

OLYMPIC
MATHS

奥林匹克数学

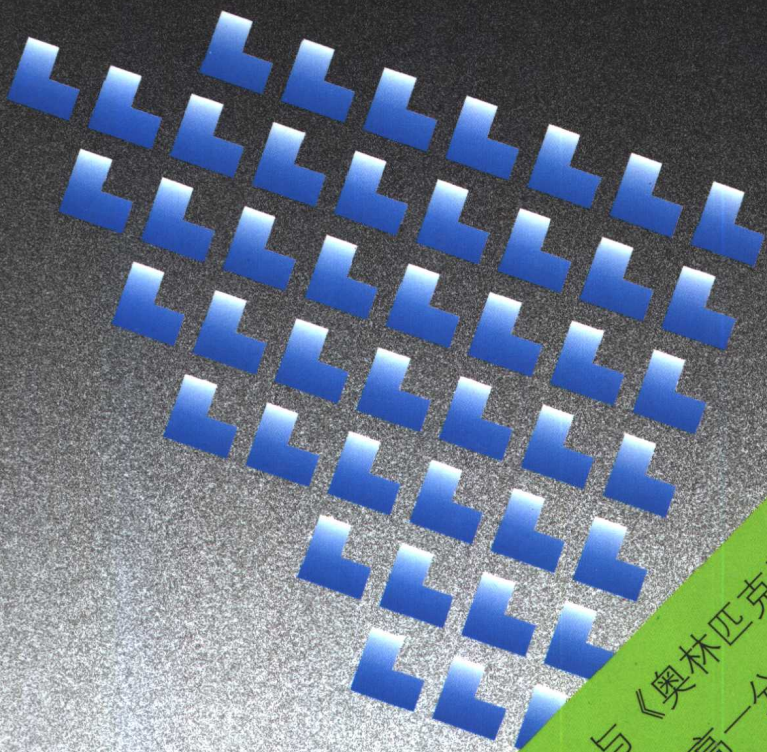


高一分册

训练题集

钱展望 朱华伟 / 编著

湖北教育出版社



与《奥林匹克数学》
高一分册配套

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学训练题集·高一分册/钱展望,朱华伟编著.
—武汉:湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3149-2

I. 奥… II. ①钱…②朱… III. 数学课—高中—习题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011131 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址: <http://www.hbedup.com>

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新华书店
印 刷:湖北新华印务有限公司
开 本:850mm×1168mm 1/32
版 次:2002 年 3 月第 1 版
字 数:154 千字

(430034·武汉市解放大道 145 号)
6.25 印张
2002 年 3 月第 1 次印刷
印数:1-5 000

ISBN 7-5351-3149-2/G·2555

定价:9.50 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

目 录

测试题一	1
测试题二	6
测试题三	13
测试题四	20
测试题五	25
测试题六	31
测试题七	37
测试题八	45
测试题九	50
测试题十	55
测试题十一	60
测试题十二	68
测试题十三	74
测试题十四	81
测试题十五	90
测试题十六	100
测试题十七	107
测试题十八	117
测试题十九	126
测试题二十	132
测试题二十一	138
测试题二十二	142
综合测试题一	146

综合测试题二	154
综合测试题三	163
综合测试题四	172
综合测试题五	180
综合测试题六	189

测试题一

一、选择题

1. 若 $A \cap B = \emptyset$, $P = \{A \text{ 的子集}\}$, $Q = \{B \text{ 的子集}\}$, 则 ().
(A) $P \cap Q = \{\emptyset\}$ (B) $P \cup Q = A \cap B$
(C) $(P \cup Q) \subset (A \cup B)$ (D) $P \cap Q = \{0\}$
2. 设全集为 I , 若 $P \cup T = \overline{P} \cup S$, 则 ().
(A) $T = I$ (B) $P \cup \overline{S} = I$ (C) $T \cup S = I$ (D) $P = T = S$
3. 若集合 $M = \{1992, 4, 5\}$, 集合 $N = \{x | x \in M\}$, 则集合 M 与 N 的关系是 ().
(A) $M = N$ (B) $M \subset N$
(C) $M \supset N$ (D) $M \cap N = \emptyset$
4. 若 $x, y \in \mathbb{R}$, 则集合 $P = \{s | s = x^2 + 3x + 1\}$ 与 $Q = \{t | t = y^2 - 3y + 1\}$ 具有的关系是 ().
(A) $P \cap Q = \emptyset$ (B) $P \subset Q$
(C) $P \supset Q$ (D) $P = Q$
5. 已知 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+$, $A = \{x^2 + x + 1, -x, -x - 1\}$, $B = \{-y, -\frac{y}{2}, y + 1\}$,
若 $A = B$, 则 $x^2 + y^2$ 的值是 ().
(A) 5 (B) 4 (C) 25 (D) 10
6. 集合 $X = \{n | \frac{3^n + 4^n}{5} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$, 集合 $Y = \{t | t = (2k - 1)^2 + 1, k \in \mathbb{N}\}$, 这两个集合的关系是 ().
(A) $X = Y$ (B) $X \subset Y$
(C) $Y \subset X$ (D) $X \not\subset Y$ 且 $Y \not\subset X$

