吉教社
奥林匹克丛书

SHUXUE OLYMPIC COMPETITION

数学奥林匹克

小学六年级

前　言

为了扩大广大学生的知识面，增加知识储备，激发学生学习的兴趣，有效地培养科学的思维方法和综合解题能力，我们编写组的全体成员经过一年多的艰苦工作，终于使这套丛书在“春绣人间千里绿肥红壮艳，歌传广宇万家书灿墨浓香”的氛围中和广大的热心读者见面了。

本丛书旨在开启学生的心扉，震撼学生的心灵，挖掘深层信息，架设由已知、经可知、达未知的桥梁，运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”，使学生真正体味“纸上得来终觉浅，心中悟出方知深”的真谛。

致天下之治者在人才，成天下之才者在教化。奥林匹克丛书是一种把过去和现在联系起来的多媒体。本丛书在如林的教辅材料中，博采众家之长，自成完整的知识体系。是望子成龙、望女成凤的家长的理想选择，是莘莘学子的好帮手。“诗也，书也，文也，无非心其得也，知之，好之，牙之，当从学而习之”。

寸有所长，尺有所短，由于我们水平有限，书中不足之处在所难免，敬请各位不吝赐教。

目 录

第一章　最大与最小极值问题

知识要点

这是一类很古老而且很有趣味的问题,几百年来,不少数学爱好者都迷于这类问题,并深入钻研它。同学们,你也想试试吗?

在天平的左边放砝码,右边放物体称重量,最少应准备多少个砝码就能称出1到60克之间的整克数的物体重量?这几个砝码分别是多少克?

注意:问题是最少应准备多少个砝码?怎样准备才能尽可能少呢?

首先必须有1克的砝码,因为称量的起点是1克。

第二个砝码应该是$1+1=2$克,用1、2克两个砝码可称出1、2、3克物体的重量。

第三个砝码应该是$3+1=4$克。

用1、2、4克三个砝码可称出1至7克物体的重量。

第四个砝码应该是$7+1=8$克,用1、2、4、8四个砝码可称出1至15克物体的重量。

第五个砝码的重量是多少?用这些砝码可称出的重量是多少?还需要几个多重的砝码呢?请同学们自己想一想。

通过分析,可以得出,少于六个砝码是不行的。这六个砝码的重量分别是1、2、4、8、16、32克。

上面这道题是这类问题中很有代表性的一道题。我们小学数学中也常出现“最多”、“最少”、“最大”、“最小”、“最长”、“最短”之类的问题。这类问题可以称为极值问题。这些想法在生活中是很有用处的。在这一章里,我们来探讨这类问题的某些规律。解这类问题的关键是进行比较分析、探索、尝试,最后归纳出所有可能的情况中的极端情况是哪一种。

典型例题解析

例1 五名同学共做了78道数学题，问其中做题最多的一名同学不少于多少道题？其中做题最少的一名同学不多于多少道题？

解题剖析 ⇨ 关键是看平均数，最多和最少的都以此为准作比较。$78=15\times5+3$，假如做题最多的同学做题少于16道题，别的同学又不能超过他，就达不到78道题，所以做题最少的同学不能多于15道题。

答： 做题最多的同学不能少于16道题，做题最少的同学不能多于15道题。

例2 从1至9这九个数中选出八个数，分别填在下面八个圆圈里，使算式的结果尽可能大。

$$[○\div○\times(○+○)]-(○\times○+○-○)=$$

你的计算结果是：__________

解题剖析 ⇨ 为了研究方便，我们用字母代替圆圈。

$$[A\div B\times(C+D)]-(E\times F+G-H)=$$

可以看出，为了使算式的结果尽可能大，其中A、C、D、H必须尽可能大，B、E、F、G尽可能小，而且必须A最大和B最小，这就确定了$A=9$和$B=1$。由于C与D相加后还要与$A\div B$的商相乘，它们的乘积可以使答案增大很多，而H不与别的数相乘，因此其余的大数应首先分配给C与D，于是得$C=8$、$D=7$（或$C=7$，$D=8$）及$H=6$。E与F也要相乘，把小数先分配给它们，于是得$E=2$，$F=3$（或$E=3$，$F=2$），后可得$G=4$，将它们填入算式就是：

