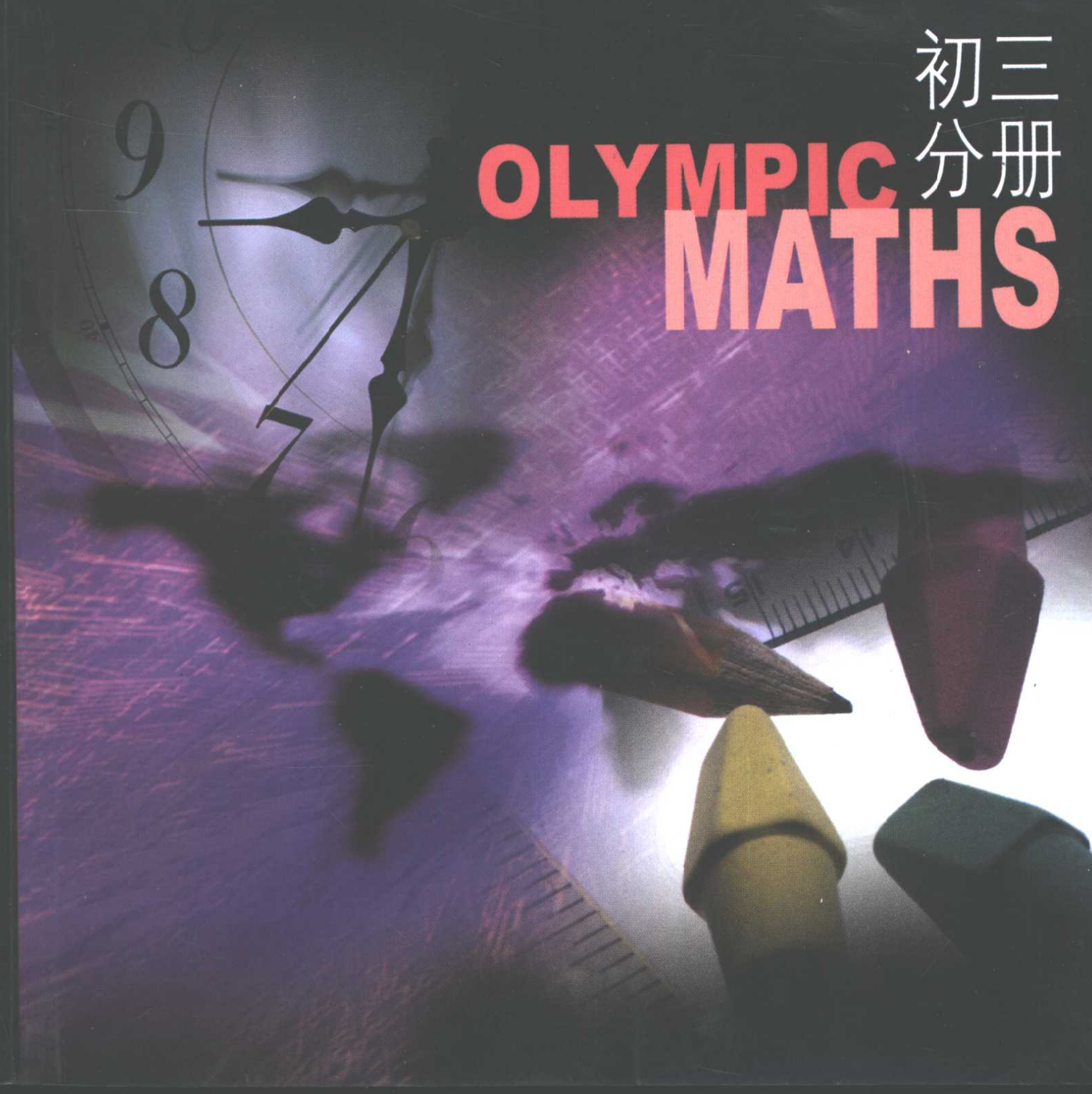
奥林匹克数学

钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

初三分册

OLYMPIC MATHS



奥林匹克数学 初三分册 钱展望 朱华伟／编著 湖北教育出版社

金牌教练教你学

奥林匹克数学

初三分册 MATHS

钱展望　朱华伟　编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学．初三分册/钱展望，朱华伟主编．—武汉：湖北教育出版社，2002

