

中学课外读物



数学习题分类详解

中学课外读物

数学习题分类详解

增订本

方 华 编

山东人民出版社

一九七九年·济南

中学课外读物
数学习题分类详解

增订本

方 华 编

山东人民出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂临沂厂印刷

787×1092毫米32开本 13.75印张 190千字

1978年5月第1版 1978年8月第2版

1980年1月第5次印刷

印数：331,001—481,000

书号 7099·873 定价 1.00 元

再版说明

为了培养中学生分析问题和解决问题的能力，加深对中学数学基本理论、概念、公式的理解，提高基本运算技能，我们于一九七八年出版了这本书。书中除将习题分类作了详细解答外，并在解题部分的每章前写有解题要点，概括了解答此类习题所需的基本理论、概念、公式或基本规律。对比较难解的习题，先进行了分析，然后作出解答。对有多种解法的习题，只对其中一部分习题给出了各种解法。在几何习题的解法中，对几何解法、代数解法和三角解法进行了比较，以帮助读者开阔思路。

这一本书自出版以来，受到读者的欢迎，有的读者还提出了宝贵的意见。为满足广大读者的需要，现在我们进行了修订，补充了第十一章：综合性习题。这些习题中大部分是有一定的难度。希望读者多作独立思考，经常总结解题的经验，以增强综合运用几何、代数、三角基本知识解决实际问题的能力。

一九七九年二月

AAES7/02

目 录

习 题 部 分

第一章	计算和变换	1
第二章	代数方程和不等式	8
第三章	对数方程和指数方程	13
第四章	列方程解应用题	15
第五章	函数和曲线	19
第六章	几 何	27
第七章	解三角形	37
第八章	三角变换和三角方程	41
第九章	排列、组合和二项式定理	44
第十章	数列和极限	46
第十一章	综合性习题	49

解 答 部 分

第一章	计算和变换	63
第二章	代数方程和不等式	81
第三章	对数方程和指数方程	112
第四章	列方程解应用题	124
第五章	函数和曲线	145
第六章	几 何	193
第七章	解三角形	240
第八章	三角变换和三角方程	258
第九章	排列、组合和二项式定理	273
第十章	数列和极限	283
第十一章	综合性习题	296

习 题 部 分

第一章 计算和变换

计算下列各题:

$$1. (1 - 0.5^{-2}) \div \left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$2. 5\frac{1}{2} \times \left(-\frac{6}{11}\right) + 0.25 - (-2)^3 \div \left(-2\frac{2}{3}\right)^2.$$

$$3. \left(-2\frac{3}{5}\right)^0 + 4^{-2} \times \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - (0.01)^{0.5}.$$

$$4. \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 + 81^{\frac{3}{4}} - (-1)^0 \div 0.2 + (-2)^{-3}.$$

$$5. 5\frac{3}{4} - 2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{4} \right] \div \frac{2}{5}.$$

$$6. 5 - 3 \times \left[\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} + 1031 \times (0.25 - 2^{-2}) \right] \div 9.$$

$$7. 0.25 \times (-2)^2 - 4 \div (\sqrt{5} - 1)^0 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

$$8. \left(\frac{1}{300}\right)^{-\frac{1}{2}} + 10 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - 10 \times (2 - \sqrt{3})^{-1}.$$

$$9. \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} - (3.14)^0 + \left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$10. 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{2^0}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2-1}}.$$