二、填空题

7. 如果 $\{a, a^2 + 1, a + 1\} \subseteq \{x | x^2 \leq 100, x \in \mathbb{Z}\}$, 则 a 的可取值的集合是_____.

8. 已知集合 $A = \{x \mid a + 1 \leq x \leq 2a - 1\}$, 集合 $B = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$, 且 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围为_____.

9. 设全集 $I = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{|a + 1|, 2\}$, $\bar{A} = \{5\}$, 则实数 $a =$ _____.

10. 已知集合 $A = \{x, xy, \sqrt{\frac{1}{xy}} - 1\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A = B$, 则 $(x, y) =$ _____.

11. 已知 $A = \{1, 4\}$, $B = \{x \mid x^2 + bx + c = 0\}$, $A \cup B = A$, $A \cap B = \{4\}$, 则 $b =$ _____.

12. 设集合 $A = \{a^2, a + 1, -3\}$, $B = \{a - 3, 2a - 1, a^2 + 1\}$, $A \cap B = \{-3\}$, $a =$ _____.

三、解答题

13. 已知: $S = \{x \mid x = 14m + 36n, m, n \in \mathbb{Z}\}$, $T = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, 求证: (1) $2 \in S$; (2) $S = T$.

14. 已知 $A = \{y \mid y = x^2 + 2x + 4, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{z \mid z = ax^2 - 2x + 4a, x \in \mathbb{R}\}$. 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值集合.

15. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$, 其中 $a_n (1 \leq n \leq 5)$ 为正整数, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, 又有 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$, $a_1 + a_4 = 10$, $A \cup B$ 中所有元素之和为 224, 求集合 A .

16. 给定 1978 个集合, 每个集合都含有 40 个元素, 已知其中两个集合都恰有一个公共元素, 证明: 存在一个元素, 它属于 1978 个集合.

解 答

一、选择题

1. 解 因 $A \cap B = \emptyset$. 故除 \emptyset 外 A 的子集都不可能为 B 的子集, 选 (A).

2. 解 依题设, $P \subseteq S, \bar{P} \subseteq T$, 而 $P \cup \bar{P} = I$, 故 $S \cup T = I$. 选 (C).

3. 解 $N = \{x \mid x \in M\}$, 表明 N 是集合 M 的所有元素组成的集合, 因此 $M = N$, 选(A).

4. 解 因 $P = \{s \mid s = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}\} = \{s \mid s \geq -\frac{5}{4}\}$, $Q = \{t \mid t = (y - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}\} = \{t \mid t \geq -\frac{5}{4}\}$, $P = Q$. 选(D).

5. 解 由 $(x+1)^2 \geq 0$ 可得 $x^2 + x + 1 \geq -x$, 又 $x^2 + x + 1 > 0$, 根据集合元素的互异性, 知 $x^2 + x + 1 \neq -x$, 即 $x \neq -1$, 此时有 $x^2 + x + 1 > -x > -x - 1$, 又 $y \in \mathbb{R}^+$, 在集合 B 中 $y + 1 > -\frac{y}{2} > -y$, 依题设, 有

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = y + 1 & \text{①} \\ -x = -\frac{y}{2} & \text{②} \\ -x - 1 = -y & \text{③} \end{cases}$$

由②, ③解得 $x = 1, y = 2$. $x = 1, y = 2$ 满足①式. 所以 $x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, 选(A).

