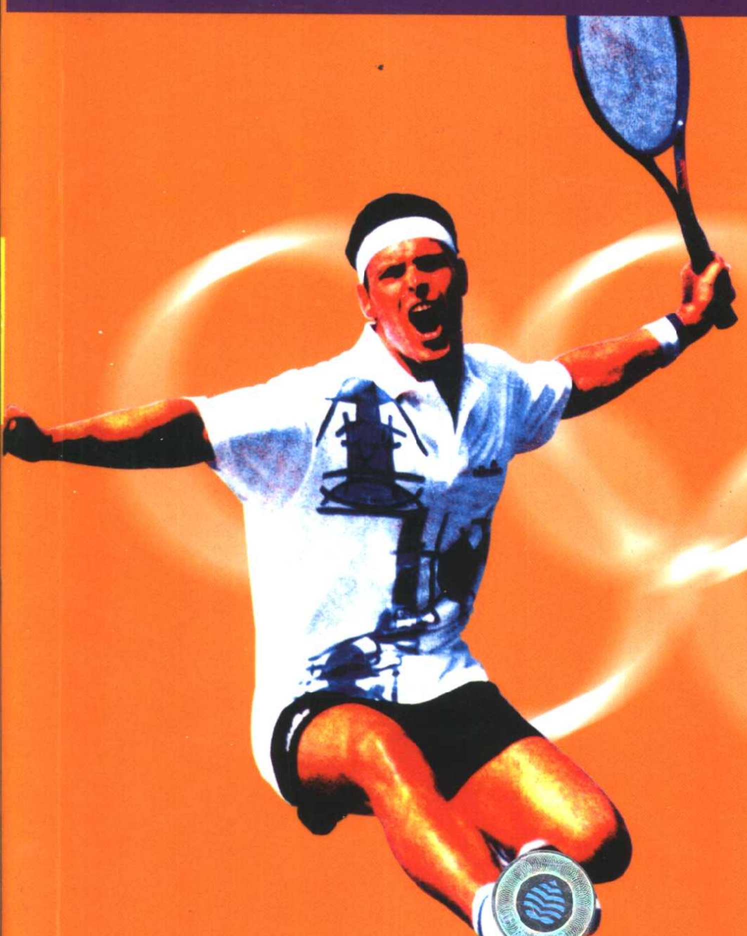
金牌奥校

数学奥林匹克教程

伍家德 主编

高中



中国少年儿童出版社

金牌奥校

数学奥林匹克教程

伍家德 主编

高中

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克教程．高中年级/《金牌奥校》编写组编．
-北京：中国少年儿童出版社，2000.12
（金牌奥校）
ISBN 7-5007-5516-3

Ⅰ．数…　Ⅱ．金…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 79056 号

作者　甘大旺、齐世荫、伍家德、孙凤仪、汪跃中、李平龙、余水能、邹楼海、徐　川、裴光亚、樊孝农；参加本书编审的有：毛经中、伍家德、朱翠蓉、汪跃中、郑学群、徐学文。

数学奥林匹克教程·高中年级

中国少年儿童出版社　出版发行
责任编辑：惠　玮　余俊雄
美术编辑：徐　欣
社址：北京东四十二条 21 号
邮政编码：100708
印刷：北京兴华印刷厂
经销：新华书店
850×1168　1/32　29.125 印张　699 千字
2001 年 1 月北京第 1 版　2001 年 1 月北京第 1 次印刷
印数：1—20000 册
ISBN7-5007-5516-3/G·4308
定价：32.80 元

编 写 说 明

推进素质教育，培养创新能力，是当前我国教育改革的一个重大方向，并受到教育界的普遍重视和社会的广泛关注。多年的学科竞赛实践表明，合理地开展学科竞赛活动，是促进学校教育改革，提高学生学科素质的积极因素。

为了配合素质教育改革的形势需要，进一步推动学科竞赛活动的开展，我们依据统编教材，并按照我国学科竞赛大纲的规定，编写了这套《金牌奥校》丛书。希望能对中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力有所帮助，从而促进从知识型向能力型的转变。同时也希望能为广大同行在对学生实施素质教育的过程中提供一些参考。