化简下列诸式:

$$11. 8x^{-\frac{1}{3}}\sqrt[3]{y^{-\frac{1}{3}}x^4}\sqrt[3]{y^{\frac{4}{9}}}.$$

$$12. \sqrt[3]{14 \times 24 \times 39 \times 91} + 4\sqrt[3]{27} \times (-\sqrt[3]{3}).$$

$$13. \sqrt{m^2 - 2ma + a^2}.$$

$$14. \sqrt{(-3)^2}; \sqrt[3]{(-27)^3}.$$

$$15. \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}.$$

$$16. \sqrt[6]{8^6} \div \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} \div \left(\frac{1}{8}\right)^0.$$

$$17. \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} + \frac{2ab}{a^2-b^2}. \quad (a \neq \pm b)$$

$$18. \left(\frac{8x^{-3}}{\sqrt[3]{y^3 \cdot z^{-6}}}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$19. \frac{(-27)^3 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}}}{(-9)^0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}}.$$

$$20. \frac{\frac{3}{4}(ab)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{9}a^4b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2a\sqrt[3]{a^2}}.$$

21. 若 $m + \frac{1}{m} = 2$.

求 $m^2 + \frac{1}{m^2}$; $m^3 + \frac{1}{m^3}$.

22. 当 $m \leq 1$ 时, 计算 $\sqrt{(m-1)^2}$.

23. $\sqrt{a^2} + a$. ($a < 0$)

24. $(1 - c^2)^{-\frac{1}{2}} - \{[(1+c)(1-c)]^{\frac{1}{2}} + c^2[(1+c)(1-c)]^{-\frac{1}{2}}\}$.

25. $[(a^{-\frac{3}{2}}b^2)^{-1}(ab^{-3})^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}})^7]^{\frac{1}{4}}$.

26. $(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}} + 0.1^{-2} + (2\frac{10}{27})^{-\frac{1}{3}}$.

27. $|6 - a| - |2a + 1| + \sqrt{a^2 + 10a + 25}$. ($a < -5$)

28. $|2x - 3|$.

29. $\sqrt{4 - 12a + 9a^2}$.

30. $\frac{1}{\sqrt{2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2-1}}$.

31. $\sqrt{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}}$.

32. $\sqrt[4]{a^{-2}b^3} \cdot \sqrt[3]{a^4b^{-2}} \div \sqrt[6]{a^5b^{-2}}$.

33. $(27a^{\frac{5}{2}}\sqrt{ab^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{\frac{4}{b^3}}})^{\frac{1}{3}}$. ($b \neq 0$)

34. $\sqrt{\frac{12}{25}} + \sqrt[4]{90000} + \sqrt[6]{\frac{24}{27}}$.

$$35. \frac{\sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}}{(\sqrt[3]{3}-1)^2}.$$

$$36. (3\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b})(-b\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}) + (2\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b^3}).$$

$$37. \frac{(a^2-b^2)^3}{a^3+b^3} \div \frac{(b+a)^2}{a^2-ab+b^2} \times \frac{1}{(b-a)^3}.$$

$$38. \frac{x^4+x^2+1}{x^3-1} + \frac{x(x-2)-2(x-2)}{x^2-3x+2}.$$

$$39. \frac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9a^{2n-1}}{a^{n+1}-4a^n+3a^{n-1}}.$$

分解因式:

$$40. x^2y-2y^3.$$

$$41. 18a^3-48a^2b+32ab^2.$$

$$42. 15x^3+x^2-2x.$$

$$43. x^3-5x^2+4x.$$

$$44. a^2-2ab+b^2-6a+6b+5.$$

$$45. x^2-4b^2-4+2bx^2-8b+b^2x^2.$$

$$46. x^3+2x^4+4x^2+2+x.$$

$$47. x^4+x^2y^2+y^4.$$

对数计算:

$$48. \log_4 2.$$

$$49. \textcircled{1} 3\log_3 \frac{1}{27}; \textcircled{2} \lg \lg 10.$$

$$50. \log_3 \frac{1}{27} + \log_{\frac{1}{2}} 8 + \log_2 8 + \log_4 64.$$

$$51. \lg \frac{700}{3} + \lg \frac{300}{7} + \lg 1.$$

$$52. \lg 2 - 2\lg 4 + \lg 5 + \lg 16.$$

$$53. \lg \frac{3}{7} + \lg 70 - \lg 3.$$

$$54. \log_2 2 + \log_5 1 - \log_8 \frac{1}{27}.$$

$$55. \lg 4 + \lg 9 + 2\sqrt{(\lg 6)^2 - 2\lg 6 + 1}.$$

$$56. \lg 14 - 2\lg \frac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18.$$