6. 解 分别列出 $3^n, 4^n$ 的个位数: $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \dots; 4, 6, 4, 6, 4, 6, \dots$.

可见 $n = 2, 6, 10, 14, 18, \dots$ 时, $\frac{3^n + 4^n}{5} \in \mathbb{N}$, 这表明 $X = \{4n - 2, n \in \mathbb{N}\}$.

另一方面, $(2k-1)^2 + 1 = 4k^2 - 4k + 2 = 4(k^2 - k + 1) - 2$, 可见对任一个 $t \in Y$, 都有 $t \in X$, 注意到 $k^2 - k + 1 = k(k-1) + 1$, 当 $k \in \mathbb{N}$ 时, $k(k-1)$ 是偶数, 所以 $k^2 - k + 1$ 是奇数, 因此 Y 中不存在形如 $8k - 2 (k \in \mathbb{N})$ 的元素, 但 $8k - 2 \in X$, 这表明 $Y \subset X$, 故选(C).

二、填空题

7. 解 同一集合中元素互异, 因此 $a + 1 \neq a^2 + 1$, 所以 $a \neq 0$, 且 $a \neq 1$, 又因 $a \in \mathbb{Z}$, 所以 $a < a + 1 < a^2 + 1$. 因 $a^2 + 1 \leq 10$, 得 $|a| \leq 3$, 考虑到 $a \neq 0, a \neq 1$, 所求的集合是 $\{3, 2, -1, -2, -3\}$.

8. 解 $A \subseteq B$ 有两种情况: (i) $A = \emptyset$, 即 $a + 1 \geq 2a - 1$, 得 $a \leq 2$, (ii) $A \neq \emptyset$, 则

$$\begin{cases} a + 1 \geq -2, \\ 2a - 1 \leq 5, \\ a + 1 < 2a - 1. \end{cases}$$

解得 $2 < a \leq 3$, 所以 $a \leq 3$.

9. 解 依题设, 知 $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5, \\ |a + 1| = 3. \end{cases}$ 解之, 得 $a = -4$ 或 $a = 2$.

10. 解 若 A 中 $x=0$ 或 $xy=0$, 都会导致 A 或 B 中元素重复, 故 $\sqrt{\frac{1}{xy}-1}=0$, $xy=1$. 这样, $|x|=1$ 或 $y=1$. 若 $|x|=1$, 由元素互异性知 $x=-1, y=-1$; 若 $y=1$, 则 $x=1$, A 中元素重复, 所以 $x=y=-1$.

11. 解 由 $A \cup B = A$ 知 $B \subseteq A$. 又因 $A \cap B = \{4\}$, 故 $B = \{4\}$. 因此, 方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有等根 4. 根据韦达定理知 $b = -8$.

12. 解 由 $A \cap B = \{-3\}$ 知 $-3 \in A, -3 \in B$. $-3 \in A$ 是显然的, 因此只须考虑 $-3 \in B$ 的情况.

当 $a-3 = -3$ 时, $a=0$, 这时 $A = \{0, 1, -3\}, B = \{-3, -1, 1\}$. $A \cap B = \{-3\}$, 这与 $A \cap B = \{-3\}$ 矛盾, 因此 $a-3 \neq -3$.

当 $2a-1 = -3$ 时, $a = -1$, 这时 $A = \{1, 0, -3\}, B = \{-4, -3, 2\}$, 满足题设要求, 故 $a = -1$.

三、解答题

13. 证明 (1) 取 $m = -5, n = 2$, 即得 $14m + 36n = 2 \in S$.

(2) 因 $14m + 36n = 2(7m + 18n)$, 所以 $S \subseteq T$, 又 $2k = 14(-5k) + 36 \cdot (2k)$ ($k \in Z$), 故 $T \subseteq S$, 综上所述, 知 $S = T$.

14. 解 $y = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$, 可见 $A = \{x | x \geq 3\}$.

在 $z = ax^2 - 2x + 4a$ 中, 当 $a=0$ 时, $z = -2x$, 这时 z 可取一切实数, 因此 $a=0$ 时, $B = R, A \subseteq B$.