《金牌奥校》丛书是数学、物理、化学等专业学会专家学者及奥校教练员、部分省市教研员，在认真分析了中学生应具备的各学科基础知识和基本技能的前提下，结合奥校智能训练实际情况编写而成的，本丛书有以下二个特色：

一、面向全体中学生

本丛书覆盖了中学的全部基础知识、基本方法、基本技能和学科思想。取材源于统编教材，但又不局限于课本，坚持“强化基础，适当提高，突出重点”的原则，对课本内容作了必要概括、合理变通和适应拓广。因此该套丛书可作为中高考复习资料。

二、照顾有兴趣特长的中学生

本套丛书设立了专题研究，对竞赛中的常见方法在理论和实践的基础上作了综合性研究，可培养深广的学科思维能力、学科思想方法和学科应用意识。因此本套丛书又可作为竞赛学习、培训的资料和教材。

本套丛书按年级和学科编写，并包括以下几个部分：奥林匹克教程、奥林匹克集训题精编、奥林匹克题典、奥林匹克模拟试卷。内容由易到难，由简入繁，讲练结合，编排科学合理。

本丛书是在统一规划下，根据详细的计划界定而由全体编委分工编写的。它是教学和科研的成果，是集体智慧的结晶。在编写和统稿的过程中，我们虽然注意博采众长，并力求有自己的风格，但由于水平有限，缺点和错误难免，诚恳地希望读者能提供宝贵意见和建议。

编　者

目 录

第一章 集合与映射

一、内容提要

1. 集合

集合是数学中的一个"原始概念",不加逻辑定义,只作通俗解释,说它是"具有某种属性的所有对象(元素)的全体".例如一切大于0而小于1的实数构成一个集合,记作 $A=\{x|0<x<1\}$,集合中的元素是确定的、互异的和无序的,元素与集合的关系用属于符号 $\in$ 或不属于符号 $\notin$ 表示,关于集合,主要涉及以下几个问题:

(1)集合的表示.常用的方法有列举法和描述法,前者具体实用,如三角函数表;后者适于研究,用描述法表示集合时,关键在于归纳出所有元素的共同属性,并将它用解析式表达出来.

(2)集合间的关系,这里涉及子集、全集和相等概念.集合与集合的关系用符号 $=$、$\subseteq$、$\subsetneqq$ 或 $\neq$、$\not\subseteq$、$\not\subset$ 表示.在具体问题的研究中,经常要对所讨论的集合的范围作一个限制,即给定一个集合 I(即全集)用来界定这个范围,使得在这个范围内所讨论的每一个集合都是它的子集,集合与它的子集的关系是通过元素与集合的关系来描述的,即

A 是 B 的子集:$A\subseteq B\Leftrightarrow$ 任有 $x\in A$,总有 $x\in B$,A 是 B 的子集这种关系称为 A 包含于 B 或 B 包含 A.

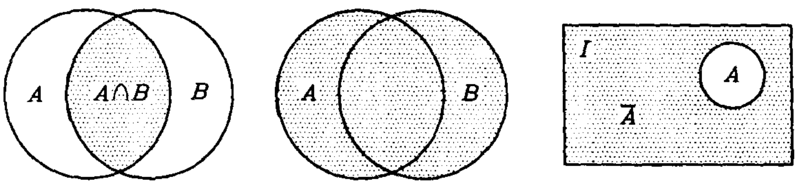
两个集合相等的概念可通过集合的包含关系定义为:

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A$$

A 是 B 的真子集记为 $A \subsetneqq B$,这与 $A \subseteq B$ 是有区别的,$A \subsetneqq B$ 意味着 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$,即任取 $x \in A$,总有 $x \in B$,但存在 $x_1 \in B$,而 $x_1 \notin A$.

空集是不包含任何元素的集合,记为$\varnothing$,并规定它是任何集合的子集,或者是任何非空集合的真子集.

