

高等学校教学参考书

简 明 微 积 分

第 三 册

龚 昇 张声雷 编

高等教育出版社

本书第一、二册以介绍微积分的概念和方法为主，突出微分与定积分这一对矛盾，未对微分与积分的基础理论多加探讨。本册是在第一、二册基础上，用 ε - N , ε - δ 语言，对微积分的基础理论作进一步讨论。在本书中，编者将连续与离散作为一对矛盾，在这个观点下，介绍了无穷级数与无穷积分，Fourier 级数与积分。本书重点突出，叙述严谨、清楚。通过一、二、三册的学习，可使读者对微积分有一个较全面、深刻的了解与认识。本书可作理科各专业的教学参考书。

本册由黄正中教授审阅。

高等学校教学参考书

简明微积分

第三册

龚昇 张声雷 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

二二〇七印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.125 字数 148,000

1983 年 9 月第 1 版 1984 年 3 月第 1 次印刷

印数 00,001—15,300

书号 13010·0921 定价 0.78 元

目 录

第九章 ε - δ 语言	1
第一节 数列极限的 ε - N 语言	1
1.1 数列极限的定义	1
1.2 数列极限的一些性质	3
1.3 极限存在的判别准则	6
第二节 函数连续性的 ε - δ 语言	16
2.1 连续趋限	16
2.2 连续函数的定义	20
2.3 连续函数的一些基本性质	24
2.4 函数的一致连续性	26
第三节 定积分的存在性	33
3.1 Darboux 和	33
3.2 连续函数的可积性	35
3.3 定积分概念的推广	38
第十章 无穷级数与无穷积分	47
第一节 数项级数	47
1.1 基本概念	47
1.2 一些收敛判别法	49
1.3 条件收敛级数	55
第二节 函数项级数	62
2.1 无穷次相加产生的问题	62
2.2 一致收敛函数列	64
2.3 一致收敛函数项级数	69
2.4 隐函数存在定理	72
2.5 常微分方程解的存在性与唯一性	76
第三节 幂级数与 Taylor 级数	89
3.1 幂级数的收敛半径	89

3.2 幂级数的性质	93
3.3 Taylor级数	99
3.4 幂级数的应用	106
第四节 无穷积分与含参变量积分	121
4.1 无穷积分的收敛判别法	121
4.2 含参变量的积分	132
4.3 含参变量的无穷积分	136
4.4 几个重要的无穷积分	148
第十一章 Fourier 级数与 Fourier 积分	161
第一节 Fourier 级数	161
1.1 三角函数系的正交性	161
1.2 Bessel 不等式	171
1.3 Fourier 级数的收敛判别法	174
第二节 Fourier 积分	179
2.1 Fourier 积分	179
2.2 Fourier 变换	182
后记	189

第九章 $\varepsilon - \delta$ 语言

第一节 数列极限的 $\varepsilon - N$ 语言

1.1 数列极限的定义

在本书的前二册中, 已经介绍了单变量与多变量函数的微积分. 单变量函数的微分与积分是由微积分基本定理, 即通常说的牛顿-莱布尼茨公式揭示它们是一对矛盾. 多变量函数的微分与积分是由 Stokes 公式揭示它们是一对矛盾. 在这一章中, 我们要进一步用精确化的语言, 将前二册中学过的内容再重新叙述一遍.

因为极限是微积分的基础概念, 我们首先从极限的概念开始.

在第一章第一节 1.1 中已经介绍了极限的概念. 对于无穷数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

来说, 当项数 n 无限增大时, 数列的项如果无限趋近于一个固定的常数 a , 就是说, 无论预先给定怎样小的正数, 在数列里都能找到一项, 从这项起, 以后所有项与 a 的差的绝对值, 都小于预先给定的小的正数, 那末固定常数 a 就叫做这无穷数列的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

这也就是, 以 a 为中心画出一个小区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, 当 n 大到一定程度以后, a_n 皆落入到小区间以内. 若小区间再小, 只要 n 大到更大的程度以后, a_n 又落入小区间以内, 不管小区间多小, 都是如此. 因此, 数列极限可定义为: 设有数列 a_n , 如果有一定数 a ,

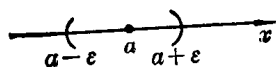


图 9.1

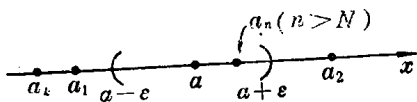


图 9.2

对于不管怎样小的一个正数 ε ，都相应地存在一个自然数 $N = N(\varepsilon)$ (它随 ε 而变动)，只要 $n > N$ ，就有 $|a_n - a| < \varepsilon$ ，则说 a 为数列 a_n 的极限，记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。或简记为 $\lim a_n = a$ ，也可记为 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ ，或简记为 $a_n \rightarrow a$ 。由此立即可推出，在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之外，只能有有限个 a_n 。

