

目 录

前言

本书主要符号

1 绪论	1
1.1 工程材料本构理论的发展概况	1
1.2 连续介质力学的基本方程	3
1.3 应力分析	9
1.3.1 应力状态和应力张量	9
1.3.2 应力张量的分解	13
1.3.3 应力空间、应力路径	18
1.4 应变分析	21
1.4.1 应变状态和应变张量	21
1.4.2 应变张量的分解	24
1.4.3 应变率张量	26
1.4.4 应变增量张量	28
2 工程材料的强度和变形特性	30
2.1 概述	30
2.2 金属的强度和变形特性	31
2.2.1 基本试验	31
2.2.2 简化模型	35
2.3 土的强度和变形特性	36
2.3.1 应力-应变曲线	36
2.3.2 土体变形的组成部分	38
2.3.3 土体变形影响因素	40
2.4 混凝土的强度和变形特性	42
2.4.1 单向应力下的变形性质	42

2.4.2	复合应力下的变形性质	45
2.4.3	其他条件下的变形性质	48
3	弹性模型	50
3.1	概述	50
3.2	线性弹性模型	51
3.3	非线性弹性模型理论	53
3.3.1	Cauchy 弹性模型	54
3.3.2	超弹性模型	58
3.3.3	次弹性模型	61
3.4	土的非线性弹性模型举例	63
3.4.1	$E-K$ 非线性弹性模型 (Duncan 和 Chang 等, 1970, 1980)	63
3.4.2	正常固结粘土四参数非线性弹性方程 (龚晓南, 1984) ...	68
3.4.3	一个土的 $K-G$ 非线性弹性模型	71
3.4.4	考虑球张量和偏张量交叉影响的非线性弹性模型 (沈珠江, 1986)	73
3.5	混凝土的非线性模型举例	76
3.5.1	$K-G$ 非线性弹性模型 (Kupfer 和 Gerstle, 1973)	76
3.5.2	混凝土的正交各向异性弹性模型 (Elwi 和 Murry, 1979)	82
3.6	破坏准则	86
3.6.1	概述	86
3.6.2	最大主应力准则	88
3.6.3	Tresca 准则	89
3.6.4	von Mises 准则	90
3.6.5	广义 von Mises 准则和广义 Tresca 准则	92
3.6.6	Mohr-Coulomb 准则 (单剪应力准则)	93
3.6.7	双剪应力准则	96
3.6.8	三剪应力准则	96
3.6.9	Bresler-Pister 准则	98
3.6.10	Willam-Warnke 准则	99

3.6.11	Ottosen 准则	102
3.6.12	Lade 准则	103
3.6.13	主应力空间屈服曲面一般表达式	104
3.6.14	小结	109
4	弹塑性模型	117
4.1	弹塑性模型理论	117
4.1.1	屈服条件的概念	117
4.1.2	理想弹塑性材料的加载和卸载准则	120
4.1.3	加工硬化材料的加载和卸载准则	122
4.1.4	Drucker 公设和 Ильюшин 公设	123
4.1.5	塑性位势理论和流动规则	129
4.1.6	加工硬化规律	130
4.1.7	小结	135
4.2	理想弹塑性模型	136
4.2.1	理想弹塑性本构方程的一般表达式	136
4.2.2	Prandtl-Reuss 模型	138
4.2.3	Drucker-Prager 模型	139
4.2.4	Mohr-Coulomb 模型	140
4.2.5	Willam-Warnke 模型	142
4.3	加工硬化弹塑性本构方程的一般表达式	146
4.4	土的加工硬化弹塑性模型举例	147
4.4.1	临界状态模型及其发展	147
4.4.2	Lade-Duncan (1975) 弹塑性模型	158
4.5	混凝土的加工硬化弹塑性模型举例	163
4.5.1	混合硬化 von Mises 模型	163
4.5.2	等向硬化三参数模型	167
5	粘弹塑性模型	174
5.1	粘弹性模型理论	174
5.1.1	材料的蠕变与应力松弛现象	174
5.1.2	粘弹性积分型本构方程	177