(奥林匹克数学系列丛书)

ISBN 7-5351-3142-5

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①钱…②朱…　Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011148 号

出版　发行：湖北教育出版社　武汉市青年路 277 号

网址：http://www.hbedup.com　邮编：430015　传真：027-83619605

邮购电话：027-83669149

经　销：新　华　书　店

印　刷：湖北新华印务有限公司　(430034·武汉市解放大道 145 号)

开　本：850mm×1168mm　1/32　8.25 印张

版　次：2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷

字　数：200 千字　印数：1-8 000

ISBN 7-5351-3142-5/G·2548　定价：10.50 元

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中,物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20 世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展,电子计算机的发明和发展,数学不仅是整个自然科学的基础,同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛(1894 年)。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明,科学合理地举办各级数学奥林匹克活动,对于传播数学思想方法,激发学生学习数学的兴趣,培养学生的创新精神,提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键,是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试,本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉,根据现行中学数学教学大纲,按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002年1月

钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国“五一”劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长、优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》、《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。

朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。

ISBN 7-5351-3142-5

9 787535 131423 >

定 价：10.50元

目 录

第一讲　一元二次方程的解法

知识点和方法述要

1. 两边都是关于未知数的整式的方程叫作整式方程. 只含一个未知数且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

任何一个一元二次方程即可通过展开、移项、合并同类项等步骤把它化成一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$. a,b,c 分别为二次项、一次项、常数项的系数.

2. 解一元二次方程有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法. 后二种最为常用. 对于一般形式的一元二次方程，求根公式为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant 0).\qquad ①$$

尽管配方法解一元二次方程并不多，但配方法本身是一重要的数学方法.

3. 记 $\Delta=b^2-4ac$. Δ 被称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式. 由①可看出：当 $\Delta>0$ 时方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时方程没有实数根. 反之也成立.

一元二次方程的根的判别式是关于方程的系数的一个代数式，有关项的系数在方程化为一般形式后方可确定.

例题精讲

例 1　解下列关于 x 的方程：

(1) $(a^2-1)x+(ax^2-1)=a^2(x^2-x+1)$；

(2) $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$.

分析 (1) 原方程可变为

$$a(a-1)x^2-(2a^2-1)x+a(a+1)=0. \qquad ①$$

这个方程是不高于二次的方程,当 $a=0,1$ 时,方程为一次方程,分别解得 $x=0$ 与 $x=2$. 当 $a\neq 0,1$ 时,①为二次方程,进行因式分解,可得

$$[ax-(a+1)]\cdot[(a-1)x-a]=0,$$

解得 $x_1=\dfrac{a+1}{a}$, $x_2=\dfrac{a}{a-1}$.

(2)配方,可得

$$[x-(a^2+b^2)]^2=(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=4a^2b^2,$$

即
$$x-(a^2+b^2)=\pm 2ab,$$

所以
$$x_1=(a+b)^2, x_2=(a-b)^2.$$

若从计算判别式入手,则

$$\Delta=4(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2=16a^2b^2,$$

运用求根公式得

$$x=a^2+b^2\pm 2ab=(a\pm b)^2.$$

注意到$(a^2-b^2)^2=(a+b)^2(a-b)^2$,分解因式,原方程可变为

$$[x-(a+b)^2][x-(a-b)^2]=0,$$

故 $x_1=(a+b)^2, x_2=(a-b)^2$.

例 2 已知关于 x 的方程:$3x^2+2ax-a^2=0$ 的一个根为 1,求它的另一根.

解 因 1 是方程 $3x^2+2ax-a^2=0$ 的根,故

$$3\times 1^2+2a\times 1-a^2=0,$$

即
$$a^2-2a-3=0,$$

又可变为
$$(a-3)(a+1)=0.$$

故 $a=3$ 或 $a=-1$.