$$57. \lg(1000 \cdot \sqrt[5]{10}).$$

$$58. \frac{2\lg 2 + \lg 3}{2 + \lg 0.36 + \frac{2}{3}\lg 8}.$$

$$59. \frac{\lg 4 + \lg 25 - \lg 10}{\lg \sqrt{1000}}.$$

$$60. \frac{\lg 3 + \lg 2}{\frac{1}{4}\lg 16 + \sqrt{(\lg 1 - \lg 10)^2} + \frac{1}{2}\lg 0.09}.$$

$$61. -\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}.$$

$$62. \text{已知: } \lg 2 = 0.3010, \lg 3 = 0.4771, \lg 7 = 0.8451.$$

$$\text{求: } ① \lg \sqrt{800}; \quad ② \lg \sqrt{45};$$

$$③ \lg 5; \quad ④ \lg 35.$$

$$63. \log_a a^2.$$

$$64. \sqrt{5^{2\lg 5 \lg x} - 2\lg x + 1}.$$

$$65. \frac{2\lg 6 - \lg 3}{1 + \frac{1}{2}\lg 0.36 + \frac{1}{3}\lg 8}.$$

$$66. \log_2 \cos \frac{\pi}{4} - \log_2 \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$67. \text{证明: } \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1. \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$68. \lg \lg x - \lg \sin x = \lg \cos x - \lg \operatorname{ctg} x + 2\lg 3 - \frac{3}{2}\lg 2,$$

求 x .

三角计算:

$$69. \cos 165^\circ.$$

$$70. \operatorname{tg} 870^\circ.$$

$$71. \sin 435^\circ.$$

$$72. \sin(-915^\circ).$$

$$73. \sin(-990^\circ).$$

$$74. \cos(-840^\circ).$$

$$75. \operatorname{ctg}(-1200^\circ).$$

$$76. \cos \frac{3}{8}\pi \cdot \cos \frac{\pi}{8}.$$

$$77. 2\sin x \cdot \sin y. \left(x = \frac{5}{12}\pi, y = \frac{\pi}{12} \right)$$

$$78. \sin \frac{4}{3}\pi \cdot \cos \frac{25}{6}\pi \cdot \operatorname{tg} \left(-\frac{3}{4}\pi \right).$$

$$79. \sin 480^\circ \cdot \cos 480^\circ \cdot \cos 960^\circ \cdot \cos 1920^\circ.$$

$$80. \cos 78^\circ \cdot \cos 3^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 3^\circ.$$

$$81. \operatorname{ctg}(-60^\circ)\sin 240^\circ - 2\cos(-600^\circ) + \operatorname{tg}^2 150^\circ.$$

$$82. \operatorname{ctg} 135^\circ + \cos(-60^\circ) - \operatorname{tg}^2 60^\circ + \sin 30^\circ.$$

$$83. \frac{\operatorname{tg}(-120^\circ) \cdot \cos(-240^\circ) \cdot \cos 480^\circ}{\operatorname{tg}(-60^\circ) \cdot \sin(1050^\circ)}.$$

$$84. \sin^2 62^\circ + \operatorname{tg} 54^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ + \sin^2 28^\circ.$$

$$85. \text{已知: } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2},$$

$$\text{求: } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

$$86. \text{已知: } \arcsin \frac{4}{5} = \alpha, \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$$

$$\text{求: } \sin 2\alpha; \cos 2\alpha; \operatorname{tg} \alpha.$$

$$87. \text{已知: } \cos \theta = 0.6, (270^\circ < \theta < 360^\circ)$$

$$\text{求: } \left(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2.$$

$$88. \text{已知: } \alpha, \beta \text{ 为三角形之内角, 且 } \alpha \text{ 为锐角, } \cos \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin \beta = \frac{5}{13}.$$

