高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

下　册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

下册

桂子鹏　骆承钦　邱伯驺　张依华 编

人民教育出版社

本书选择同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》(1965年修订本)中一千三百多道题目来解答的，侧重于具有典型性的题和较难的题，还补充了近百道题目及其解答．对初学者来说，我们觉得首先应该自己独立思考，寻求合适的解题方法，得出答案；遇有困难时，再求助于题解．这样有助于独立思考能力的培养和解题技能技巧的掌握．

本书分上、下册出版，下册选解的内容包括定积分、定积分的应用、级数、傅立叶级数、多元函数的微分法及其应用、微分方程、重积分、曲线积分与曲面积分等．

本书系供电视、业余、函授等高等院校师生和自学者使用，也可供科技人员参考．

责任编辑　丁鹤龄

高等学校数学参考书

高等数学习题集

习 题 选 解

下　册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华　编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 11　字数 267,000

1980年11月第1版　1981年2月第3次印刷

印数 270,000—520,000

书号 13012·0483　定价 0.80 元

目　录

第十六章　定积分……1
定积分概念……1
定积分的性质……3
上限(或下限)为变量的定积分……6
计算定积分(应用牛顿-莱布尼兹公式)……7
杂题……15
计算定积分(应用近似积分公式)……22
广义积分……24
补充题……29
第十七章　定积分的应用……33
平面图形的面积……33
体积……40
平面曲线的弧长……46
定积分在力学及物理学上的应用……49
功……49
液体的压力……53
其他的应用……55
第十八章　级数……58
级数……58
补充题……91
第十九章　傅立叶级数……98
第二十章　多元函数的微分法及其应用……109
多元函数……109
偏导数……114
全微分及其应用……118
复合函数的微分法……123
高阶偏导数……127
隐函数的微分法……136
空间曲线的切线及法平面……142
曲面的切平面及法线……148

泰勒公式……………………………………………………………………151
多元函数的极值……………………………………………………………156
补充题…………………………………………………………………………176
第二十一章　微分方程……………………………………………………185
基本概念………………………………………………………………………185
一阶微分方程…………………………………………………………………187
可分离变量的方程……………………………………………………………187
齐次方程………………………………………………………………………192
线性方程及柏努利方程………………………………………………………197
全微分方程，积分因子………………………………………………………205
杂题……………………………………………………………………………211
高阶微分方程…………………………………………………………………219
线性微分方程…………………………………………………………………229
级数解法………………………………………………………………………247
补充题…………………………………………………………………………254
克莱洛方程及其奇解…………………………………………………………254
微分方程组……………………………………………………………………256
第二十二章　重积分………………………………………………………261
二重积分………………………………………………………………………261
三重积分………………………………………………………………………276
曲面面积………………………………………………………………………282
重积分在物理学上的应用……………………………………………………286
补充题…………………………………………………………………………294
二重积分换元法………………………………………………………………294
广义重积分……………………………………………………………………297
积分号下的微分与积分………………………………………………………299
第二十三章　曲线积分与曲面积分………………………………………303
曲线积分………………………………………………………………………303
对弧长的曲线积分……………………………………………………………303
对坐标的曲线积分……………………………………………………………304
与路径无关的曲线积分，格林公式…………………………………………309
曲线积分的应用………………………………………………………………317
曲面积分………………………………………………………………………322
补充题…………………………………………………………………………337

第十六章 定 积 分

定积分概念

16.1. 用积分和式表示抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$, 直线$x=3$, $x=6$ 和横轴所围成的曲边梯形的面积的近似值, 并取和式的极限求其准确值.

解 在$[3,6]$中插入分点 $x_i=3+\frac{3}{n}i(i=0,1,\cdots,n)$, 把$[3,6]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$, 每个小区间的长度都为$\frac{3}{n}$, 取 $\xi_i=x_{i-1}$, 则有积分和式

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\cdot\frac{3}{n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(3+\frac{3}{n}i\right)^2\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\frac{27}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{2}{n}i+\frac{1}{n^2}i^2\right)$$

$$=\frac{27}{2n}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}1+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2\right\}$$

$$=\frac{27}{2n}\left\{n+\frac{2}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}$$

$$=\frac{27}{2}\left\{1+\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right\}$$

$$=\frac{9(2n-1)(7n-1)}{4n^2},$$

此即为曲边梯形面积 S 的近似值. 取极限, 有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9(2n-1)(7n-1)}{4n^2}=\frac{63}{2}.$$

16.4. 把质量为m的物体从地球表面升高到高度为h的位置，需要花费多大的功？用定积分表示之. [地球吸引物体的力按以下的规律来确定: $f=mg\frac{R^2}{r^2}$，其中m表示物体的质量，R表示地球的半径，r表示地球中心到物体的距离.]