上述定义用语，习惯上称为“ ε - N ”语言。

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$ 。

证 任给 $\varepsilon > 0$ ，要使 $\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| = \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$ ，只要 $n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$ ，即 $n > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ 。因此，只要取一自然数 $N \textcircled{1} > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ，则当 $n > N$ 时，

$$\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| < \frac{1}{N^\alpha} < \varepsilon。$$

例 2 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 1)$ 。

证 因 $a > 1$ ，故 $a^{\frac{1}{n}} > 1$ ，令 $\alpha_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ ，则 $\alpha_n > 0$ ，于是

$$a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \dots + \alpha_n^n > n\alpha_n$$

所以 $\alpha_n < \frac{a}{n}$ 。因此，任给 $\varepsilon > 0$ ，只要取自然数 $N > \frac{a}{\varepsilon}$ ，则当 $n > N$ 时，

$$|a^{\frac{1}{n}} - 1| = \alpha_n < \frac{a}{N} < \varepsilon$$

若数列 a_n 以一数 a 为其极限，则说数列 a_n 是收敛的， a_n 收敛于 a 。反之，则说数列 a_n 是发散的。

① 或只要取 $N = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] + 1$ ， $[a]$ 表示 a 的整数部分。

1.2 数列极限的一些性质

有了 ε - N 语言后, 我们可以证明数列极限的一些基本性质. 例如, 第一册中一开始就说: 如果两个数列有极限, 那末这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限, 分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商(作为除数的数列极限不能为零). 就是说, 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

那末

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

现在用 ε - N 语言证明第一个式子.

由于

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b|, \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 则有自然数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon/2$$

又有自然数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \varepsilon/2$$

因此, 当 $n > N = \max(N_1, N_2)$ 时,

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

这就证明了第一个式子. 其他几个式子都可以用同样办法证明.

由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

可以得到: 如果 k 为常数, 那末

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k a$$

由 ε - N 语言, 还容易证明如下一些极限的性质.

1. 若数列有极限, 则只有一个极限.

证 设 a_n 有两个极限 a 与 b ($a \neq b$), 取 $\varepsilon = |a - b|/3$, 这样, 小区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 与 $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ 不相交, 无公共点, 因为 a 是 a_n 的极限, 故只有有限项在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之外, 所以只有有限个 a_n 落在 $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ 内. 但 b 也是 a_n 的极限, 这是不可能的, 得到矛盾.

若有正数 M , 使 $|a_n| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$), 则说 a_n 有界. 若有一数 A , 使得 $a_n \leq A$ ($n = 1, 2, \dots$), 则说 A 是数列 a_n 的上界. 若有一数 B , 使得 $a_n \geq B$ ($n = 1, 2, \dots$), 则说 B 是数列 a_n 的下界. 既有上界又有下界的数列称为有界数列.

2. 收敛数列必有界.

证 设数列 a_n 收敛, 极限为 a . 取 $\varepsilon = 1$, 则有自然数 N , 当 $n > N$ 时, $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$. 取 $M = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a| + 1)$, 显然 $|a_n| \leq M$ 对一切 $n = 1, 2, \dots$ 都成立, 即 a_n 有界.

3. 若 $\lim a_n = a, \lim b_n = b$, 且 $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $a \leq b$.

证 设 $a > b$, 取 $\varepsilon = \frac{a - b}{2}$, 则有自然数 N , 当 $n > N$ 时, $b_n < \frac{a + b}{2} < a_n$, 这与假设相矛盾.

注意, 如果假设是 $a_n < b_n$, 则结论仍是 $a \leq b$, 并不一定有 $a < b$.

b. 看例子 $0 < \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 但

$$\lim 0 = 0 = \lim \frac{1}{n}.$$

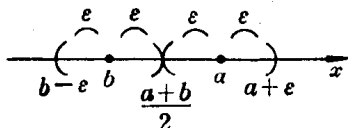


图 9.3

4. 若 $b_n \leq a_n \leq c_n$, 且 $\lim b_n = \lim c_n = a$, 则 $\lim a_n = a$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 由假设, 有自然数 N , 当 $n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$$

因此, 当 $n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < a + \varepsilon, \text{ 即 } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

例1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 4}{5n^3 + 6n + 7}$.

解 由于

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + 4}{5n^3 + 6n + 7} = \frac{2 + 3 \cdot \frac{1}{n} + 4 \cdot \frac{1}{n^3}}{5 + 6 \cdot \frac{1}{n^2} + 7 \cdot \frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{2 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{2}{5}$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, 极限为 $\frac{2}{5}$.