当 $a \neq 0$ 时, $z = a(x^2 - \frac{2}{a}x + 4) = a(x - \frac{1}{a})^2 + (4a - \frac{1}{a})$, 若 $a < 0$, 则 $z \leq 4a - \frac{1}{a}$, 这时 $B = \{z | z \leq 4a - \frac{1}{a}, a < 0\}$, 与 $A \subseteq B$ 矛盾. 当 $a > 0$ 时, $B = \{z | z \geq 4a - \frac{1}{a}, a > 0\}$, 为使 $A \subseteq B$, 只要 $4a - \frac{1}{a} \leq 3$, 且 $a > 0$, 解得 $0 < a \leq 1$, 综上所述, a 的取值集合是

$$\{a | 0 \leq a \leq 1\}$$

15. 解 因 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$, 故 $a_1 \in B, a_4 \in B$, 又 $a_1 + a_4 = 10, a_1 < a_4, a_1, a_4$ 为完全平方数, 故 $a_1 = 1, a_4 = 9$.

依题设, 有

$$1 + a_2^2 + a_3^2 + 9^2 + a_5^2 + a_2 + a_3 + 9 + a_5 = 224 + 9,$$

即

$$a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2. \quad \textcircled{1}$$

因 $a_n \in N$, 故由①得 $a_5 < 11$. 注意到 $a_5 > a_4$, 所以 $a_5 = 10$. 于是①式可变为 $a_2^2 +$

$a_3^2 + a_2 + a_3 = 32$. 唯有 $a_2 = 3, a_3 = 4$, 所以 $A = \{1, 3, 4, 9, 10\}$.

16. 证明 考虑给定的 1978 个集合中任意一个集合 A , 它和其他 1977 个集合的交集非空, 因此存在 $a \in A$, a 至少属于其中 50 个集合. 否则集合 A 恰有 40 个元素, 所以除 A 外至多有 1960 个集合, 不可能. 因此设 $a \in A$ 及 $a \in A_i (i = 1, 2, \dots, 50)$. 下面证明, a 属于给定的其他任意一个集合 B . 事实上, 因任意两个集合恰有一个公共元素, 所以集合 $A, A_1, A_2, \dots, A_{50}$ 中任意两集合除 a 外都没有其他公共元素. 假定 $a \notin B$, 对集合 B 与 $A, A_1, A_2, \dots, A_{50}$ 中每个集合都有一与 a 不同的公共元素而且两两不同. 因此集合 B 至少会有 51 个元素, 不可能. 因此元素 a 属于每个集合.

测试题二

一、选择题

1. 4名学生报名参加数学、计算机、航模课外兴趣小组,每人选报一种,则不同的报名种数是 ().

(A) 4^3 (B) 3^4 (C) 24 (D) 4

2. 满足条件 $\{0,1\} \subset A \subseteq \{0,1,2,3,4\}$ 的集合 A 的个数是 ().

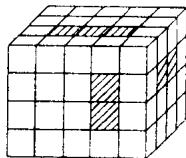
(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 8

3. 将 11 个相同的小球放入 10 个不同的盒子,不出现空盒,不同的放法数为 ().

(A) 1 (B) 10 (C) 2^{10} (D) 2^{11}

4. 如图所示,一个 $5 \times 4 \times 4$ 的长方体,上面有 $2 \times 1 \times 4$, $2 \times 1 \times 5$, $3 \times 1 \times 4$ 的穿透的洞,剩下部分的体积为 ().

(A) 50 (B) 54 (C) 56 (D) 58



5. 三角形的三条边长均为正整数,其中有一条边长为 4,但它不是最长的边,这样的不同的三角形共有 (第 4 题) ().

(A) 6 个 (B) 7 个 (C) 8 个 (D) 9 个

6. 有 6 个棱长分别是 3cm, 4cm, 5cm 的相同的长方体,分别把它们某些面染上红色,使得这些长方体至少有一个面是红色的,并且红色的面的个数彼此不等. 染色后把所有的长方体分割成棱长为 1cm 的小正方体,分割完毕后,恰有一面是红色的小正方体的个数的最大值是 ().

(A) 171 (B) 176 (C) 177 (D) 216

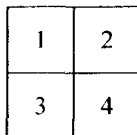
二、填空题

7. 笼中关有许多黑猫与白猫,将笼门打开一个小小的口子,让猫一只接一只地往外跳并依次记下所跳出的猫的颜色,直到跳出 n

只猫为止,有_____种不同的黑白的颜色列.