当 $a=3$ 时,原方程为 $3x^2+6x-9=0$,解得 $x_1=1, x_2=-3$;当 $a=-1$ 时,原方程为 $3x^2-2x-1=0$,解得 $x_3=1, x_4=-\dfrac{1}{3}$.

所以，方程的另一根是 -3 或 $-\frac{1}{3}$.

例3 已知方程 $(x-19)(x-97)=p$ 有实根 r_1 和 r_2，试求方程 $(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的最小实根.

分析 $(x-19)(x-97)=p$ 是一元二次方程，因 r_1,r_2 是它的两个实根，故

$$(x-19)(x-97)-p=(x-r_1)(x-r_2)=0.$$

进而知 $$(x-r_1)(x-r_2)+p=(x-19)(x-97),$$

可见 19,97 为方程 $(x-r_1)(x-r_2)+p=0$ 的两个实根，19 为所求.

例4 已知 a 是方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根，求 $\frac{a^3-1}{a^3-a}$ 的根.

解 由根的定义知 $a^2+a-\frac{1}{4}=0$，即 $a^2+a=\frac{1}{4}$. 于是，有

$$\frac{a^3-1}{a^3-a}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+a+1}{a(a+1)}=\frac{a^2+a+1}{a^2+a}=\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}}=5.$$

例5 已知二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根和为 S_1，两根平方和为 S_2，两根立方和为 S_3，试求 $aS_3+bS_2+cS_1$ 的值.

解 设方程的两根为 x_1,x_2，则 $ax_1^2+bx_1+c=0$, $ax_2^2+bx_2+c=0$. 于是

$$\begin{aligned}
&aS_3+bS_2+cS_1\\
&=a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x^2x_2)+c(x_1+x_2)\\
&=(ax_1^3+b_1x_1^2+c_1x_1)+(ax_2^3+bx_2^2+cx_2)\\
&=x_1(ax_1^2+bx_1+c)+x_2(ax_2^2+bx_2+c)\\
&=0.
\end{aligned}$$

例6 已知两个二次方程 $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$ 有一个公共根 1，求证：二次方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为 1.

分析 因 1 是方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+cx+d=0$ 的一个公共根，故

$$1^2+a\cdot 1+b=0, \quad ①$$

$$1^2+c\cdot 1+d=0. \quad ②$$

①+②得

$$2+(a+c)+(b+d)=0. \quad ③$$

欲证1为方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 的根,只须证明

$$1^2+\frac{a+c}{2}\cdot 1+\frac{b+d}{2}=0. \quad ④$$

比较③,④,显见④成立.

例7 已知方程

$$x^2-(a+b)x+\frac{1}{2}(a^2+2b^2-2b+1)=0$$

有两个实根,求 a,b 的值.

解 依题意,知

$$\Delta=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}(a^2+2b^2-2b+1)\geqslant 0,$$

即 $$a^2+3b^2-2ab-4b+2\leqslant 0. \quad ①$$

由①得 $$(a-b)^2+2(b-1)^2\leqslant 0. \quad ②$$

由②知 $a=b=1$.

例8 已知 A,B,C 不全相等,求证:三个二次方程 $Ax^2+2Bx+C=0$, $Bx^2+2Cx+A=0$, $Cx^2+2Ax+B=0$ 不可能都有等根.

分析 考察反面情形.假若三个方程都有等根,则

$$4B^2-4AC=0,$$

$$4C^2-4AB=0,$$

$$4A^2-4BC=0.$$

三式相加可得

$$A^2+B^2+C^2-AC-AB-BC=0,$$

可变为 $$(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2=0.$$

于是 $A=B=C$,与题设相矛盾.故命题成立.

例9 已知 a,b,c 为正数,且方程

$$c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2=0$$

没有实数根.求证:分别为 a,b,c 的三条线段可组成一个三角形.