(3)集合的运算.集合的基本运算有交、并、补三种,图示如下:



交 $A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$　　并 $A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$　　被 $\overline{A} = I - A = \{x \mid x \in I 且 x \notin A\}$

图 1-1

2. **映射**

映射是揭示两个集合之间的内在联系的一个重要手段,设 A,B 是两个集合,如果对于 A 中的任一元素 x,按照对应法则 f,集合 B 中有唯一的元素 y 与之对应,这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射,记为 $f: A \to B$(元素的对应关系记为 $x \to y = f(x)$),映射具有下列特性:

(1)存在性:对于 A 中任一元素 a,必存在元素 b 作为它的象:$a \to b = f(a)$;

(2)唯一性:A 中每个元素 a 的象 $f(a)$ 是唯一的,即 $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$;

(3)封闭性:A 中每个元素 a 的象 $f(a)$ 必须在 B 中,即 $f(a) \in B$.

在映射 $f: A \to B$ 中,集合 A(原象集),集合 B(象所在集),法

则 f(对应规律)是确定映射的三要素,三位一体,缺一不可.映射中的对应可以"多对一",但不可"一对多".

由于允许多对一,且 B 中元素可以缺席(允许有无原象的元素),故映射未必存在逆映射,如果 A 中不同的元素在 B 中有不同的象(称为单射),而且 B 中每一个元素在 A 中都有原象(称为满射),那么这样的映射叫做 A 到 B 上的一一映射.一一映射存在逆映射 $f^{-1}:B\to A$.

3. 函数

如果 A,B 都是非空的数集,那么 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数,记作 $y=f(x)$,其中 $x\in A,y\in B$,原象的集合 A 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域;象的集合 $C(C\subseteq B)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的值域,注意只有两个非空数集的满射 $A\to B$ 确定的函数,其值域 $C=B$.

函数概念涉及三要素:定义域 A,对应规律 f,值域 C,起决定作用的是前二者,C 可以由 A,f 来确定,两个函数相同,当且仅当它们的定义域相同,对应规律也相同.

若确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:A\to B$ 是一一映射,则映射 $f^{-1}:B\to A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$(习惯写成 $y=f^{-1}(x)$)叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,只有一一映射确定的函数和有反函数,互反的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

二、解题指导

1. 集合的构成及表示法

主要解决三个方面的问题:辨析给定的对象的全体是否构成一个集合;对于一个确定的集合,判断某个元素是否属于这个集

合;如何表示一个集合.

例1 回答下列问题:

(1)方程$(x-\sqrt{3})^2(x^2-2)=0$在正实数范围内的解的全体是否构成一个集合?在有理数范围内呢?如果是,如何表示?

(2)以偶数作分子的分数的全体是否构成一个集合?

(3)集合$A=\{y|y=x^2,x\in\mathrm{R}\}$和集合$B=\{(x,y)|y=x^2,x\in\mathrm{R}\}$是否表示同一个集合?

解:(1)都是.在正实数范围内的解的集合(解集)可表示为$\{\sqrt{3},\sqrt{2}\}$.在有理数范围内虽说无解,但解集是存在的,即为空集$\varnothing$.

(2)否.因为集合的元素具有确定性,即任一对象或者是该集合的元素,或者不是该集合的元素,二者必居其一且仅居其一,这里,同一分数$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,既属于它,又不属于它,这不符合元素的确定性.

(3)否.集合A的元素是y,$A=\{y|y\geqslant 0\}$是非负实数集,也可写作$[0,+\infty)$.集合B的元素是有序实数对(x,y),该集合是所有满足条件$y=x^2$的有序实数对(x,y)的全体.

注:在(1)中,值得注意的是,由于集合的元素是互异的,所以尽管$\sqrt{3}$是二重根,但不能把解集写成$\{\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{2}\}$;根据无序性,却可以写成$\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

思考题 下列各对象的全体,哪些能够构成集合?哪些不能构成集合?说明理由.

(1)偶数作分子的既约分数;

(2)既是偶数又是质数的数;

(3)使$|x-1|<0.1$的x的值;

(4)使$|x-1|$最小的x的值;

(5)使$|x-1|$最大的 x 的值.

例 2 设集合 $A=\{x|x=m+n\sqrt{2},m,n\in Z\}$

(1)任取 $x_1,x_2\in A$,判断 x_1+x_2,x_1x_2 是否属于 A?

(2)对于 $x\in A$,如果$\frac{1}{x}\in A$,那么 m,n 应满足什么条件?

(3)对于给定的整数 n,试求满足条件 $0<m+n\sqrt{2}<1$ 的 A 中元素的个数.