例2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例3 若 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

证 当 $a > 1$ 时, 证明见 1.1 例 2.

当 $a = 1$ 时, 结论是显然的.

当 $0 < a < 1$ 时, 由于 $a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}$, 而 $\frac{1}{a} > 1$, 故 $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), 从而 $a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$). 因此, 当 $a > 0$ 时, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$).

例4 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

解 当 $\lambda > 0$ 时, 因

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \dots + \lambda^n$$

所以

$$(1+\lambda)^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2, \text{ 命 } \lambda = \sqrt[n]{n} - 1, \text{ 则有}$$

$$n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

故当 $n \geq 2$ 时,

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} = 0$, 因之, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

1.3 极限存在的判别准则

什么样的数列有极限? 如果有, 这极限是什么? 当然我们可以根据数列极限的定义进行验证. 但困难的是, 要根据定义来验证, 先要知道 a 是什么? 一般来说, 这是事先不知道的. 当然我们可以用一些 a 去试试, 可是这样做带有很大的盲目性. 能否不必先知道 a , 直接从数列本身来判断它是否收敛呢? 这里介绍二种收敛判别准则.

所谓一个数列 a_n 是单调增加的, 是指 $a_n \leq a_{n+1}$ 对所有的 $n = 1, 2, \dots$ 都成立. 同样, 如果 $a_n \geq a_{n+1}$ 对所有 $n = 1, 2, \dots$ 都成立, 则称 a_n 为单调减少的.

有了这些定义后, 可以有如下的判别准则:

1. 单调增加(减少)数列如有上(下)界必有极限.

这个准则, 直观上易于看出是正确的, 但严格的证明却不大容易.

我们称所有的无穷小数(有穷小数也可以看作无穷小数)为实数,即实数 a 可表为一个整数部分 α_0 , 及小数部分 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$, 这里每个 $\alpha_i (1 \leq i < \infty)$ 为 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中这十个数字之一. 如果这个无穷小数只有有限位, 或是一个循环小数, 那末这个实数是一个有理数, 即 a 可以写成 p/q , 此处 p, q 均为整数. 如这个无穷小数是一个不循环的无穷小数, 则称为无理数.

若 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$ 为一单调增加数列, 且有上界 M , 即

$$a_n \leq M, n = 1, 2, \dots$$

由于每个 a_n 为一实数, 故为一无穷小数. 先来比较所有 a_n 的整数部分, 由于 a_n 有上界, 故 a_n 的整数部分, 除掉前面有限项以外, 从某一项开始, 一定是一个不再变化的数, 例如为 α_0 , 再来比较它们的第一位小数, 也一定从某一项起都相同, 例如为 α_1 , 如此继续进行下去, 就得到一个无穷小数 $a = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$, 这个实数 a 就是极限. 现在证明 a 的确为数列 a_n 的极限.

事实上, 任取 $\varepsilon > 0$, 可取一自然数 k , 使

$$a - \varepsilon < \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$$

因 $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 不是 a_n 的上界, 故必有 a_N , 使得

$$a - \varepsilon < \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k < a_N \leq a$$

由于 a_n 是单调增加的, 故当 $n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$$

即 a_n 收敛于 a .

同样可证, 单调减少数列如有下界必有极限.

例1 设 $\alpha \geq 2$,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

证明 a_n 收敛.

证 a_n 显然是单调增加的, 故只须证明数列 a_n 有上界. 事实上,

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad (n=1, 2, \cdots). \end{aligned}$$

例 2 试证

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ 重根式})$$

有极限.

证 先证 $a_n < 2$. 当 $n=1$ 时, $\sqrt{2} < 2$, 假定 $a_k < 2$, 则 $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < 2$. 故由归纳法知 $a_n < 2$. 另一方面, a_n 是单调增加数列, 故有极限.

最重要的例子, 也许是

例 3 证明

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

有极限.

证 先证 a_n 单调增加.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)1}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) < 1 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1} \end{aligned}$$

再证 a_n 有上界

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 3$$

我们已在第一册(第 29 页)中知道, a_n 的极限就是

$$e = 2.718281828459045 \dots$$

在这个判别准则中, 如果数列没有单调性, 是否还有极限呢? 当然不一定. 如果一个数列不仅有上界, 而且也有下界(这时称数列是有界的), 那末, 我们可以从这个数列中选出一个子列, 使得这个子列是有极限的. 这就是

2. Bolzano-Weierstrass 判别准则

在一有界数列中, 一定可以选出一个有极限的子列.