分析 依题设,$\Delta<0$,即

$$\begin{aligned}&(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2\\&=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)\\&=[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]\\&=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)<0.\end{aligned}\qquad ①$$

不妨设 $a\geqslant b>0,a\geqslant c>0$,则 $a+c>b,a+b>c,a+b+c>0$,故由①可得 $b+c>a$.由此可见,分别长为 a,b,c 的三条线段中,任意两条线段之和大于第三条线段,它们可以组成一个三角形.

练 习 一

一、填空题

1.若 $b=a+c$,则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一个实数根是________.

2.若 m 是一元二次方程 $ax^2+bx+a=0$ 的一个根,则方程的另一个根是________.

3.已知关于 x 的一元二次方程

$$x^2+2(m+1)x+(3m^2+4mn+4n^2+2)=0$$

有实数根,则 $3m^2+2n^2=$________.

4.如果 m,n 都是正数,方程 $x^2+mx+2n=0$ 和方程 $x^2+2nx+m=0$ 都有实数根,则 $m+n$ 的最小值是________.

二、解答题

5.解方程:

(1)$x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{2}x+\sqrt{6}=0$;

(2)$(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$;

(3)$(7-4\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})x-2=0$.

6. 证明方程$(x-\alpha)(x-\beta)=1$有两个不相等的实数根.

7. 若关于 x 的方程

$$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$$

有实数根,求 a, b 的值.

8. 已知 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. 求证:方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中至少有一个方程有实数根.

9. 当 $a>0$ 且 $b>a+c$ 时,试证方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不同的实数根.

10. 已知 $a-b+c=0$,求证 $b^2\geqslant 4ac$.

11. 解方程

$$(m^2-n^2)x^2-4mnx=m^2-n^2.$$

12. 已知 $x+y+z=0$, $xyz=1$,求证:x, y, z 中必有一个大于$\frac{3}{2}$.

第二讲　韦达定理

知识点和方法述要

1.如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$.这种一元二次方程的根与系数的关系,称作韦达定理.

韦达定理的逆定理是:如果 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$,那么 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

2.有关一元二次方程,韦达定理的应用十分广泛:可用于判断一元二次方程实根的符号;可用于已知方程及方程的一根求另一根;可用于求作以两已知数为根的方程;可用于求与一元二次方程的根有关的某些代数式的值等.其中不解方程求与两根有关的某些代数式的值常用到下面一些关系式:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2;$$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2;$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2};$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2};$$

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3&=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^3)\\&=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2].\end{aligned}$$

3.利用判别式和韦达定理可判定一元二次方程实数根的符号:对于方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$,

$\Delta\geqslant0,\frac{c}{a}>0,\frac{b}{a}<0\Rightarrow$方程有两正根;

$\Delta \geqslant 0, \frac{c}{a} > 0, \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$方程有两负根；

$\Delta > 0, \frac{c}{a} < 0$ 或 $ac < 0 \Rightarrow$方程两根异号.

例 题 精 讲

例 1 已知关于 x 的二次方程 $2x^2 + ax - 2a + 1 = 0$ 的两个实根的平方和为 $7\frac{1}{4}$,求 a 的值.

分析 设方程的两实根分别为 x_1, x_2. 根据韦达定理,有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a}{2}, \\ x_1 x_2 = \frac{-2a+1}{2}. \end{cases}$$

于是,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-2a+1}{2} = \frac{1}{4}(a^2 + 8a - 4). \end{aligned}$$

依题设,得

$$\frac{1}{4}(a^2 + 8a - 4) = 7\frac{1}{4}.$$

解得 $a = -11$ 或 3.

注意到 x_1, x_2 为题设方程的两个实数根,故须满足 $\Delta \geqslant 0$. 但 $a = -11$ 时,

$$\Delta = (-11)^2 + 16 \times (-11) - 8 < 0,$$

$a = 3$ 时,$\Delta > 0$. 故 $a = 3$.