分析:根据集合 A 的元素的特征,(1)、(2)在于检验 x_1+x_2, x_1x_2,$\frac{1}{x}$是否可以表示成$m+n\sqrt{2}(m,n\in Z)$的形式;对于(3),则在视 n 为固定数的条件下,探求整数 m 的范围.

解:(1)令 $x_i=m_i+n_i\sqrt{2}(m_i,n_i\in Z,i=1,2)$

$\because x_1+x_2=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\sqrt{2}$

$x_1x_2=(m_1m_2+2n_1n_2)+(m_1n_2+m_2n_1)\sqrt{2}$,

$\therefore x_1+x_2\in A;x_1x_2\in A$,(为什么?).

(2)令 $x=m+n\sqrt{2}(m,n\in Z)$,则

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{m+n\sqrt{2}}=\frac{m-n\sqrt{2}}{(m+n\sqrt{2})(m-n\sqrt{2})}$$
$$=\frac{m}{m^2-2n^2}-\frac{n}{m^2-2n^2}\sqrt{2}.$$

若$\frac{1}{x}\in A$,则$\frac{m}{m^2-2n^2},\frac{n}{m^2-2n^2}$都是整数,设 m,n 的最大公约数为 d,则有 $m=m_1d,n=n_1d$,其中 m_1,n_1 为整数,且 m_1,n_1 互质,于是,由

$\frac{m}{m^2-2n^2}=\frac{m_1}{(m_1^2-2n_1^2)d},\frac{n}{m^2-2n^2}=\frac{n_1}{(m_1^2-2m_1^2)d}$,都是整数可以推知$(m_1^2-2n_1^2)d=\pm1$,从而$|d|=1$,且 $m^2-2n^2=(m_1^2-2n_1^2)d^2=\pm1$,$(m,n\in Z)$,即 $m^2=2n^2\pm1(m,n\in Z)$.

(3) $0<m+n\sqrt{2}<1 \Leftrightarrow -n\sqrt{2}<m<1-n\sqrt{2}$.

由上式可知，当 $n=0$ 时，m 不存在，即 A 中不包含所给条件的元素；当 $n\neq 0$ 时，在相差为 1 的两个无理数之间恰有一个整数，即 A 中满足所给条件的元素恰有一个.

练习 对于给定的 a 和集合 A，判定 a 是否属于 A：

(1) $a=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$A=\{(x,y)\mid x+y=1\}$；

(2) $a=x_1-x_2(x_1,x_2\in A)$，$A=\{x\mid x=m-n\sqrt{2},m,n\in N\}$

发展题 已知实数集的非空子集 S 满足下列条件：1) $1\notin S$；2) 若 $a\in S$. 则 $\frac{1}{1-a}\in S$，试证：

(1) 若 $2\in S$，则 $-1,\frac{1}{2}\in S$，但 $0\notin S$；

(2) 集合 S 不可能是单元素（仅含一个元素）集.

分析：对于肯定性的论断，应根据确定集合的条件进行判断；对于否定性的论断，则利用反证法.

证 (1) 因为 $2\in S$，由 2)，$-1=\frac{1}{1-2}\in S$；再由 2)，因 $-1\in S$，故 $\frac{1}{2}=\frac{1}{1-(-1)}\in S$.

假定 $0\in S$，则由 2)，$1=\frac{1}{1-0}\in S$，这与 $1\notin S$ 矛盾，故 $0\notin S$.

(2) 假定 S 只有唯一元素 a，即 $S=\{a\}$. 由 1)，$a\neq 1$，由 2)，$\frac{1}{1-a}\in S$，从而 $a=\frac{1}{1-a}\Leftrightarrow a^2-a+1=0$.

这与 a 是实数矛盾，故 S 不可能是单元素集.

思考题 集合 S 一定是无限集吗？

练习 当集合 $A=\{x\mid ax^2+bx+1=0\}$ 是单元素集时，a，b 应满足什么条件？

提示 无异于讨论方程 $ax^2+bx+1=0$ 有唯一解的条件.