$$\text{求: } \sin(\alpha + \beta) \text{ 和 } \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \text{ 的值.}$$

$$89. \text{求证: } \operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1.$$

$$90. \text{若: } 90^\circ < A < 180^\circ, \text{求: } \sec A \cdot \sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

$$91. \text{求证: } \sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} 10^\circ) = 1.$$

$$92. \text{求证: } \sin \frac{A}{2} + \sqrt{1 - \sin A} = \cos \frac{A}{2}. (0^\circ < A < 90^\circ)$$

第二章 代数方程和不等式

解方程和方程组:

$$93. \sqrt{x^2 + 7} - 4 = 0.$$

$$94. x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 8x - 12 = 0.$$

$$95. \sqrt{3x+4} = x.$$

$$96. 2\sqrt{x-3} + 6 = x.$$

$$97. \frac{2}{x-2} + x = \frac{x}{x-2}.$$

$$98. \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{10}{3}.$$

$$99. \sqrt{2x^2-5} - \sqrt{5x-7} = 0. \quad (x \text{ 为实数})$$

$$100. \sqrt{4x+1} - 2x + 1 = 0.$$

101. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的求根公式是什么? 并把它推导出来.

$$102. \frac{x-1}{x+1} - \frac{5}{1-x} = \frac{4}{x^2-1}.$$

$$103. \begin{cases} x+y=8, & (1) \\ 2x-y=7. & (2) \end{cases}$$

$$104. \begin{cases} 2x-y=5, & (1) \\ 3x+4y=2. & (2) \end{cases}$$

$$105. \begin{cases} 2x - 3y = 9, & (1) \\ 3x + 4y = 5. & (2) \end{cases}$$

106. a 是什么实数的时候, 下列方程组的解是正数?

$$\begin{cases} 2x + ay = 4, & (1) \\ x + 4y = 8. & (2) \end{cases}$$

$$107. \begin{cases} 7\sqrt{x+y} - x - y = 12, & (1) \\ x^2 + y^2 = 136. & (2) \end{cases}$$

$$108. \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9, & (1) \\ 4x^2 - 5xy + 6y^2 = 30. & (2) \end{cases}$$

$$109. \begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, & (1) \\ \sqrt{xy + 3} = x. & (2) \end{cases}$$

$$110. \text{解方程组} \begin{cases} y^2 - 4x - 2y + 1 = 0, & (1) \\ y = x + a. & (2) \end{cases}$$

并讨论: a 取那些实数值时, 这个方程组

① 有两组不同的实数解;

② 有两组相同的实数解;

③ 没有实数解.

$$111. \begin{cases} \sqrt[3]{(x+y)^2} + 2\sqrt[3]{(x-y)^2} = 3\sqrt[3]{x^2 - y^2}. & (1) \\ 3x - 2y = 13. & (2) \end{cases}$$

112. 方程 $x^2 + 4x + k = 0$,

① 当 k 为何值时, 方程有二不同实根?