8. 由非负整数构成的整点 (m, n) 中,如果做加法 $m + n$ 时,不需进位,则称 (m, n) 为“简单点”,这时 $m + n$ 叫做 (m, n) 的和. 和为 1990 的“简单点”有_____.

9. 用四种颜色去涂图中编号为 1, 2, 3, 4 的四个矩形(如右图),使得任意两个相邻矩形颜色都不同,有不同的涂色方法_____种.



10. 某班学生参加数理化三科考试,数、理、化优秀的学生依次分别有 30 人, 28 人, 25 人, 数理、理化、数化两科都优秀的依次分别为 20 人, 16 人, 17 人, 数理化三科全优的有 10 人, 数理化三科至少有一科优秀的有_____人. (第 9 题)

11. 设 $ABCDEF$ 为正六边形,一只青蛙开始在顶点 A 处,它每次可随意地跳到相邻两顶点之一. 若在 5 次之内跳到 D 点,则停止跳动;若 5 次之内不能到达 D 点,则跳完 5 次也停止跳动,那么这只青蛙从开始到停止,可能出现的不同跳法共_____种.

12. 集合 A, B, C 不必两两相异的并集 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, 则在此条件下集合的有序三元组 (A, B, C) 的个数是_____ (答案写成 a^b 的形成).

三、解答题

13. 一只蚂蚁从长方体的顶点出发沿长方体的棱爬行,要经过每个顶点一次且只经过一次,则有多少种不同的爬法?

14. 有一批规格相同均匀的圆棒,每根划分成长度相同的五节,每节用红、黄、蓝三种颜色来涂. 问:可以得到多少种颜色不同的圆棒?

15. 由数字 1, 2 和 3 组成的 n 位数,要求 n 位数中 1, 2 和 3 的每一个至少出现一次,求所有这种 n 位数的个数.

16. 一个圆上有 12 个点 $A_1, A_2, \dots, A_{11}, A_{12}$. 以它们为顶点连三角形,使每个点恰是一个三角形的顶点,且各个三角形的边都不相交,问有多少种连法?

解 答

一、选择题

1. 解 每人报名有 3 种选法, 根据乘法原理, 共有 3^4 种报名方式, 选(B).

2. 解 由于 $\{0, 1\} \subset A$, 故 A 至少有 3 个元素且必含有 0, 1, 又 $A \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 故 A 中元素除 0, 1 外, 其余只能是 2, 3, 4 中一部分或全部, 有 $2^3 - 3 = 7$ 种不同情形. 选(C).

3. 解 由于不出现空盒, 所以应当有一个盒子放两个球, 第一步, 以 10 个不同的盒子中挑选一个盒子放两个相同的球, 有办法 10 种; 第二步, 在余下的 9 个盒子中各放一个相同的小球, 办法只有一种. 根据乘法原理知共有 $10 \times 1 = 10$ 种不同放法不出现空盒, 选(B).

4. 解 原长方体体积是 $5 \times 4 \times 4 = 80$; 三个洞的体积分别是 $2 \times 1 \times 4 = 8$, $2 \times 1 \times 5 = 10$, $3 \times 1 \times 4 = 12$; 三个洞两两相交部分体积分别是: 前两个洞 $2 \times 1 \times 1 = 2$, 后两个洞 $3 \times 1 \times 1 = 3$, 一、三两个洞 $2 \times 1 \times 1 = 2$, 三个洞公共部分体积是 $1 \times 1 \times 1 = 1$. 根据容斥原理, 剩余部分体积是 $80 - (8 + 10 + 12) + (2 + 3 + 2) - 1 = 56$. 选(C).

5. 解 设三角形三边 $a \leq b \leq c$. 显然 $a > 1$. 若 $c = 4$, 则 $a = 2$ 时, $b = 3$. $a = 3$ 时, $b = 4$; 若 $c = 5$, $b = 4$, $a = 2, 3, 4$. 若 $c = 6$, $b = 4$, $a = 3, 4$. 若 $c = 7$, $b = 4$, $a = 4$. 选(C).