解 物体从地面升高到h高度，即r从R增加到$R+h$. 把区间$[R,\ R+h]$分成n个小区间：$[r_{i-1},\ r_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$，其中$r_0=R$, $r_n=R+h$，并记$\Delta r_i=r_i-r_{i-1}$. 则当r从r_{i-1}增加到r_i时，需花费的功为

$$\Delta A_i\approx f_i\Delta r_i=mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

因此，当r从R增加到$R+h$时，需花费的功

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i.$$

按定积分的定义，有

$$A=\lim_{\|\Delta r\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{r^2}dr.$$

16.6. 直接应用定积分定义计算下列积分：

(b) $\int_0^1 e^x dx$,

(c) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

解 (b) 等分$[0,1]$成n个小区间$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\ (i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度都为$\Delta x=\frac{1}{n}$. 于是有

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{1+\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

因 $$\lim_{t\to+\infty} t(e^{\frac{1}{t}}-1)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{t}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}}=1,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)=1$. 而 $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$, 所以

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}=e-1.$$

(c) 在[1, 2]中插入坐标为 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}$ 的分点, 取 $q^n=2$, 即 $q=2^{\frac{1}{n}}$, 则[1, 2]分成为 n 个小区间 $[q^{i-1}, q^i]$, $(i=1, 2, \cdots, n)$, 其长度为 $\Delta x_i=q^i-q^{i-1}=q^{i-1}(q-1)$. 取 $\xi_i=q^{i-1}$, 于是有

$$\begin{aligned}\sigma_n&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{i-1}}q^{i-1}(q-1)\\&=\sum_{i=1}^{n}(q-1)=n(q-1)=n(2^{\frac{1}{n}}-1).\end{aligned}$$

因 $$\lim_{t\to+\infty} t(2^{\frac{1}{t}}-1)=\lim_{t\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}2^{\frac{1}{t}}\ln 2=\ln 2,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln 2$.

又 $|\Delta x_i|\leqslant 2|2^{\frac{1}{n}}-1|$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{n}}-1)=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta x_i|=0$, 即 $\|\Delta x\|\to 0$ (当 $n\to\infty$ 时),

所以 $$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sigma_n=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\ln 2.$$

定积分的性质

16.7. 说明(不计算它们的值)下列积分哪一个较大:

(a) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$?

(b) $\int_1^2 x^2dx$ 还是 $\int_1^2 x^3dx$?

解 (a) 因在[0, 1]中 $x^2\geqslant x^3$, 故$\int_0^1 x^2dx\geqslant\int_0^1 x^3dx$.

按 16.123 题, 若在$[a, b]$上$f(x)$连续, $f(x)\geqslant 0$, $\int_a^b f(x)dx=0$, 则在$[a, b]$上 $f(x)\equiv 0$. 亦即若 $f(x)\geqslant 0$, $f(x)\not\equiv 0$, 则$\int_a^b f(x)dx\neq 0$.

今在[0, 1]中, $x^2-x^3\geqslant 0$ 且 $x^2-x^3\not\equiv 0$, 故$\int_0^1(x^2-x^3)dx\neq 0$, 即 $\int_0^1 x^2dx\neq\int_0^1 x^3dx$, 因此有

$$\int_0^1 x^2dx>\int_0^1 x^3dx.$$

(b) 因在[1, 2]上$x^2\leqslant x^3$, 故$\int_1^2 x^2dx\leqslant\int_1^2 x^3dx$.

类似(a), 可知$\int_1^2 x^2dx\neq\int_1^2 x^3dx$, 因此有

$$\int_1^2 x^2dx<\int_1^2 x^3dx.$$

16.8. 估计下列各积分的值:

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)dx$,

(d) $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$.

解 (b) 记$f(x)=1+\sin^2x$, 先求$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$中的最大、最小值. $f'(x)=2\sin x\cos x$, 令 $f'(x)=0$, 得驻点

$$x=\frac{\pi}{2}, x=\pi;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2, f(\pi)=1,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{3}{2},$$

故在$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$上, $\max f(x)=2$, $\min f(x)=1$. 因 $1\leqslant f(x)\leqslant 2$, 所以

$$\pi \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x) dx \leqslant 2\pi.$$

(d) 记 $f(x)=e^{x^2-x}$. 有$f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$.

令 $f'(x)=0$, 得$x=\frac{1}{2}$. $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}, f(0)=1, f(2)=e^2$.

故在[0, 2]上, $e^{-\frac{1}{4}} \leqslant f(x) \leqslant e^2$, 所以

$$2e^{-\frac{1}{4}} \leqslant \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leqslant 2e^2.$$

16.10. 试计算函数 $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$在区间[1, 8]上的平均值.