5.1.3	粘弹性微分型本构方程	180
5.2	线性粘弹性模型	182
5.2.1	Maxwell 模型	182
5.2.2	Voigt 模型	184
5.2.3	标准线性模型	186
5.2.4	加载-卸载响应	189
5.2.5	广义 Burgers 模型	194
5.3	非线性粘弹性模型	198
5.3.1	本构理论中的形变描述	198
5.3.2	单积分型本构模型	200
5.4	粘塑性本构模型	202
5.4.1	粘塑性特性的某些实验资料	202
5.4.2	粘塑性模型理论	205
5.5	岩土粘塑性模型	216
6	内蕴时间塑性模型	219
6.1	引言	219
6.2	内时理论的不可逆热力学基础	220
6.3	内时理论中的基本概念	224
6.3.1	一维塑性本构模型的两种描述	224
6.3.2	内蕴时间的概念	226
6.4	内时理论的本构模型	227
6.4.1	简单弹塑性内时本构方程	227
6.4.2	新定义内蕴时间下的本构方程	229
6.4.3	含弱奇异性的内时塑性本构方程	231
6.4.4	新型内时弹塑性本构方程	232
6.5	内时理论在土中的应用实例	234
7	损伤模型	238
7.1	损伤力学的一般概念	238
7.1.1	损伤的定义及损伤变量	238
7.1.2	损伤力学中的热力学基础	241

7.2 损伤本构理论	247
7.2.1 蠕变损伤	248
7.2.2 韧性塑性损伤	251
7.2.3 疲劳损伤	255
7.2.4 脆性损伤	259
7.2.5 损伤的各向异性问题	262
7.2.6 随机损伤	265
7.2.7 损伤与断裂	267
7.3 岩土损伤本构理论	270
7.3.1 概述	270
7.3.2 内时损伤理论	275
参考文献	280
索引	288

1 绪 论

1.1 工程材料本构理论的发展概况

本构关系广义上是指自然界一作用与由该作用产生的效应两者之间的关系。如电学中的电压与电流的关系，力学中力与变形之间的关系，热学中温差与热流之间的关系，水力学中水力梯度与渗流之间的关系。这里讨论的是材料的力学本构关系。力学本构关系是应力-应变-强度关系，描述它的数学表达式称本构方程。

工程材料通常指工程用土、岩石、混凝土和工程用钢等材料。以前常把上述工程材料的应力-应变关系简化为线性弹性关系，或刚塑性关系，或理想弹塑性关系。例如在经典土力学中，求解变形问题时把土体视为线性弹性体，求解稳定问题时把土体视为刚塑性体。事实上，工程材料的应力-应变关系是很复杂的。以工程土为例，应力-应变性状常具有弹性、塑性、粘性以及非线性、剪胀性、各向异性等性状，同时应力路径、强度发挥度、应力历史以及土的状态、组成、结构和温度等均对其有显著影响。要较好地描述工程材料的真实性状，需要发展较复杂的本构模型。

近二十余年来，电子计算机、计算技术和室内外测试技术飞速发展使在求解工程问题中采用较复杂的本构模型成为可能。采用连续介质力学的方法求解工程问题时，运用的本构模型能否较好的反映材料的真实性状是得到合理解答的关键之一。近年来，各种工程材料本构模型的研究得到愈来愈多的重视，工程材料本构理论得到迅速的发展。

至今建立的工程材料的本构模型大体上可以分为下述几种类型：弹性模型、弹塑性模型、粘弹塑性模型、内蕴时间塑性模型和损伤模型等。

弹性模型是建立在弹性理论基础上的本构模型。最简单的是线性弹性模型，即广义虎克定律。非线性弹性模型一般可分为三类：Cauchy 弹性模型，超弹性模型和次弹性模型。非线性弹性模型是线性弹性模型的推广，按照拟合应力应变曲线的形状分类也可分为：折线型、双曲线型、对数曲线型等。按照采用的弹性系数分类，又可分为 E （杨氏模量）- ν （泊松比）非线性弹性模型， K （体积变形模量）- G （剪切模量）非线性弹性模型，以及用其他形式表示的弹性模型。