$$[9\div1\times(8+7)]-(2\times3+4-6)=131$$

答： 计算结果是131。

例 3 能被2整除，有约数 3，又是 51 的倍数的最小四位数是多少？最大四位数是多少？

解题剖析 ⇨ 要求的四位数是 51 的倍数，$51=3\times17$，则这个四位数必有约数 3；又因这个四位数能被 2 整除，所以这个四位数必是 102 的倍数，满足条件的最小四位数是 1020；最大四位数是 9996。

例 4 十个同样的直角三角形的卡片，拼成了如图1－1的平面图形，这种三角形的卡片的三个角中最小的角是多少度？

解题剖析 ⇨ 图 1－1 中，每个直角三角形，除直角外，还有两个锐角一大一小，汇集在中心的是 8 个小角和 2 个大角。

因为，一个大角加一个小角等于 90°，而在中心的 10 个角度之和是 360°，即 8 个小角 + 2 个大角 = 360°。所以，

6 个小角 + 2(1 个大角 + 1 个小角) = 360°

6 个小角 + 180° = 360°

6 个小角 = 180°

1 个小角 = 30°

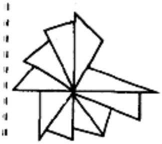


图 1－1

例 5 把14分成两个自然数，怎样分才能使这两个数的乘积最大？

解题剖析

通过这道题我们来探求两个数的和一定，怎样分这两个数才能使乘积最大的规律，让我们从试验中来寻找规律。

$1+13=14\rightarrow 1\times 13=13$

$2+12=14\rightarrow 2\times 12=24$

$3+11=14\rightarrow 3\times 11=33$

$4+10=14\rightarrow 4\times 10=40$

$5+9=14\rightarrow 5\times 9=45$

$6+8=14\rightarrow 6\times 8=48$

$7+7=14\rightarrow 7\times 7=49$

$8+6=14\rightarrow 8\times 6=48$

……

$13+1=14\rightarrow 13\times 1=13$

可以看出把 14 分成 7 和 7 时，乘积最大。

想一想：把 15 分成两个数，怎样分才能使它们的乘积最大？

（注意：这两个数没有限制必须是自然数。）

通过以上的研究，我们可以发现：一个数由小到大取值，另一个数由大到小取值时，两个数的积先由小到大，又由大到小，中间是最大的，也就是两个数越接近，它们的乘积就越大，两个数相等时，乘积最大。

答： 把 14 分成 7 和 7 时，乘积最大。

例 6 有甲、乙、丙三种溶液，分别重 $4\frac{1}{6}$ 千克、$3\frac{3}{4}$ 千克和 $2\frac{2}{9}$ 千克，现要分别装入小瓶中，每个小瓶装入液体的重量相同，并且无剩余，问：最

少要装多少瓶？每瓶装多少千克？

解题剖析 ⇨ 题中指出要分别装入小瓶中，每个小瓶装入液体的重量相同，并且无剩余，这个条件说明要求出三种液体重量的公约数。而最少要装多少瓶，就是说每瓶最多装多少液体，它与前面条件相结合，就是要求三种液体重量的最大公约数，求出最大公约数即可求出最少要装多少瓶。

解 ⇨ 因为甲、乙、丙三种溶液分别重 $4\frac{1}{6}$ 千克、$3\frac{3}{4}$ 千克、$2\frac{2}{9}$ 千克，

$4\frac{1}{6}=\frac{25}{6}, 3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}, 2\frac{2}{9}=\frac{20}{9}$