2. 集合间的关系及运算

涉及的问题有:(1)判定两集合间的简单的包含关系及相等关系,或者反之,在关系已知时,求出相应的集合;(2)对给定的集合进行交、并、补运算,或者给定交、并、补的某些结果,求原集合;(3)讨论联系包含、相等、运算的更高一层的关系,或者把其他有关问题转化为这种关系来研究.这三类问题本质上都归结为元素与集合的关系来处理.

例 1* 集合 $A=\{x\mid x>2\sqrt{3},x\in\mathbf{R}\}$,$a=3\sqrt{2}$,则( )

(A)$a\notin A$. (B)$a\subsetneqq A$.

(C)$\{a\}\in A$. (D)$\{a\}\subseteq A$.

分析:a 与 A 是元素与集合的关系,只能用 $\in$ 或 $\notin$,故排除(B);$\{a\}$ 与 A 是集合间的关系,只能用 $\subsetneqq$ 或 $\subseteq$,故排除(C);又 $a=3\sqrt{2}>2\sqrt{3}$,于是 $a\in A$,排除(A),应选(D),实际上,因 $a\in A$,故 $\{a\}$ 是 A 的子集,从而 $\{a\}\subseteq A$.

练习 集合 $M=\{x\mid x^2-2x-2>0\}$,判断 $1+\sqrt{3}$,$1-\sqrt{3}$ 各自是否属于集合 M.

例 2 求满足关系 $\{c,d\}\subseteq X\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$ 的集合 X.

分析:集合 X 必含元素 c,d,此外只能含元素 a,b,e 中的至多 2 个,于是问题归结为确定 $\{a,b,e\}$ 的真子集.

解:$\{a,b,e\}$ 的真子集有 $\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{e\}$,$\{a,b\}$,$\{a,e\}$,$\{b,e\}$,故满足题设关系的集合 X 有 7 个:$\{c,d\}$,$\{a,c,d\}$,$\{b,c,d\}$,$\{e,c,d\}$,$\{a,b,c,d\}$,$\{a,e,c,d\}$,$\{b,e,c,d\}$.

练习 求满足关系 $\{0\}\subset X\subseteq\{0,1,2,3,4\}$ 的集合 X.

---

* 本书所有选择题中的四个选择中只有一个是正确的.

例 3 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,a\in\mathrm{R}\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant(a-1)^2,a\in\mathrm{R}\}$，试确定 A、B 之间的关系.

分析：对于每个固定的 $a\in\mathrm{R}$，A、B 都表示中心在原点的圆面点集（包括周界，特殊情况下为孤立点），它们的包含关系由半径的大小完全确定.

解：当 $|a-1|=|a|$，两边平方，解得 $a=\dfrac{1}{2}$，这时 $A=B$.

当 $|a-1|<|a|$，两边平方，解得 $a>\dfrac{1}{2}$，这时 $B\subsetneqq A$.

当 $|a-1|>|a|$，两边平方，解得 $a<\dfrac{1}{2}$，这时 $A\subsetneqq B$.

练习 设 $A=\{$四边形$\}$，$B=\{$平行四边形$\}$，$C=\{$梯形$\}$，试求每两个集合之间的并和交，并确定所求得的并、交之间的包含关系.

例 4 设集合 $A=\{x\mid x=9l+6m+5n,l,m,n\in\mathrm{Z}\}$，集合 $B=\{x\mid x=3p+5q+6r,p,q,r\in\mathrm{Z}\}$，求证 $A=B$.

分析：归结为证：$x\in A\Rightarrow x\in B$ 且 $x\in B\Rightarrow x\in A$.

证：若 $x\in A$，则存在 $l,m,n\in\mathrm{Z}$，使 $x=9l+6m+5n=3(3l)+5n+6m$，

$\because 3l,n,m\in\mathrm{Z}$，$\therefore x\in B$.

故 $A\subseteq B$.

若 $x\in B$，则存在 $p,q,r\in\mathrm{Z}$，使

$x=3p+5q+6r=9q+6(r-p)+5q$.

$\because$，$p,r-p,q\in\mathrm{Z}$，$\therefore x\in A$.

故 $B\subseteq A$.

综上，$A=B$.

练习 设两集合 $A=\{x\mid x=3m+2n,m,n\in\mathrm{Z}\}$，$B=\{x\mid x=5p+4q,p,q\in\mathrm{Z}\}$，那么下列关系中正确的是 ( )