弹塑性模型是建立在弹塑性模型理论基础上的本构模型。它将应变分为弹性应变和塑性应变两部分，分别采用弹性理论和塑性增量理论计算。塑性增量理论包括三个部分：（1）屈服面理论；（2）流动规则理论；（3）加工硬化理论。各国学者已建立许多弹塑性模型，例如：Prandtl-Reuss 模型；Drucker-Prager 模型；Mohr-Coulomb 模型；Willian-Warnke 模型；临界状态模型；Lade-Duncan (1970) 模型；边界面模型；沈珠江三重屈服面模型等等。

粘弹塑性模型理论认为：弹性、塑性和粘性是连续介质三种基本的性质，各在一定的条件下独自反映材料本构关系一个方面的特性。理想弹性模型，理想塑性模型（刚塑性模型）和理想粘性模型是反映这三种理想性质的理想模型。工程材料的本构关系可以用这些简单模型的各种组合来构成。粘弹性模型是理想弹性模型和理想粘性模型的组合，粘弹塑性模型是三种简单模型的组合。

内时塑性模型是建立在内蕴时间塑性理论基础上的本构模型。内蕴时间塑性理论的最基本概念可以叙述为：塑性和粘塑性材料内任一点的现时应力状态，是该点邻域内整个变形和温度历

史的泛函，而特别重要的是变形历史是用一个取决于变形中材料特性和变形程度的内蕴时间来量度的。

损伤模型是建立在损伤力学基础上的本构模型。损伤力学研究材料由存在的微观缺陷发展到宏观破坏这一过程。常用损伤变量来描述材料的损伤状态。损伤模型理论正在发展之中，尚不成熟。近年来，在工程材料中已得到一些初步的应用。

迄今，工程材料本构模型的研究还正处于百花齐放，方兴未艾阶段。可以预料，本构理论的发展将使采用连续介质力学求解工程问题提高到一个新的水平。

1.2 连续介质力学的基本方程

求解一个具体的工程问题，首先要提出反映这一问题的基本方程的具体表达式，以及边界条件和初始条件。这是一个从实际的工程问题，简化成物理模型，进而抽象成数学模型的过程。通过这一过程，工程问题转化成数学问题的求解。

采用连续介质力学理论求解工程问题时，其基本方程包括运动微分方程、几何方程以及材料的力学本构方程。

工程材料不同于一般固体力学材料，有其特殊性。特别是工程用土，它是三相组合体，由固体颗粒、水和气体组成。固体颗粒构成土的骨架，水和气体填充于固体颗粒之间的孔隙中。土体的性状并不单纯地取决于土中的某一相，而是与同时并存的各相的质和量以及它们之间的相互关系有关。而且，在一定的条件下，水和气体会从土体中逸出。研究还表明，土体的变形和强度是受土中有效应力控制的。根据以上特点，在研究土木工程边值问题时，除了上述的运动微分方程、几何方程和力学本构方程外，有时还要运用反映土体在外力作用下各相承受力的关系的有效应力原理，运用反映土体在外力作用下各相变形之间关系的相容方程

(有时称为连续方程), 以及反映水和气体在土体中流动的本构方程。

土木工程边值问题的求解方法与一般固体力学边值问题的求解方法是相同的。原则上, 根据一定的边界条件和初始条件, 结合上述基本方程, 总可求得物体在变形阶段的应力、应变和位移。不过, 通常要采用数值解法。

下面将基本方程, 边界条件和初始条件作一简要介绍:

(1) 运动微分方程式

在直角坐标系 $oxyz$ 中, 运动微分方程式可表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \left(F_x - \frac{d^2 u_x}{dt^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \left(F_y - \frac{d^2 u_y}{dt^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \left(F_z - \frac{d^2 u_z}{dt^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

式中 ρ ——介质的密度;

F_x, F_y, F_z ——单位质量的体积力分量;

$\frac{d^2 u_x}{dt^2}, \frac{d^2 u_y}{dt^2}, \frac{d^2 u_z}{dt^2}$ ——质点加速度分量。

运动微分方程是描述介质质点的移动和转动的动力学方程。它未涉及介质材料的物理特性, 因此对一切连续介质都是适用的。

在加速度可以忽略的情况下, 式 1.2.1 就成为平衡微分方程。如采用张量下标记号, 平衡微分方程可表示为

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \quad (1.2.2)$$

在小变形条件下, 增量形式的平衡方程为

$$d\sigma_{ij,j} + \rho dF_i = 0 \quad (1.2.3)$$

(2) 几何方程

几何方程描述应变与位移之间的关系。在小变形条件下, 应变张量分量与位移张量分量的关系为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