它们分母的最小公倍数是 36，分子的最大公约数是 5，所以这三个分数的最大公约数是$\frac{5}{36}$。

$\frac{25}{6}\div\frac{5}{36}=30, \frac{15}{4}\div\frac{5}{36}=27, \frac{20}{9}\div\frac{5}{36}=16$

$30+27+16=73$

答： 最少要装 73 瓶，每瓶要装$\frac{5}{36}$千克。

例 7 用40米长的铁丝，做一个长、宽、高均为自然数的长方体（可以把铁丝折断），问如何安排这个长方体的长、宽、高才能使它的体积最大？最大体积是多少？

解题剖析 ⇨

由题意可知:40 米长的铁丝构成长方体的十二条棱,有四条棱长都等于长,另一组四条棱长等于宽,还有一组四条棱长等于高,则长 + 宽 + 高 = 40 ÷ 4 = 10。这个问题就转化为“已知三个自然数的和是一个定值,求在什么情况下,它们的和最大”的问题。我们知道这一问题的解是:当这三个自然数最接近时,它们的积最大,当长、宽、高分别为 4、3、3 时它们的体积最大。

解 ⇨

由题意得:长 + 宽 + 高 = 40 ÷ 4 = 10

当长、宽、高取 4、3、3 这组数时,这个长方体的体积最大,它的最大体积为 36 立方单位。

例 8 七个小队共种树100棵,各小队种的棵数皆不相同,其中种树最多的小队种了 18 棵,问种树最少的小队至少种了多少棵?

解题剖析 ⇨

这道题是让我们求出种树最少的小队种的棵数要尽可能的少,也就是少到多少棵不能再少了。因为已知种树最多的小队种了 18 棵树,植树的总数是 100 棵,为了让种树最少的小队尽可能的多,还有一个重要的条件:各小队种的棵数皆不相同。那么从 18 开始,种树比较多的六个小队种树的情况是 18,17,16,15,14,13 所以种树最少的小队种树的棵数是:

$100-(18+17+16+15+14+13)=100-93=7$ (棵)

答：种树最少的小队至少种了 7 棵。

例 9 把1－9这九个数，分别填在图 1－2 中九个小三角形中，要求每条边上的五个小三角形内所写数的和相等，这个和的最小值是多少？

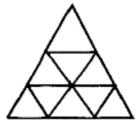


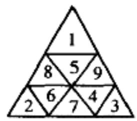
图 1－2

解题剖析 ⇨

依题意，由图 1－2 可知，每一边中间那个小三角形中填写的数字只用一次，其余的小三角形中填写的数字均用二次，所以处于每边中间的那三个小三角形中，必填写 7、8、9 三个数，这样填写后的所有数字之和为：