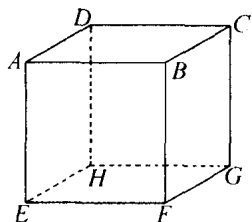
6. 解 如右图, $AD = 5\text{cm}$, $AB = 4\text{cm}$, $AE = 3\text{cm}$.

(i) 一面染色. 将面 $ABCD$ 染红, 则有 20 个一面是红色的小立方体, 而染其他面不能得到多于 20 个一面是红的小立方体.

(ii) 二面染色. 将面 $ABCD$ 和 $EFGH$ 染红色的, 则可得到 40 个一面为红色的小立方体, 将其他二面染红色的, 不能得到多于 40 个一面为红色的小立方体.

(iii) 三面染色. 将面 $ABCD$ 、 $EFGH$ 和 $ABEF$ 染红色, 将得到 36 个一面为红色的小立方体, 将其他三面染色, 将不可能得到更多的一面为红色的小立方体.

(iv) 四面染色. 将面 $ABCD$ 、 $EFGH$ 、 $ABFE$ 和 $CDHG$ 染红色, 将得到 32 个一



(第 6 题)

面为红色的小立方体,这是最多的可能.

(v) 五面染色. 将面 $ABCD$, $EFGH$, $ABFE$, $CDHG$ 和 $CBFG$ 染红色, 将得到 27 个一面为红色的小立方体.

(vi) 六面染色. 可得到 22 个一面染色的小立方体.

最多可得到

$$22 + 27 + 32 + 36 + 40 + 20 = 177$$

个一面为红色的小立方体. 选(C).

二、填空题

7. 解 由于每一次跳出的猫的颜色都有两种可能, 由乘法原理知有 2^n 种不同的颜色序列.

8. 解 注意到和 1990 是一个四位数, 可分四个步骤处理:

① 个位做加法: $0 + 0$, 只有一种办法;

② 十位做加法: $0 + 9, 1 + 8, \dots, 9 + 0$, 有 10 种办法;

③ 百位做加法; 同样也有 10 种办法;

④ 千位做加法: $0 + 1, 1 + 0$, 有两种办法.

由乘法原理知, 和是 1990 的“简单点”共有 $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 200$ 个.

9. 解 将不同的涂法分成两类: (i) 使矩形 2, 3 同色, 有 4 种涂法, 而对其中每种涂法, 矩形 1, 4 都可以从其余的三种颜色中任取一种涂色, 故有 $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ 种涂法; (ii) 使矩形 2, 3 异色, 有 $4 \cdot 3 = 12$ 种涂法, 而对其中每种涂法, 矩形 1 和 4 都可以从其余两种颜色中任取一种涂色, 共有 $12 \cdot 2^2 = 48$ 种涂法.

所以, 总计 $36 + 48 = 84$ 种涂色方法.

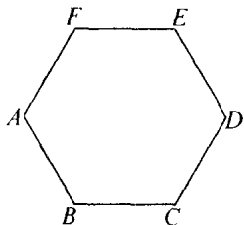
10. 解 以 A_1, A_2, A_3 依次表示数、理、化成绩优秀的学生组成的集合, 则 $|A_1| = 30, |A_2| = 28, |A_3| = 25, |A_1 \cap A_2| = 20, |A_2 \cap A_3| = 16, |A_3 \cap A_1| = 17, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 10$. 数理化三种至少有一科优秀的学生数为

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\ &- |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 30 + 28 + \\ &25 - 20 - 16 - 17 + 10 = 40. \end{aligned}$$

11. 解 如图, 显然青蛙不可能经过跳 1 次, 2 次或 4 次到达 D 点, 故青蛙的跳法只有下列两类情形:

(i) 青蛙跳 3 次到达 D 点, 有 2 种跳法;

(ii) 青蛙一共跳 5 次后停止, 这时, 前 3 次的跳法

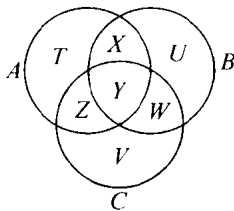


(第 11 题)

一定不到达 D 点,有 $2^3 - 2$ 种,后两次跳法有 2^2 种,故青蛙一共跳 5 次的跳法有 $(2^3 - 2) \cdot 2^2 = 24$ 种.

由(i), (ii)知青蛙共有 $2 + 24 = 26$ 种不同跳法.