采用张量下标记号，上式可改写成

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2.5)$$

(3) 本构方程

本构方程描述一个作用与其产生效应之间的关系。如力学中的应力与应变之间的关系，电学中电压与电流之间的关系等。在土木工程问题中遇到最多的是工程材料的力学本构方程，其次是渗流本构方程。至于土体与构筑物之间界面单元的本构方程，描述热量在工程材料中传递规律的本构方程有时也会遇到，不过，它们已超出本文讨论的范围，这里不作介绍，读者可参阅有关专著。

a. 工程材料力学本构方程

介质的力学本构方程又称为广义的应力-应变关系。它与介质的物理属性密切相关。从本质上说，它是描述质点动力状态与运动状态之间关系的。工程材料的本构方程一般形式可表示为

$$d\sigma_{ij} = D d\epsilon_{ij} \quad (1.2.6)$$

式中应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 一般包括弹性应变增量、塑性应变增量，以及由于蠕变引起的应变增量等。 D 为广义弹塑性模量矩阵。以后几章将详细介绍工程材料的本构理论，这里不再作进一步介绍了。

实际工程材料的应力-应变关系是非常复杂的。企图用一个本构方程式去描述工程材料在荷载作用下应力-应变关系的全部细节是不可能的，也是没有必要的。相反，根据所研究问题的特点，选择能反映其基本特点的简单模型则是上策。

b. 渗流本构方程

由于土体孔隙的断面大小和形状十分不规则，水在土体空隙中的流动是非常复杂的。研究水在土体中的流动规律，通常采用平均的概念。用单位时间通过土体单位面积的水量这种平均渗透速度来代替真实速度，并且大都通过试验研究进行。

描述水在土体中流动规律的最简单、最常用的渗流本构方程是达西定律，其表达式为

$$v=ki \quad (1.2.7)$$

式中 v ——水在土体中的渗流速度；

k ——土的渗透系数；

i ——水力梯度。

达西定律告诉我们，水在土体中的渗流速度同水力梯度成线性比例，渗透系数是常值。事实上，影响 k 值变化的因素很多，不少学者提出许多非线性的关系式，这里不作介绍，读者可参考有关论文和专著。

如果水在土体中不发生流动，或不需要考虑水在土体中的渗过程，就无需考虑渗流本构方程。

(4) 连续方程

工程材料中有些是多相组合体。例如土体是三相组合体，包括气相、液相和固相。在荷载作用下，土体体积改变等于其中三相体积改变的和，即

$$\delta V = \delta V_s + \delta V_a + \delta V_w \quad (1.2.8)$$

式中 δV_s ——固相体积改变量；

δV_a ——气相体积改变量；

δV_w ——液相体积改变量。

在土力学中，通常假定土中固相，即土颗粒和土中水本身的体积都是不可压缩的，亦就是说，通常假定 $\delta V_s = 0$ 。在排水条件下，荷载作用会使土中水从土体中流出或流入，则 $\delta V_w \neq 0$ 。在不排水条件下，土中水不能流出也不能流入，则 $\delta V_w = 0$ 。气相在荷

载作用下体积改变比较复杂，它包括气体体积压缩或膨胀，气体从土体中逸出或吸入，以及气体溶于水或由水中释放。对于非饱和土，在荷载作用下土体中三相的体积变化是比较复杂的，且气相和液相的体积变化存在耦合作用，这里将不作进一步介绍。对饱和土，不存在气相，情况比较简单。饱和土体积的改变等于土体中液相的体积改变（水的流出或流入），换句话说，单位时间单元土体的压缩量等于流过单元表面的流量，其表达式为

$$\frac{d\epsilon_w}{dt} = \frac{1}{\gamma_w} \left(k_x \frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u_w}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \right) \quad (1.2.9)$$

式中 k_x, k_y, k_z ——分别为 x, y, z 方程的渗透系数；

u_w ——超孔隙水压力；

γ_w ——水的重度。

多相体材料的连续方程从广义上讲也可以认为是连续力学的普遍方程。对由单相材料组成的连续体，它是自动满足的。对于由多相材料组成的，如无需考虑各相之间的变化，也就不需建立连续方程了。