$$2\times(1+2+3+4+5+6)+7+8+9$$
$$=2\times21+24=66$$

所以每条边上的五个小三角形内所填写的数字和的最小值为 $66\div3=22$，经调整，可填入的数如图所示。



竞赛训练

1. 五个连续自然数的和是 300，其中最大的那个数是多少？

2. 一把钥匙只能开一把锁，现在有 4 把钥匙和 4 把锁，但不知哪把钥匙开哪把锁，最多要试几次才能打开所有的锁？

3. 用一根长 16 米的铁丝围成一个长方形，长、宽分别等于多少米时其面积最大，最大面积为多少平方米？

4. 小虎有 8 分、1 角和 2 角的邮票，总值为 1 元 2 角 2 分，那么他至少有多少张邮票？

5. 用天平称 1—40 克的物品，至少需要多少个分别是多重的砝码？

6. 一个圆圆的西瓜切三刀，吃完后最多剩下多少块瓜皮？

7. 一个直角三角形的两直角边之和为 24 厘米，问如何安排两条直角边的长，可使三角形有最大面积？

8. 把 14 分成几个自然数的和，再求出这些数的乘积，要使得到的乘积尽可能大，问这个乘积是几？

9. 把 10 个苹果分成三堆，每堆至少一个则有多少种不同的分法？

10. 把 135 个苹果分成若干份，任意两份的苹果数都不相等，最多可分成多少份？

11. 27 只乒乓球中有一只是次品，次品较正品轻些，现在有一天平，最少称几次一定能把次品找到？

12. 用一只平底锅煎饼，每次能同时放两个饼，如果煎一个饼需要 2 分钟(假定正反面各需 1 分钟)，则煎 m 个饼至少需多少分钟？

13. 把 100 写成不同的自然数之和，这些数中最多有多少个偶数？最少有多少个偶数？

14. 120 名少先队员选举大队长，有甲、乙、丙三个候选人，每个少先队员只能选他们之中一个人，不能弃权，若前 100 票中，甲得了 45 票，乙得了 35 票，甲要当选至少还需要多少张选票？

15. 一箱玻璃弹子若干颗(不多于 1000 颗)，如果按 2 颗一次或 3 颗一次，或 4 颗一次，或 5 颗一次，或 6 颗一次取出时，最后箱子里总还剩下一颗；如果按 7 颗一次取出时，箱子里就一颗也不剩。箱子中原来最多有玻璃弹子多少颗？

16. 有红球、黄球、白球各一堆(每堆数量很多)，每个红球重 3 克，每个黄球重 5 克，每个白球重 7 克，取出 130 克的球，颜色不限，如何取才能使取出的球的数目最少？

17. A、B 两个村子中间隔了一条小河，现在要在小河上架一座桥使它垂直于河岸，请你在河两岸选择合适的架桥地点，使 A、B 两村之间路程最短。

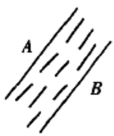


图 1-3

参考答案

1. 因为中间一数是五个连续自然数的平均数，所以

$300\div5=60$,那么最大的那个数是 $60+2=62$。

2. 从最不巧的情况考虑,开第一把锁时前三把钥匙均未打开,当然第四把钥匙就可打开第一把锁,开第二把锁时,同样道理最多试三次,开第三把锁时,最多试两次,开第四把锁时,只用一次即可。

所以最多试 $4+3+2+1=10$(次)。

3. 依据"当两个数的和一定时,则这两个数相等时,它们的积最大。"因为长 + 宽 $=16\div2=8$,所以当长 = 宽 = 4 米时,面积最大,最大面积为 $4\times4=16$(平方米)。

4. 面值大的张数应尽可能多,因为总面值的个数是 2,可定 8 分邮票的张数。

因为 $8\times4=32$ 或 $8\times9=72$,

所以,当然应取张数少的 4。

因为 $122-32=90=20\times4+10$,

即小虎最少有 4 张 8 分、1 张 1 角、4 张 2 角共 9 张邮票。

5. 如果砝码只能放在天平一端,需六个砝码,它们分别为 1、2、4、8、16、32 克,如果砝码能放在天平的两端,只需四个砝码,分别是 1、3、9 和 27 克。

6. 沿互相垂直的三个方向切三刀,吃完瓜后,最多剩下 8 块瓜皮。

7. 两直角边各为 12 厘米时,直角三角形面积最大。

8. 要想把 14 拆成几个自然数且乘积最大,拆的个数要尽可能多且不含 1;其次拆成的数不宜大于 4,例如 5 可再拆成 2 和 3,而 $2\times3>5$,因此拆成的数大于 4 的应尽量再拆;再有拆成的数 2 的个数不宜多于 2 个,若多于 2 个,比如 3 个 2,因为 $2+2+2=6$,而 $6=3+3$,$3\times3>2+2+2$,因此应尽量多拆出 3 来,这样可将 14 拆成 4 个 3 和一个 2,即 $14=3+3+3+3+2$。

此时的最大乘积为 $3\times3\times3\times3\times2=162$。

9. 有 8 种不同的分法,分别是:

(1、1、8),(1、2、7),(1、3、6),(1、4、5)