证 由假设, 数列 a_n 有界, 故有区间 $[A, B]$, 使得所有 a_n 都落在这区间内. 将 $[A, B]$ 平分成二个区间, 那末其中必有一个是含有无穷个点的, 假定含有无穷个点的那个区间为 $[A_1, B_1]$, 显然有

$$B_1 - A_1 = \frac{1}{2}(B - A)$$

同法将区间 $[A_1, B_1]$ 再一分为二, 则其中必有一个是含有无穷个点的. 等等. 第 k 次分出的区间 $[A_k, B_k]$ 也同样含有无穷多个点.

这些区间, 每一个都包含在前一个中, 且每个区间的长度为前一个区间的长度的一半, 所以第 k 个区间的长度为

$$B_k - A_k = \frac{1}{2^k}(B - A)$$

当 k 趋于无穷时, 这长度趋于零. 如此得出二个单调数列

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_k \leq A_{k+1} \leq \cdots$$

$$B_1 \geq B_2 \geq B_3 \geq \cdots \geq B_k \geq B_{k+1} \geq \cdots$$

显然这二个数列都有界,故都有极限. 又由 $A_k - B_k \rightarrow 0$ 可知,这两个极限相等,记为 a , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = a.$$

但 $[A_k, B_k]$ 中含有数列 a_n 中的无穷多个点, 我们任取一个, 命它为 a_{n_k} , 由于

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$$

及

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = a$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

所以我们可以从数列 a_n 中选出一个子列 a_{n_k} , 使得数列 a_{n_k} 是有极限的.

由 Bolzano-Weierstrass 判别准则, 立即得到十分重要的

3. Cauchy 判别准则

设有数列 a_n , 如果对于不管怎样小的一个正数 ε , 都相应地存在一个自然数 $N = N(\varepsilon)$ (它随 ε 而变动), 只要 n, m 都大于 N , 就有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

那末数列 a_n 一定有极限.

证 由假定, 任给一个 $\varepsilon > 0$, 必有 N 存在, 当 $m, n > N$ 时, 都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

固定 m , 则对所有的 $n > N$, 有

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$$

即在 $[a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon]$ 内有无穷个点, 依据 Bolzano-Weierstrass 判别准则, 可以找到一个子列 a_{n_k} , 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

所以仅须证明 a_{n_k} 也趋于 a 。我们可以选取充分大的 n_k , 使

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

不妨要求 $n_k > N$, 于是当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon$$

所以得到: 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

这就是说 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。

Cauchy 判别准则十分重要, 事实上它是数列有极限的充分必要条件。上面已经证明了, 如果数列满足 Cauchy 判别准则, 则数列有极限, 反过来, 如果数列 a_n 有极限, 那末必然满足 Cauchy 判别准则。证明这点十分容易。

如果 a_n 有极限 a , 那末按照定义, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 使 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon/2$$

因之, 对于任意 $m, n > N$, 有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

由于 Cauchy 判别准则中没有用到极限值 a , 所以用起来更方便, 同时它又是数列有极限的充分必要条件, 所以我们可以把 Cauchy 判别准则作为数列有极限的定义。

例 4 求证数列

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$$

收敛。

证 由于

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}$$

对一切自然数 p 都成立, 所以任给 $\varepsilon > 0$, 一定存在 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. 从而 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ 对一切自然数 p 成立, 即当 $m, n > N$ 时, $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 成立. 由 Cauchy 判别准则, 数列 a_n 有极限.

这个数列是非单调的, 因为 $a_{n+1} - a_n = \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}$ 的符号时正时负, 不能用本节中的第一个判别准则来判别, 而且 a_n 的极限值也不是一眼看得出的, 所以用定义来直接验证也很困难, 但用 Cauchy 判别准则却很容易判别.

由于 Cauchy 判别准则是数列收敛的充分必要条件, 所以也能用它判断数列是否发散.

例 5 试证

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

发散.

证 由于

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}$$

当 $p = n$ 时, 就有

$$|a_{2n} - a_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

所以如果选定 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 不管 n 多大, 总有

$$|a_{2n} - a_n| > \varepsilon.$$

这不符合 Cauchy 判别准则的收敛条件, 因之数列 a_n 发散.

习 题

1. 用 ε - N 语言证明下列各题:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (0.1)^n = 0$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1+2^n} = 0 \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\sqrt{n+1}} = 0$$

2. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n}{n^2+1} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-5n+9}{6n^2-2n+1}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+1000}{n-1} \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right) \quad (8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{2n+1}$$

$$(9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1)$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (11) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)} - n)$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1 \right) \quad (14) \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2+4} - n^*)$$

$$(15) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n} \right|$$

$$(17) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$(18) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdots \sqrt[n]{2})$$