名师解惑丛书

集合与函数

李应林　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

集合与函数

李应林　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

集合与函数

李应林　编著

出 版 者：山东教育出版社
（济南市纬一路 321 号　邮编：250001）
电　　话：(0531)2023919　传真：(0531)2050104
网　　址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东教育出版社
印　　刷：山东新华印刷厂临沂厂
版　　次：2001 年 1 月第 1 版
2001 年 1 月第 1 次印刷
规　　格：787mm×1092mm　32 开本
印　　张：7.625 印张
字　　数：156 千字
书　　号：ISBN 7-5328-3123-X/G·2936
定　　价：7.00 元

图书在版编目(CIP)数据

集合与函数/李应林编著.—济南:山东教育出版社,2000
(名师解惑丛书)
ISBN 7-5328-3123-X

Ⅰ.集…　Ⅱ.李…　Ⅲ.数学课-高中-课外读物
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 52786 号

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印．

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中．

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订．此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题．更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习．

作 者 的 话

函数是中学数学教材的主旋律，是初等数学到高等数学的枢纽.全部高中代数是以函数为主线展开的，平面解析几何全面渗透了函数的思想方法，立体几何的许多内容也可理解为通过空间模型建立的函数关系.函数思想贯穿于高中数学理论和应用的各个侧面，函数观点牵动着中学数学思维路线的条条神经.高中数学的重要任务之一就是树立运用函数思想观点思考问题的意识，自觉地运用函数观点解决问题.综上所述，可以看出函数在中学数学中的重要地位和作用.

本书对于函数这一重要内容，立足教材，拓宽加深，揭示联系，注重思想方法指导，总结规律，以期提高学生的数学能力.本书具有如下特点：

1. 对于学生容易出错和忽略的问题进行典型剖析，树立正确的解题思路.

2. 对于通性通法问题进行解题指导，揭示规律，注重导评.

3. 加强函数思想方法的运用，引导学生自觉地运用函数思想观点来分析问题和解决问题.

本书对于学生学好函数，解决有关函数的疑难问题，是难得的良师益友.(有关幂函数的内容，书中标记“*”号，建议读者选读)

2000 年 10 月

作者简介　李应林，1939 年 9 月出生，毕业于山东师范大学数学系，现在泰安一中任教，中学高级教师、中学特级教师，泰安市中学数学会副理事长．从事数学教学及研究 40 年，致力于中学数学基本数学思想方法的研究以及“结构自学探究教学法”的实验．在省级以上刊物发表《二面角大小的求法》等论文 30 余篇，出版《高中数学基础知识与解题思路》等著作 6 部．曾先后荣获“泰安市专业技术拔尖人才”、“山东省教学能手”、“全国教育系统劳动模范”等荣誉称号．并被教育部、人事部、全国总工会授予“人民教师奖章”.

目　录

引 子

函数的概念是最基本的数学概念之一,它贯穿于初等数学及高等数学的大部分领域,初等函数的相关内容是中学数学的核心内容,也是联系中学数学各部分内容的主线．函数思想的确立引导数学从常量数学进入变量数学,它的综合运用使人们在众多数学问题的处理上达于统一,学好函数是学好中学数学的关键．

要学好函数,必须掌握科学的学习方法．

首先,要透彻理解有关概念和定义．如,奇(偶)函数的定义中,语义外即首先蕴涵了函数的定义域关于原点对称这一前提,这是需要我们在机械记忆定义之外去发现和领悟的．

其次,要注意数形结合．函数表达式与函数图象是刻画函数关系的两种不同形式的工具,二者在对不同具体问题、具体细

节的表现上，往往差异很大，这时，巧妙地利用“数形结合”，“化形为数”或“化数为形”就成为揭开问题神秘面纱的关键．

第三，要树立化归思想．一方面要善于将外形各异的陌生的问题通过转化与化归，化为我们熟悉的函数问题；另一方面要善于将难解的函数问题通过转化与化归，化为我们熟悉的易解的子问题或其它类问题．化归的精神是朴素的：化陌生为熟悉，化整为零，化难为易．