(2、2、6),(2、3、5),(2、4、4),(3、3、4)

10. 尽可能使每份的苹果数少，故可分成：1，2，3，……，n

当 $n=16$ 时，需要的苹果数：$1+2+3+\cdots+n$

$$=(1+16)\times16\div2$$

$$=136>135$$

所以最多只能分成 15 份。

11. 将 27 只乒乓球分成三堆，每堆 9 个，第一次将天平两端各放 9 个乒乓球，可以判断次品在哪一堆上，再将此堆分成三份，每份三个，将其中两份放在天平上，可判断出次品在哪一份中，再将这份中的二个乒乓球放在天平上，即可得知次品是哪个球。所以，至少要称三次。

12. $m=1$ 或 2 时，需要 2 分钟，当 $m\geqslant3$ 时，需要 m 分钟。

13. 最多可有 9 个不同的偶数。理由是，如果用了 10 个不同的偶数，那么它们的和最小为 $2+4+6+\cdots+20=110>100$，所以至多用 9 个不同的偶数。另一方面用 9 个不同的偶数与另外两个不同的奇数如 2、4、6、8、10、12、14、16、18，1 和 9(或 3 和 7)的和恰是 100，可见最多用 9 个不同的偶数，最少用 0 个偶数，因为事实上 $1+3+5+\cdots+19=100$，可见不包含偶数的不同的 10 个自然数之和也能是 100。

14. 前 100 张选票显示结果，能当选的仅为甲、丙二人。从最不利的情况考虑，甲得剩余 20 张选票中 5 张，丙得其中 15 张，则二人得的选票数均为 50 张，所以甲要当选，至少还需 6 张选票。

15. 根据题意按 2，3，4，5，6 颗分别一次取出时，箱子里还剩一颗，也就是说颗数应比这几个数的公倍数多 1，而这几个数的最小公倍数是 60，所以可用“$60\times k+1$”($\leqslant1000$)来表示总颗数，这样 $k<17$，又根据 7 颗一次取出时，没有剩余，可知 $60\times k+1$ 能被 7 整除。

当 $k=5$ 时，$60\times k+1=301<1000$ 能被 7 整除，容易知道：

当 $k=5+7=12$，$k=5+7\times2=19$ 时，

$60\times k+1$ 也能被 7 整除。

但当 $k=19$ 时，大于 17 不合题意，所以 $k=12$，即 $60\times k+1=721$。

因此，箱子里原来最多有玻璃弹子 721 颗。

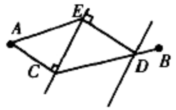
16. 因为白球最重，所以要使取出的总球数最少，应尽量多取白球，

而白球最多取 18 个,这是因为:

$126 = 18 \times 7 < 130 < 19 \times 7 = 133$

如果取 18 个白球,还差 $130 - 126 = 4$(克),这时没有 4 克重的球。如果取 17 个白球:$17 \times 7 = 119$,还差 $130 - 119 = 11$ 克,这时只要取一个黄球(5 克),2 个红球($3 \times 2 = 6$ 克)即可。可见最少取球 $17 + 1 + 2 = 20$(个),其中红球 2 个、黄球 1 个、白球 17 个。

17. 过 A 点作河岸的垂线,在垂线上截取 AC 的长为河宽,连结 B、C 交河岸于 D 点,作 DE 垂直于河岸,交对岸于 E 点,D、E 两点就是使两村行程最短的架桥地点,即两村的最短路程是 $AE + ED + DB$。如图。



第二章　最大公约与最小公倍

知识要点

一位老人,有三个孩子,都已工作,老大每隔3天休息一天,老二每隔7天休息一天,老三每隔9天休息一天,一次三个孩子都用休息日看望老人,恰好遇到一起,老人非常高兴,于是老人说:你们还都用休息日一同来看我一次。

同学们帮助算算,这样的时间最少还要经过多少天?