解 平均值 $\bar{y}=\frac{1}{7}\int_1^8 y dx=\frac{1}{7}\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

把[1, 8] n等分, 分点为 $x_i=1+\frac{7}{n}i\ (i=0, 1, 2, \cdots, n)$.

取 $\xi_i=\left[\frac{1}{3}\left(x_i^{\frac{2}{3}}+(x_i x_{i-1})^{\frac{1}{3}}+x_{i-1}^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{3}{2}}$, 显然 $x_{i-1}<\xi_i<x_i$. 于是

$$\begin{aligned}
y(\xi_i) &= 2\left[\frac{1}{3}\left(x_i^{\frac{2}{3}}+(x_i x_{i-1})^{\frac{1}{3}}+x_{i-1}^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{-1} \\
&= 6\left[\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)\left(x_i^{\frac{2}{3}}+x_i^{\frac{1}{3}}x_{i-1}^{\frac{1}{3}}+x_{i-1}^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{-1}\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right) \\
&= 6(x_i-x_{i-1})^{-1}\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{6}{7}n\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right), \ (i=1, 2, \cdots, n).
\end{aligned}$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} \frac{6}{7}n\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{7}{n}$$

$$=6\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)=6\left(x_n^{\frac{1}{3}}-x_0^{\frac{1}{3}}\right)=6.$$

即 $\int_1^8 y dx=6$. 所以 $\bar{y}=\frac{6}{7}$.

注 类似16.6(c)，取 $x_i=q^i(q^n=8)$，$\xi_i=x_i$，亦可求得结果.

上限(或下限)为变量的定积分

16.12. 试求函数 $y=\int_0^{z^2}\frac{dx}{1+x^3}$ 对 z 的二阶导数当 $z=1$ 时的值.

解 记 $F(u)=\int_0^u\frac{dx}{1+x^3}$，则 $y=F(z^2)$. 于是

$$\frac{dy}{dz}=F'(z^2)\cdot 2z=\frac{2z}{1+z^6},$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{2(1+z^6)-12z^6}{(1+z^6)^2}=\frac{2(1-5z^6)}{(1+z^6)^2},$$

故

$$\left.\frac{d^2y}{dz^2}\right|_{z=1}=-2.$$

16.15. 试求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所决定的隐函数对于 x 的导数 y'.

解 等式两边对 x 求导，得

$$e^y\cdot y'+\cos x=0,$$

故

$$y'=-\cos x\cdot e^{-y}.$$

16.16. 当 x 为何值时函数 $I(x)=\int_0^x xe^{-x^2}dx$ 有极值?

解 $I'(x)=xe^{-x^2}$，令 $I'=0$，得驻点 $x=0$. 当 x 增大而经过0时，$I'(x)$ 由负变正，故 $I(x)$ 在 $x=0$ 时有极小值.

16.17. 物体运动的速度与时间的平方成正比. 设从时间 $t=0$ 开始3秒钟后，物体经过18厘米，试求距离 s 和时间 t 的函

数关系.

解 设从时间 $t=0$ 开始 t 秒钟后，物体经过 $s(t)$厘米，则 $s(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau$. 又 $v(t)=kt^2$, 故

$$s(t)=\int_0^t k\tau^2 d\tau=\left[\frac{1}{3}k\tau^3\right]_0^t=\frac{1}{3}kt^3.$$

由 $s(3)=18$, 得 $18=\frac{1}{3}k\cdot 3^3$, $k=2$. 所以

$$s=\frac{2}{3}t^3.$$

16.19. 一曲边梯形是由抛物线 $y=x^2$, 横轴和变动着的但始终平行于纵轴的直线所围成的. 试求曲边梯形面积的增量 ΔS 及微分 dS 当$x=10$ 且 $\Delta x=0.1$ 时的值. 并求用微分代替增量所发生的绝对误差与相对误差.

解 $S(x)=\int_0^x y(t)dt=\int_0^x t^2 dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x=\frac{1}{3}x^3$, $(x\geqslant 0)$

$$\Delta S\Big|_{\substack{x=10\\ \Delta x=0.1}}=S(10.1)-S(10)=\frac{1}{3}(10.1^3-10^3)$$

$$=\frac{1}{3}\times 30.301=10.100\dot{3},$$

$$dS\Big|_{\substack{x=10\\ \Delta x=0.1}}=S'(10)\Delta x=x^2\Big|_{x=10}\cdot\Delta x=100\times 0.1=10.$$

绝对误差 $|\Delta S-dS|=0.100\dot{3}.$

相对误差 $\left|\frac{\Delta S-dS}{dS}\right|=0.0100\dot{3}.$

计算定积分(应用牛顿-莱布尼兹公式)

在题 16.20—16.38中，计算各定积分:

16.20. $\int_1^3 x^3 dx.$

解 $\int_1^3 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_1^3=\frac{1}{4}(81-1)=20.$

16.35. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^3\theta d\theta.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\theta(\sec^2\theta-1)d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\theta d\operatorname{tg}\theta+[\ln\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)=\frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

16.37. $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta.$

解 $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta=\int_0^{\pi}d\theta+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$

$$=\left[\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}.$$

16.38. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2udu.$

解 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2udu=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

16.39. 设 k 为正整数，证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0 \quad 与 \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0.$$

证 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=\frac{1}{k}[\sin kx]_{-\pi}^{\pi}=0.$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=-\frac{1}{k}[\cos kx]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{k}[\cos k\pi-\cos(-k\pi)]=0.$$

16.40. 设 k、l 为正整数，且 $k\neq l$，证明

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx dx=0$

证 (a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(l+k)x+\sin(l-k)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{l+k}\cos(l+k)x-\frac{1}{l-k}\cos(l-k)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

16.41. 设 k 为正整数，证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx=\pi \quad 及 \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx=\pi.$$

证 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2kx)dx$

$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2kx)dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi.$$

在题 16.42—16.52 中，用分部积分法计算各定积分：

16.42. $\int_0^1 te^t dt.$

解 $\int_0^1 te^t dt=[te^t]_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-[e^t]_0^1=e-(e-1)=1.$

16.47. $\int_0^1 x\,\mathrm{arc\,tg}\,x dx.$

解 $\int_0^1 x\,\mathrm{arc\,tg}\,x dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{arc\,tg}\,x d(x^2+1)$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc\,tg}x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

16.49. $\int_0^{\pi} x^3\sin x dx.$

解 $\int_0^{\pi} x^3\sin x dx=-\int_0^{\pi} x^3 d\cos x=[-x^3\cos x]_0^{\pi}+3\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$

$$=\pi^3+[3x^2\sin x]_0^{\pi}-6\int_0^{\pi} x\sin x dx$$

$$=\pi^3+[6x\cos x]_0^{\pi}-6\int_0^{\pi}\cos x dx$$

$$=\pi^3-6\pi-[6\sin x]_0^{\pi}=\pi^3-6\pi.$$

16.50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx.$

解 记 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=I,$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d\sin x=[e^{2x}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$$

$$=e^{\pi}+2[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=e^{\pi}-2-4I,$$

故 $5I=e^{\pi}-2$, 得 $I=\frac{1}{5}(e^{\pi}-2).$

在题16.53—16.80中，用换元积分法计算各定积分:

16.53. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}.$

解 令 $u=11+5x$, 则当 $x=-2$ 时 $u=1$, 当 $x=-1$ 时 $u=6$, 于是

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\int_1^6\frac{\frac{1}{5}du}{u^3}=-\frac{1}{10}[u^{-2}]_1^6=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36}-1\right)=\frac{7}{72}.$$

16.56. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x dx.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \sin x dx$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x d\cos x = -\frac{2}{7}\left[\cos^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{7}.$$

16.59. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx.$

解 $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x dx = \int_0^1 (e^x-1)^4 d(e^x-1)$

$$= \frac{1}{5}\left[(e^x-1)^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}(e-1)^5.$$

16.61. $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}.$

解 令 $e^x = u$, 则 $x = \ln u$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{\frac{1}{u}du}{1+u} = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \left[\ln\frac{u}{u+1}\right]_1^e$$

$$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2 = \ln\frac{2e}{1+e}.$$

16.66. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}dx.$

解 令 $u = \sqrt{x}$, 则 $x = u^2$,

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{2u^4}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \left(u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}u^3 - u + \operatorname{arc\,tg} u\right]_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$$

16.67. $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx.$

解 令 $u = \sqrt{5-4x}$, 则 $x = \frac{1}{4}(5-u^2)$,

$$\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1 \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{4}(5-u^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}u\right)du = -\frac{1}{8}\int_3^1 (5-u^2)du$$

$$= -\frac{1}{8}\left[5u - \frac{1}{3}u^3\right]_3^1 = \frac{1}{6}.$$

16.70. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}$，

$$\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = -\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}}$$

$$= \left[\ln\left(t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right)\right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$$= \ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right) - \ln\left(\frac{17}{6}+\frac{5}{3}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right) - \ln\frac{9}{2} = \ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

16.73. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 令 $x=a\sin u$，取 $u=\arcsin\frac{x}{a}$，则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\cos^2 u\,du = \frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u\,du$$

$$= \frac{1}{8}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4u)\,du = \frac{\pi}{16}a^4.$$

16.75. $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$,

解 $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^3} \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2\left[\sqrt{1+\ln x}\right]_1^{e^3} = 2.$

16.80. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^6\frac{x}{2}\,dx$.