(5) 有效应力原理

有效应力原理反映多相体在荷载作用下，其中各相承担荷载的关系。土是由固体颗粒、水和气体三相组成。固体颗粒构成土的骨架，水和气体填充于固体颗粒之间的孔隙中。在饱和土中，土中孔隙为水充满；在非饱和土中，孔隙中既有水，也有空气。土体受到外力作用后，一部分由孔隙中的流体承受，另一部分由土骨架承受。孔隙中流体的压力称为孔隙压力 u （孔隙水压力 u_w 和孔隙气压力 u_a ），粒间应力或土骨架应力称为有效应力。土体中总应力 σ 等于孔隙压力 u 和有效应力 σ' 之和。控制土体变形和强度的并不是作用在任何微分面上的总应力，而是有效应力。对饱和土，有效应力原理（Terzaghi, 1925）可表示为

$$\sigma = \sigma' + u_w \quad (1.2.10)$$

对非饱和土, Bishop (1955) 提出了更一般的表达式

$$\sigma = \sigma' + [\alpha_s - \chi (\alpha_s - \alpha_w)] \quad (1.2.11)$$

式中 χ 是一个与饱和度有关的参数; 对饱和土, $\chi=1$, 式 1.2.11 蜕化为式 1.2.10; 对干土, $\chi=0$, 式 1.2.11 成为

$$\sigma = \sigma' + \alpha_s \quad (1.2.12)$$

式 1.2.11 从广义上讲可以认为是连续力学的普遍方程。对由单相材料组成的连续体来说, 它是自动满足的。

(6) 边界条件和初始条件

边界条件可能具有不同的形式。

在物体的边界 S 上可能已经给定载荷 P_x 、 P_y 、 P_z 。在这种情况下, 在边界 S 上应该满足

$$P_j = \sigma_{jk} n_k \quad (1.2.13)$$

也可能在物体边界上所给定的是各点的位移, 或者是速度, 以及流量。这时, 在边界上应满足位移相容条件和流量平衡条件。也可能遇到混合边界问题, 这时在边界上所给定的一部分是载荷条件, 而另一部分则是位移、或者是速度条件, 以及一部分是流量条件。

如果变形过程是非定常的, 并且它是由包含于时间的导数或者对于某一个载荷参数的导数的方程式来描述, 这时就需事先给定物体的初始状态。

由以上分析可知, 基本方程中, 运动微分方程, 几何方程和力学本构方程是最基本的。对多相体工程材料, 有时需要运用有效应力原理和连续方程。

对工程材料不同的工程问题, 基本方程中运动微分方程和几何方程是相同的, 工程材料不同, 其本构方程不同。采用连续介质力学方法求解工程问题, 关键问题之一是材料本构模型的合理选用。由于电子计算机和数值计算技术的发展, 一般来说, 只要合理选用材料的本构模型, 正确确定模型参数, 采用数值法求解

工程问题，就有可能得到满意的解答。

1.3 应力分析

1.3.1 应力状态和应力张量

在 $oxyz$ 直角坐标系中，连续介质中一点处的应力状态可用一应力张量表示，

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.3.1)$$

上述应力张量共有九个分量，其中 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 为应力的法向分量， τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xz} 、 τ_{zx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 为应力的切向分量。由于剪应力的互等性， $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ， $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ，故应力张量中九个分量独立的只有六个，应力张量为对称张量。

过某点 M ，法线矢量为 $\mathbf{n}$ 的微分面上的应力矢量 $\mathbf{P}$ 在各座标轴上的投影 P_x 、 P_y 、 P_z ，与该点各应力分量之间的关系可通过四面体的平衡得到（图 1-1）：

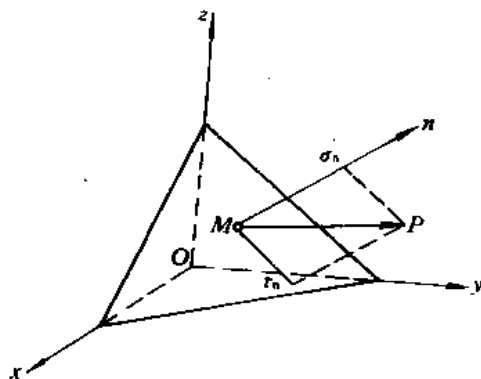


图 1-1 微分面上的应力矢量

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ P_y &= \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \\ P_z &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