这实际是求3,7,9这三个数的最小公倍数问题。本章主要内容是公倍数与公约数问题。

许多具有周期性的问题,与整除有关的问题,往往需要用公约数、公倍数,甚至用最大公约数、最小公倍数的理论和方法去分析求解。我们把这类问题称为公约数与公倍数问题。

解这类问题,一般需要先分析题意,看看究竟是与公约数还是与公倍数有关,有什么具体关系。然后再按条件求出结果来。

典型例题解析

例1　把一张长240厘米、宽140厘米的薄铁,截成相等的最大正方形,边长是多少厘米?至少能裁多少块?

解 ⇨

为求正方形的边长,需要能同时整除240与140的数,故应是:(240,140) = 20(厘米)

顺长截,可截成 240 ÷ 20 = 12(块)

顺宽截,可截成 140 ÷ 20 = 7(块)

共可以裁成最大正方形块数:12 × 7 = 84(块)

答:最大正方形的边长是20厘米,至少能裁成84块。

例 2 甲、乙、丙三轮船都来往于 A、B 两港间，每来往一趟，甲要6天，乙要 8 天，丙要 10 天，此三轮船同日同时从 A 港出发后，每两轮船相遇最少要几天？三艘船相遇最少要几天？

解 ⇨

显然在日期的最小公倍数时，即可相遇，故有：

甲、乙轮船相遇的最少天数是：$(6,8)=24$（天）

乙、丙轮船相遇的最少天数是：$(8,10)=40$（天）

甲、丙轮船相遇的最少天数是：$(6,10)=30$（天）

甲、乙、丙三只轮船相遇的最少天数是：$(6,8,10)=120$（天）

答：甲、乙轮船相遇最少天数是 24 天，乙、丙轮船相遇最少天数是 40 天，甲、丙相遇最少天数是 30 天，甲、乙、丙三只轮船相遇最少天数是 120 天。

例 3 两个数的最大公约数是29，最小公倍数是 696，求这两个数。

解 ⇨

(1)两个数与其最大公约数、最小公倍数的关系是最小公倍数除以最大公约数，得出两个互质数商的乘积：

$696\div 29=24$

(2)把 24 分解成两个互质数的乘积：

① $24=24\times 1$

② $24=8\times 3$

(3)用最大公约数 29，分别去乘每组一对的互质因数所得二数便是所求：

①$24\times 29=696$　　$1\times 29=29$

②$8\times 29=232$　　$3\times 29=87$

答：这两个数是 696 和 29 或是 232 和 87。

例 4 有一个电子钟，每走 9 分钟亮一次灯，每到整点响一次音乐，

中午12点整，电子钟响了音乐又亮了灯，下一次既亮灯又响音乐是几点钟？

解题剖析 ⇨ 因为每到整点时，就要响一次音乐，这说明电子钟的分针走了60分钟。每9分钟亮一次灯，说明分针走了9分钟，下次既响音乐又亮灯的时间应是9和60的最小公倍数所表示的时间。

解 ⇨

$[9,60]=180$

$180\div 60=3$（小时）　$12+3=15$（点）

例5　a 和 b 的最大公约数是15，最小公倍数是180，求 a 和 b 各是几？

解题剖析 ⇨ 根据最大公约数和最小公倍数的关系可知，最小公倍数与最大公约数的商，就是 a 和 b 分别除以最大公约数后所得到的两个商的乘积，再根据 $a=mq$，$b=mp$，只要把两个商的乘积再分解成为两个互质的数，再分别乘以最大公约数，就可以求出 a 和 b 各是多少。

解 ⇨

$180\div 15=12$　　$12=3\times 4$　　$12=1\times 12$

$3\times 15=45$　　$4\times 15=60$

$1\times 15=15$　　$12\times 15=180$

所以 a 和 b 可能是45和60，也可能是15和180。

竞赛训练

1．有三根钢丝，第一根长18米，第二根长30米，第三根长66米，现