12. 如图,把 $A \cup B \cup C$ 划分成互不重叠的七部分 X, Y, Z, W, V, U, T (其中 $Y = A \cap B \cap C, T = A - B - C, X = A \cap B - C$, 等等). 这样, $1, 2, \dots, 9, 10$ 这些元素中的每一个在 $A \cup B \cup C$ 中共有 7 个分配方法, 所以这些元素的总体分配的方案共有 7^{10} 种, 每两种不同的分配方案所得到的三元有序组 (A, B, C) 也必不相同(因为 X, Y, Z, W, U, V, T 是由三元有序组 (A_1, B, C) 惟一确定的)因此, 有序的三元组 (A, B, C) 的个数等于 $1, 2, \dots, 9, 10$ 的总体分配的方案数为 7^{10} .

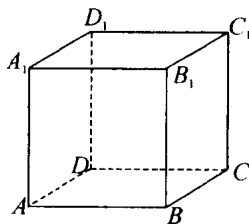


(第 12 题)

三、解答题

13. 解 自 A 出发到下一个顶点有 3 种情形. 不妨设由 A 到 B , 由 B 到下一个顶点有 2 种不同情形, 不妨设由 B 到 C , 由 C 到 C_1 再经过剩下各顶点有 1 种不同情形, 由 C 到 D 再经过剩下各顶点爬法有 2 种, 根据乘法原理和加法原理, 有不同爬法

$$3 \times 2 \times (2 + 1) = 18(\text{种}).$$



(第 13 题)

14. 解 用 $1, 2, 3$ 三个数分别代表三种颜色, 它们组成的一个五位数代表一种涂法, 每一位数都可能三种取法, 即 $1, 2, 3$. 因此, 若涂色不受限制, 根据乘法原理有 3^5 个不同的五位数.

由于棒的规模相同, 均匀, 又都是等分为五节. 因此, 将一个涂过色的棒倒转 180° 来看, 它可能与另一个棒的涂色完全一样, 这两个棒只能是同一种着色. 这就是说一个数与它的反序数代表同一种涂法, 但是有些反序数就是它自身, 如 $11111, 12321$, 这样的数只要确定前三位, 它就确定了. 因此, 这样的数一共有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 个.

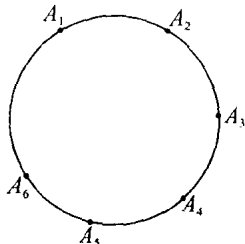
从 243 个不同的五位数中去掉 27 个, 还有 $243 - 27 = 216$ 个, 这 216 个数中每一个数和它的反序数都代表同一种着色方法, 即两个数决定一种着色方法. 所以 216 个数代表 $216 \div 2 = 108$ 种着色方法, 连同前面 27 种, 一共有 135 种不同着色的棒.

15. 解 由数字 1, 2, 3 组成的 n 位数全体构成的集合记作 I , I 中不含数字 1 或 2 或 3 的 n 位数集合分别记为 A_1, A_2, A_3 , 因此 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ 是同时含有数字 1, 2, 3 的 n 位数全体构成的集合. 显然 $|I| = 3^n$, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^n$, $|A_i \cap A_j| = 1 (1 \leq i < j \leq 3)$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \emptyset$, 根据逐步淘汰原理知

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |I| - \sum_{i=1}^3 |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i \cap A_j| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^n - 3 \times 2^n + 3 \times 1 - 0 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

16. 分析 如果圆上只有 3 个点, 那么只有一种连法.

如果圆上有 6 个点, 我们以 A_1 为基点, 如图, 考虑 A_1 点可能所在的三角形, 再计算其他点可以连成多少个满足条件的三角形, 由于要求所要三角形的边不能相交, 除 A_1 点所在三角形的三顶点外, 剩下的三个点一定只能在 A_1 所在三角形的一条边所对应的圆弧上, 下表列出了这时有可能的连法.



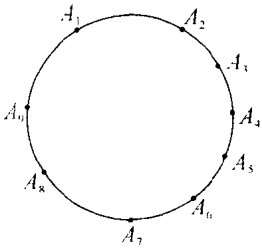
(第 16 题)(1)

A_1 所在三角形	余下点数	种数
$A_1 A_2 A_3$	3	1
$A_1 A_5 A_6$	3	1
$A_1 A_2 A_6$	3	1

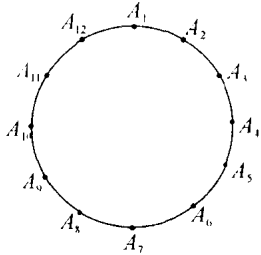
共有 3 种连法.