式中 n_x 、 n_y 、 n_z 分别为法线矢量 n 在 x 、 y 、 z 方向的投影，分别等于各方向余弦 $\cos(n, x)$ 、 $\cos(n, y)$ 、 $\cos(n, z)$ 。采用张量下标记号，式 1.3.2 可简写成下述形式

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.3.3)$$

这里采用了求和约定。求和约定为：凡是在同一项中重复的脚标（例如式 1.3.3 中的 j ）称为求和下标，不重复的脚标（例如式 1.3.3 中的 i ）称为自由下标。求和下标表示按该脚标顺次取 x, y, z （或取 1、2、3）求和。有一个自由下标的方程代表三个方程。如无特别声明，求和下标和自由下标均顺次取 x, y, z （或取 1、2、3）。例如：应力张量 σ_{ij} 具有二个自由下标，每个顺次取 x, y, z ，因此它应有 9 个应力分量。又如，式 1.3.3 有一个自由下标、右边项中有一个求和下标，则式 1.3.3 代表 3 个方程，每个方程右边项有 3 项，如式 1.3.2 中所示。

微分面上应力矢量 P 在法线方向的投影为微分面上的法向应力 σ_n ，其值为

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x \quad (1.3.4)$$

该微分面上的剪应力 τ_n 的大小等于

$$\tau_n = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \sigma_n^2} \quad (1.3.5)$$

如果作用在这微分面上只有正应力，剪应力等于零，则作用在这微分面上的总应力就是主应力，微分面的法线方向就是应力主方向。用 σ 表示主应力，它在各坐标轴上的投影 P_x 、 P_y 和 P_z 分别为

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sigma n_x \\ P_y &= \sigma n_y \\ P_z &= \sigma n_z \end{aligned} \right\} \quad (1.3.6)$$

式中 n_x, n_y, n_z ——分别为法线矢量 n 各方向余弦。

将上式代入式 1.3.2, 得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0 \\ \tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{xy} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.7)$$

采用张量下标记号, 上式可简写成

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (1.3.8)$$

式中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i=j) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j) \end{cases} \quad (1.3.9)$$

δ_{ij} 如用矩阵形式表示, 即为单位矩阵,

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.10)$$

要从式 1.3.7 求得 n_x, n_y, n_z 不全为零的解, 则方程组式 1.3.7 系数行列式必须等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3.11)$$

将上式展开, 得

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1.3.12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= -(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_z \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.13)$$

三次方程式 1.3.12 称为应力状态的特征方程。它有三个实根 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，就是主应力，并约定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。微分面上各方向余弦满足

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (1.3.14)$$

将主应力 σ_1 的值代入式 1.3.7 中任何二个方程，并与方程式 1.3.14 联立求解，可求得对应于主应力 σ_1 的应力主轴（应力主方向）的方向余弦，即求得主应力 σ_1 的方向。同样也可以求得主应力 σ_2 和 σ_3 的方向。可以证明，当 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ 时，三个主应力方向相互垂直。

在给定的荷载作用下，物体中任一点的主应力值及主应力方向就已确定。它们不会因选取不同的坐标系而改变。也就是说，方程式 1.3.12 的根应与坐标系的选择无关。方程式 1.3.12 中的系数 I_1 、 I_2 、 I_3 也应与所选取的坐标系无关。所以它们称为应力张量 σ_{ij} 的三个不变量。 I_1 、 I_2 、 I_3 分别称为应力张量的第一不变量，第二不变量和第三不变量，或分别称为一次、二次和三次不变量。应力张量不变量也可用主应力表示：

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.15)$$

由式 1.3.2、式 1.3.4 和式 1.3.5，不难证明：在分别通过应力主轴 1、2、3，并且平分诸主应力平面之间夹角的各平面上（图 1-2），剪应力具有极值，并称为主剪应力。这些平面称为主剪应力面。主剪应力分别等于

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.16)$$