- ② 当 k 为何值时, 方程有二相同实根?
- ③ 当 k 为何值时, 方程没有实根?
113. 实数 p, q 应满足怎样的条件, 才能使 $x^2 + px + q = 0$ 的两根成为一个直角三角形两锐角的正弦?
114. m 是什么值的时候, 方程 $3x^2 - (4m-1)x + m^2 + \frac{3}{4} = 0$ 有相等的两实根?
115. 若方程 $x^2 + 2x + k = 0$ 的两根相等, 问 $k = ?$
116. ① 求证: 若方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的三根成等比数列, 则 $a^3c = b^3$.
- ② 已知方程 $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$ 的三个根成等比数列, 求三个根.
117. 若方程 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 之三根为 $1, -1, \frac{1}{2}$, 求 $c = ?$
118. 若 $3x^2 + kx + 12 = 0$ 的两根相等, 求 k 值.
119. 试求: 以 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两根平方作两根的二次方程.
120. 设 m 是实数, 求证方程 $2x^2 - (4m-1)x - m^2 - m = 0$ 的两个根必都是实数.
121. 设 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{tg} \beta$ 是方程 $x^2 + 6x + 7 = 0$ 的两个根, 求证: $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$.
122. 已知方程 $2x^2 - x \cdot 4\sin\theta + 3\cos\theta = 0$ 的两个根相等, 且 θ 为锐角, 求 θ 和这个方程的两个根.
123. 已知方程 $ax^2 - (2a+1)x + (a+1) = 0$, 当
- ① 有一根为零; ② 两个根的和为零;
- ③ 两根的积为 2 时分别求 a 的值.

124. $\triangle ABC$ 的三个内角是 α, β, γ , 而 $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta$ 是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两个根, 求 γ .
125. a 为什么值时, 方程 $x^2 - 2x + \lg a = 0$ 有实数根.
126. 已知方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根为 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{tg} \beta$, 求 $\sin^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ 的值.
(其中 p, q 为任意实常数)
127. 求证: 方程 $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{2} - q)x + q = 0$ 的一个根是 1; 设这个方程的三个根是一个 $\triangle ABC$ 内角的正弦 $\sin A, \sin B, \sin C$, 求 A, B, C 的度数及 q 的值.
128. k 是什么实数时, 方程 $x^2 - 2(k + 5)x + 2k^2 + 1 = 0$ 有实数根?
129. 设方程 $8x^2 - (8\sin \alpha)x + 2 + \cos 2\alpha = 0$ 的两个根相等, 求 $\alpha = ?$
130. 已知方程 $x^3 + mx - 3x + n = 0$ 的三个根的平方和为 6, 且知这个方程有两个相等的正根, 求 m, n 的值.
131. 解方程 $x^4 + 1 = 0$, 并且证明平面内代表它的根的四个点是一个正方形的顶点.
132. 当 p 是什么实数值时, 方程 $x^2 + px - 3 = 0$ 与方程 $x^2 - 4x - (p - 1) = 0$ 有一个公共根, 并求出这个公共根.
133. 方程 $x^2 - (m + 2)x - (m - 6) = 0$ 有两个不相等的实根, 求 m 的范围.
134. 若方程 $5x^2 - 10x \cos \alpha + 7 \cos \alpha + 6 = 0$ 的两根相等, 试求两邻边之和为 6, 且夹角为 α 的平行四边形的最大面积.
135. 当锐角 θ 为何值时, 方程 $(3 \sin \theta)x^2 - (4 \cos \theta)x + 2 = 0$

有两个相等的实根？并求出这个方程的实数根。

136. 系数是实数的一元三次方程，最少有几个实数根？最多有几个实数根？

解不等式和不等式组：

137. $x^2 - 3x - 28 < 0$.

138. $2x^2 > 3 - 5x$.

139. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 2} < 0$.

140. $\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0, & (1) \\ x^2 - x - 6 > 0. & (2) \end{cases}$

并在数轴上表示出来。

141. $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 4} > 0$.

142. $|x| < |x + 1|$.

143. $\log_{0.5}(x^2 - 2x - 15) < \log_{0.5}(x + 13)$.

144. $\lg(2x + 1) > \lg(5 - x)$.

145. 求证 $|\sin 2x| \leq 2|\sin x|$ ， x 为任意实数。

146. 若 a, b, c 是不全相等的实数。求证：

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$$

147. 从火车上下来的两个旅客，他们按同一路线到同一目的地，甲以一半时间用速度 a 行走，另一半时间以速度 b 行走；乙以一半路程用速度 a 行走，另一半路程用速度 b 行走，试问哪个旅客先到达目的地？