例 2 设方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别比方程 $x^2 + 2qx + \frac{1}{2}p = 0$ 的两根大 1,且方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根之差与方程 $x^2 + 2qx + \frac{1}{2}p = 0$ 的两根之差相等,求这两个方程的解.

解 设方程 $x^2+2qx+\frac{1}{2}p=0$ 的两根为 α,β,则方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $\alpha+1,\beta+1$. 根据韦达定理得

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-2q & ①\\ \alpha\beta=\frac{1}{2}p, & ②\\ (\alpha+1)+(\beta+1)=-p, & ③\\ (\alpha+1)(\beta+1)=q. & ④\end{cases}$$

由②,③得 $$2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0. \quad ⑤$$

由①,④得 $$2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+2=0. \quad ⑥$$

由⑤,⑥得 $$\alpha+\beta=0,\alpha\beta=-1.$$

故 α,β 的值分别为 $1,-1$ 或 $-1,1$. 进而得方程 $x^2+px+q=0$ 的解为 $0,2$;方程 $x^2+2qx+\frac{1}{2}p=0$ 的解为 ±1.

例 3 已知 α,β 是方程 $x^2-7x+8=0$ 的两根,且 $\alpha>\beta$. 不解方程,求 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2$ 的值.

解 根据韦达定理,可得 $\alpha+\beta=7,\alpha\beta=8$. 于是

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7^2-2\times8=33,$$
$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=7^2-4\times8=17.$$

又 $\alpha>\beta$,故 $\alpha-\beta=\sqrt{17}$.

令 $A=\frac{2}{\alpha}+3\beta^2, B=\frac{2}{\beta}+3\alpha^2$,则

$$\begin{aligned}A+B&=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+3(\alpha^2+\beta^2)=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+3(\alpha^2+\beta^2)\\&=\frac{2\times7}{8}+3\times33=\frac{403}{4},\\A-B&=\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}+3\beta^2-3\alpha^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{2\beta}+3(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)\\&=(\beta-\alpha)[\frac{2}{\alpha\beta}+3(\beta+\alpha)]=-\sqrt{17}(\frac{2}{8}+3\times7)\\&=-\frac{85\sqrt{17}}{4}.\end{aligned}$$

两式相加，整理得 $A=\frac{1}{8}(403-85\sqrt{17})$.

例4 求证：方程$(x-a)(x-a-b)=1$有两个实数根，并且其中一个大于 a，另一个小于 a.

分析 证明方程存在两不等实根并不困难，难在直接证明两根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$满足 $x_1<a,x_2>a$. 为此，尝试转化：将 x_1-a,x_2-a 与0进行大小比较. 令 $x-a=y$，原方程可变为

$$y(y-b)=1,$$

即

$$y^2-by-1=0. \quad ①$$

因 $\Delta=b^2-4\cdot(-1)=b^2+4>0$,

故方程①有两个不等实根 y_1,y_2，根据韦达定理 $y_1y_2<0$. 不妨设 $y_1<y_2$，于是 $x_1-a=y_1<0,x_2-a=y_2>0$，即 $x_1<a,x_2>a$，原方程存在两不相等的实数根，其一小于 a，另一根则大于 a.

例5 若 $a^2+3a+1=0,b^2+3b+1=0$，求$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$的值.

解 若 $a=b$，则由题设知 $a=b=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，此时$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=2$.

若 $a\neq b$，依题设可知 a,b 是方程$x^2+3x+1=0$的两根，根据韦达定理可得 $a+b=-3,ab=1$，于是

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{(-3)^2-2\times1}{1}=7.$$

例6 已知 $a=6-b,c^2=ab-9$，求证：$a=b$.

证明 依题设，有

$$\begin{cases}a+b=6,\\ab=c^2+9.\end{cases}$$

根据韦达定理的逆定理知，以 a,b 为实数根的关于x 的一元二次方程为

$$x^2-7x+c^2+9=0, \quad ①$$

此时 $\Delta=6^2-4(c^2+9)=-4c^2\geqslant0$.

故 $c=0$，且 $\Delta=0$. 这表明方程①有相等的根，故 $a=b$.