如果圆上有 9 个点, 考虑 A_1 可能所在的三角形, 如图(2), 此时, 其余的 6 个点可能分布在: (i) A_1 所在三角形的一个边所对弧上, (ii) 也可能三个点在一个边所对应的弧上, 另三个点在另一边所对的弧上, 在下表中用“+”号分开表示它们分布在不同的边所对的弧. 如果是情形(i), 则如前所述, 这六个点有三种连法, 如果是情形(ii), 则又如前所述, 每三个点都只能有一种连法.

A_1 所在三角形	余下点数	种数
$A_1 A_2 A_3$	6	3
$A_1 A_2 A_6$	3+3	1
$A_1 A_2 A_9$	6	3
$A_1 A_5 A_6$	3+3	1
$A_1 A_5 A_9$	3+3	1
$A_1 A_8 A_9$	6	3



(第 16 题)(2)



(第 16 题)(3)

共有 12 种连法.

最后考虑圆周上有 12 个点, 同样考虑 A_1 所在三角形, 如图(3), 剩下 9 个点的分布有三种可能: (i) 每三个点在一个 A_1 所在三角形的边对应的弧上; (ii) 有 6 个点是在一段弧上, 另三点在另一段弧上; (iii) 9 个点都在同一段弧上. 分别计算三种情况的连法, 得到下表, 下表中用“+”号分开的数则表示点分布在不同的弧上, 共有 55 种不同连法.

A_1 所在三角形	余下点数	种数
$A_1 A_2 A_3$	9	12
$A_1 A_2 A_6$	3 + 6	3
$A_1 A_2 A_9$	6 + 3	3
$A_1 A_2 A_{12}$	9	12
$A_1 A_5 A_6$	3 + 6	3
$A_1 A_5 A_9$	3 + 3 + 3	1
$A_1 A_5 A_{12}$	3 + 6	3
$A_1 A_8 A_9$	3 + 6	1
$A_1 A_8 A_{12}$	6 + 3	3
$A_1 A_{11} A_{12}$	9	12

测试题三

一、选择题

1. 集合 $P = \{x \mid x = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $Q = \{y \mid y = \frac{k+2}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则有 ().

- (A) $P = Q$ (B) $P \supset Q$
(C) $P \subset Q$ (D) $P \cap Q = \emptyset$

2. 对任意给定的自然数 n , 若 $n^6 + 3a$ 为正整数的立方, 其中 a 为正整数, 则 ().

- (A) 这样的 a 有无数多个
(B) 这样的 a 存在, 但只有有限个
(C) 这样的 a 存在且惟一
(D) 这样的 a 不存在

3. 设 n 和 k 是大于 2 的自然数, 将 $n(n-1)^{k-1}$ 表示成 n 个连续偶数之和, 则最小的偶数是 ().

- (A) $(n-1)^{k-1} + (n-1)$ (B) $n(n-1)^{k-2}$
(C) $(n-1)^{k-1} - (n-1)$ (D) 不一定存在这样的数

二、填空题

4. 设 1987 可以写成 b 进制三位数 $(xyz)_b$, 且 $x + y + z = 1 + 9 + 8 + 7$, 则 $x = \underline{\hspace{1cm}}$, $y = \underline{\hspace{1cm}}$, $z = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

5. 若 n^n 有 k 位数, 而 k^k 有 n 位数, $n = \underline{\hspace{1cm}}$.

6. 对于由 1 到 100 的全部自然数的任一排列, 其中都有 10 个 (位置) 连续的数, 其和大于或等于 A , 则 A 的最大值是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

7. 一个自然数若能表示为两个自然数的平方差, 则称这个自然数为“智慧数”. 比如 $16 = 5^2 - 3^2$, 16 就是一个“智慧数”. 在自然数列中从 1 开始数起, 第 1990 个“智慧数”是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

8. 不同的自然数 a, b, \dots, k 写成下表形式: 已知表中两个箭头