第四，要注意分类讨论的方法．如，对于分段函数、绝对值函数、条件极值等内容，往往需要先分类(段)讨论，而后统合．

第五，要注意函数内容与其它内容的联系，函数内容与方程、不等式、三角函数、解析几何等内容是相互渗透、密不可分的．树立开放思维理念，在联系中学习，不仅于函数，而且于整个中学数学内容之掌握都是大有裨益的．

以上所述，难免偏颇，但望于读者有点滴之益．

一 集合与简易逻辑

集合是研究数学问题的基础和工具，中学数学中的函数、数列、轨迹等都是通过集合定义的．集合是数学语言的一部分，恰当地使用集合的符号和记法，能够准确地表达我们所考虑的对象的范围及对象的主要性质．集合之间具有运算性质，特别是逻辑运算规律，这使我们能处理逻辑关系复杂的问题．集合涉及划分与分类等数学思想，学习集合知识有助于体会划分与分类的思想方法．在高考中，集合内容一般以两种方式出现：一是考查集合本身的内容，即集合的概念、集合与集合之间的关系、元素与集合之间的关系；二是把集合作为工具在考查其他内容时加以应用，用集合语言叙述问题．

逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科，数学概念、规律的表达、判断、推理，离不开逻辑的参与．高中阶段数学的

全部内容，都是依靠逻辑来建立和发展的．逻辑的严格性构成了数学的严格性．在各类考试中，人们虽然很少刻意直接考查逻辑相关知识，但实际上，对逻辑的考查却是无处不在，无法回避的．

（一）集合的概念

集合与对应是近代数学中最基础、最重要的概念，是建立近代数学的基础，对集合概念我们只给出描述性的解释．集合中元素的确定性、互异性、无序性对确定集合有决定性的意义．注意集合的表示法，符号“$\in$”及“$\subseteq$、$\subsetneqq$”的用法以及子集、交集、并集、补集、等集的严格定义．

1．准确把握集合概念

例 1 已知 $P=\{y \mid y=x^2+1, x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{y \mid y=x+1, x\in\mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于（ ）．

(A) $\{(0,1),(1,2)\}$　　(B) $\{0,1\}$

(C) $\{1,2\}$　　(D) $[1,+\infty)$

分析：本题出错率颇高，容易误选(A)，原因就是未能正确理解集合概念，误认为是求抛物线与直线的交点．事实上，P、Q 中的代表元素是 y，它表示函数的值域．本题实际上是求两个函数值域的交集．由 $P=\{y \mid y\geqslant 1\}$，$Q=\{y \mid y\in\mathbf{R}\}$ 知 $P\cap Q=P$，因此，正确答案为(D)．

例 2 设集合 $A=\{y \mid y=x^2+ax+2, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y) \mid y=x^2+ax+2, x\in\mathbf{R}\}$，试求出参数 $a=-2$ 时的集合 A 和 B．

分析：代表元素是决定一个集合的完全标志，尽管集合

A 和 B 都是由等式 $y=x^2+ax+2$ 刻画的，但由于代表元素不同，所以它们是不同的集合. 对于每个常数 a，集合 A 表示二次函数 $y=x^2+ax+2$ 的值域，代表元素是该函数的任意一个函数值；集合 B 表示抛物线 $y=x^2+ax+2$ 上的点集，代表元素是该抛物线上的任意一点. 二者不可混为一谈.

解：当 $a=-2$ 时，$y=x^2+ax+2$

$$=x^2-2x+2$$

$$=(x-1)^2+1\geqslant 1,$$

$\therefore A=\{y\mid y\geqslant 1\}$,

$B=\{(x,y)\mid y=x^2-2x+2, y\geqslant 1\}$.

又由 $x^2-2x+2-y=0$，得

$$x=1\pm\sqrt{y-1}.$$

$\therefore B=\{(1+\sqrt{y-1}, y), y\geqslant 1\}\cup\{(1-\sqrt{y-1}, y), y\geqslant 1\}$.

2. 注意集合元素的互异性

例 3 已知集合 $A=\{x, xy, \lg(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$. 若 $A=B$，求 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}}\right)$ 的值.

误解：$\because A=B$ 且 $xy>0$,

$\therefore \lg(xy)=0$,

$\therefore xy=1$,

$\therefore 1=xy=|x|$ 或 $1=xy=y$.

