的数学教学大纲，对数学教学的目的、内容和原则等都作了比较全面的阐述。据此，人民教育出版社编写的教材，增加了平面解析几何和概率初步，比较适合我国的实际。一般都认为这一时期的中学数学教学质量有了稳步的提高，达到了较高的水平。第四次变革是“文化大革命”，数学教育因过于强调联系实际而流于形式，大大削弱了基础知识的教学和基本技能的训练，使我国数学教育质量大幅度下降。第五次是“文革”后的拨乱反正时期，人们普遍重视了数学教育。考虑到教材要合乎现代科学技术的要求，1978年，教育部颁布的数学教学大纲增加了集合、对应、微积分与概率统计初步等内容。但由于

要求过高，后又作了几次调整。当前，我国数学教育改革的重点放在更好地适应九年制义务教育上，正在编写若干套层次不同的义务教育教材，这在我国是一次重大的改革。

怎样使学生由不知变为知，这是数学教育工作者考虑得最多的一个问题。随着数学教育的深入发展，人们已经逐步认识到，这个问题与“学习是怎样发生的”、“究竟什么是数学”、“数学教育要追求什么样的目的”及“社会是否重视知识”等问题都有着不可分割的联系。于是，对教学的研究已冲破“某个课题如何讲”的圈圈，在各种数学观、学习观、教育观，社会观的指导下，数学教育出现了许多新的教学方法。现代教学方法已形成以下几个鲜明的特点：以发展学生的智能为出发点，以调动学生学习的积极性和充分发挥教师主导作用相结合为基本特征，注重对学生学习的研究，重视对学生进行情感教育。

第二节 数学教育发展的动因

从上一节可以看到，社会的进步始终是数学教育发展最根本的一个因素。当然，社会进步体现在许多方面，比如，经济的发展、科学的繁荣、社会成员适应社会与创造社会能力的提高等。在这些动因中，社会提出的新要求、数学的新发展、教育学习的新理论、国际交流的新启示是最为主要的。虽然每次数学教育改革往往都是在几个因素的综合作用下发生的，但为了更好地阐明上述主要因素的作用，还是有必要逐一加以分析。

一、社会提出的新要求

社会进步的必要条件之一就是不断提高其成员适应社会

并创造社会的能力，即提高其成员社会化的程度，而学校正是这副重担的主要承担者。因此，每当社会对其成员的数学素养提出新要求时，数学教育就必然要作相应的改革。

从社会发展的历史来看，社会在不同时期对其成员的数学素养所提出的要求是不同的。最早，只要求能应付日常生活和劳动中的基本计算。后来，随着教育的普及程度的提高，除了要学习实用的数学外，还要学习一些理论的数学，以培养准确的思想和严密的习惯。至于学生将来是否能将这些理论的数学服务于社会，或通过自学来适应变化的社会，社会和学校并不很关心。时至今日，因为计算机、计算器的日益普及，初等、中等教育的日益普及，以往那些很实用的数学可能只需按一下按钮就可马上解决，所以，社会对其成员的要求转而偏向数学思维，要求每个青年能运用数学思想服务于社会。比如，作为企业的决策者，要能科学地处理生产经营问题，作为社会的一个成员，要能理解科学的人口观、资源观和环境观，要能读懂报刊上各种定量分析的文章。在未来社会里，也许要做到能自觉地运用数学头脑去思考问题才称得上具备了社会所要求的良好数学素养。

近年来，学校数学教育努力改变以往一味追求基础知识和基本运算技能训练的做法，开始强调培养数学思维，采取了一系列改革措施。例如，重视问题求解、应用和模型化，重视渗透重要的数学思想，增加估计和近似、数据处理与统计、运筹与决策等内容，强调把数学教学看作数学活动的教学，这些都与数学教育工作者试图满足社会的新要求有着密切的联系。

二、数学的新发展

随着数学研究的不断深入，新的数学思想方法、新的数学

分支的出现，数学研究和数学应用的基础、重点、方法也在改变。这种改变必然要影响到大学和中学的数学教育。比如，欧氏几何自问世到18世纪，一直被公认为几何学的标准教科书，在中学数学中占有至高无上的地位。但进入19世纪以后，随着双曲几何学、椭圆几何学等非欧几何学的相继问世，克莱茵的厄兰格(Erlanger)纲领的诞生，以及希尔伯特(Hilbert)在近代公理法方面所做的重要工作，20世纪几何学研究的重点和方法发生了根本的变化。数学的这一新发展也极大地动摇了欧氏几何在学校中的地位，使其在“新数学”运动中成为众矢之的，而且至今仍只在一定程度上得到恢复。又如，自从19世纪末叶康托尔(Cantor)创立集合论以来，现在集合论已成为现代数学各个分支的共同基础，它对当前中学数学教育的影响虽不像当年“新数学”运动那样势不可挡，但许多国家还是在中学数学教科书中注意渗透集合思想，并适当地使用简洁、明了、准确的集合论语言。

说到数学的新发展，不能不提到计算机和计算器，因为，它们的出现很大程度上改变了数学的研究方法。过去，为了要获得足够多的原始数据，以便有所发现，数学家们常常不得不埋头于大量枯燥乏味的计算。但现在，计算机(器)承担了这项繁重的任务，使数学家可以有更多的时间和精力从事创造性的活动。计算机(器)不仅解放了数学家，也促成了学校数学教育的改进。过去，“让学生像数学家那样去发现数学、创造数学”似乎只是个理想，但今天，计算机(器)为学生进行探索性学习创造了良好的条件。比如学习极限概念，要让学生自己发现或创造，需要有直观的体验。要得到这种体验，繁杂的计算又不可避免，这令教师进退两难。自有了计算器后，几乎所有学生都能毫不费力地从具体的数字中获得直观的体验。教

师可先让学生借助计算器计算： $n=10, 100, 1000, 10000, \dots$ 时 $\sqrt[n]{n}$ 的值，再问到 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的极限存在吗？是多少？多大的 n 以后， $\sqrt[n]{n}$ 的值小于1.0001？小于1.00001？通过这类计算，大多数初学者都能掌握极限的初步概念，而所需的基础仅是会操作计算器和一点点的数学基本知识。这样，计算器也为进行多层次的数学教育提供了可能。目前最先进的计算器除具有通常计算功能外，还能在其屏幕上显示图像，能按照需要调整“取景窗”，以放大或缩小函数的图像，能显示图像与坐标轴交点的坐标，能同时显示多个函数的图像，等等。这就极大地方便了函数教学，并密切了代数与几何之间的联系。美国芝加哥大学编写的一套中学数学教科书（UCSMP）中就有大量借助这种计算器学习的内容，如平移、奇函数、偶函数、找对称点和对称轴等。用该教材主编的话说，计算器和计算机“使一部分数学显得过时了，使一部分数学变得更重要了，而给另一部分数学的教学带来了新的可能性”。

三、教育学习的新理论

作为指导学校教育工作的教育学习理论的新发展，当然要反映到数学教育中来。例如，1971年，布鲁纳在他的《教育过程修正》中回顾了1959年的教育思想时说：“当时流行的观点是，假若你理解了知识的结构，那么据此你就能独立地在这一知识领域深入下去。为了知道大自然，你不需要去接触大自然中的一切，而只要理解一些深刻的原理，你就能推断出所需的特殊。”这种教和学的理论正是60年代“新数学”运动的一个基本出发点。又如，关于教师如何运用惩罚与奖励的问题，在过去，无论是学校，还是家庭、农场或是监狱，人们对犯错误者常动用严厉的体罚，因为他们相信，这种痛苦的刺激会减少