$\therefore \begin{cases}x=1,\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}$

$\therefore$ 当 $x=y=1$ 时，$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2000}+\right.$

$\frac{1}{y^{2000}})=2\times2000=4000$;

当 $x=y=-1$ 时，$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}})=-2+2-2+\cdots+2=0$.

辨析：当 $x=y=1$ 时，$A=\{1,1,0\}$，这与集合元素的互异性相矛盾.而当 $x=y=-1$ 时，$A=B=\{-1,1,0\}$，故本题只有一解，为

$$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2000}+\frac{1}{y^{2000}})=0.$$

3. 掌握证明(判断)两集合关系的方法

反映集合与集合关系的一系列概念，都是用元素与集合的关系来定义的，因此，在证明(判断)两集合的关系时，应回到元素与集合的关系中去.

例 4 设集合 $A=\{a\mid a=3n+2,n\in Z\}$，集合 $B=\{b\mid b=3k-1,k\in Z\}$，试判断 A 与 B 的关系.

解题指导：在用描述法表示集合时，我们只关心集合元素的实际取值，而不限制其具体表述形式．例如，我们认为

$$\{x\mid x=2a+1,a\in Z\}=\{y\mid y=2b+1,b\in Z\},$$

而不区分字母 x,y,a,b 的差异.

解：设 $a\in A$，则

$$a=3n+2=3(n+1)-1.$$

$\because n\in Z$,

$\therefore n+1\in Z$,

$\therefore a\in B,A\subseteq B$.

又设 $b\in B$，则

$$b=3k-1=3(k-1)+2.$$

$\because k\in \mathbf{Z}$，

$\therefore k-1\in \mathbf{Z}$，

$\therefore b\in A, B\subseteq A.$

综上所述，$A=B$.

[**导评**]在说明 $a\in B$ 或 $b\in A$ 的过程中，变（或凑）形式是关键.

例5 设集合 $A=\{a\mid a=n^2+1, n\in \mathbf{N}^*\}$，集合 $B=\{b\mid b=k^2-4k+5, k\in \mathbf{N}^*\}$，试证 $A\subsetneqq B$.

证明：设 $a\in A$，则

$$a=n^2+1=(n+2)^2-4(n+2)+5.$$

$\because n\in \mathbf{N}^*$，

$\therefore n+2\in \mathbf{N}^*$，

$\therefore a\in B$，故 $A\subseteq B$.

又显然，$1\notin A$ 而 $1\in B(k=2)$，

$\therefore A\neq B$，故有 $A\subsetneqq B$.

4. 重视空集的特殊性

空集是一个特殊的重要集合，它不含任何元素，是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集. 显然，空集与任何集合的交集为空集，与任何集合的并集等于这个集合. 当题中隐含有空集参与的集合关系时，其特殊性往往被忽视，应给以足够重视.

例6 已知集合 $A=\{x\mid -x^2+3x+10\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$. 若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

误解：由 $-x^2+3x+10\geqslant 0$，得 $-2\leqslant x\leqslant 5$.

$\therefore A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，

$\therefore B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5,\end{cases}$

$\therefore -3\leqslant m\leqslant 3$.

辨析：以上解答初看似乎无懈可击，其实是错误的．错就错在忽略了“空集是任何集合的子集”这一重要性质，而没有考虑 $B=\varnothing$ 的情况.

正解：由 $-x^2+3x+10\geqslant 0$，得 $-2\leqslant x\leqslant 5$.

$\therefore A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(1)若 $B\neq\varnothing$，则 $m+1\leqslant 2m-1$ 即 $m\geqslant 2$，

由已知，得

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 2,\\m+1\geqslant -2,\\2m-1\leqslant 5,\end{cases}$$

$\therefore 2\leqslant m\leqslant 3$.

(2)若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$ 即 $m<2$，此时，仍有

$$B\subseteq A.$$

由(1)、(2)，得 $m\leqslant 3$.

例 7 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解：$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 等价于方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 没有实根(即 $A=\varnothing$)或者只有非正实根.

(1)若 $A=\varnothing$，则方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 无实数根，则

$$\Delta=(a+2)^2-4<0$$