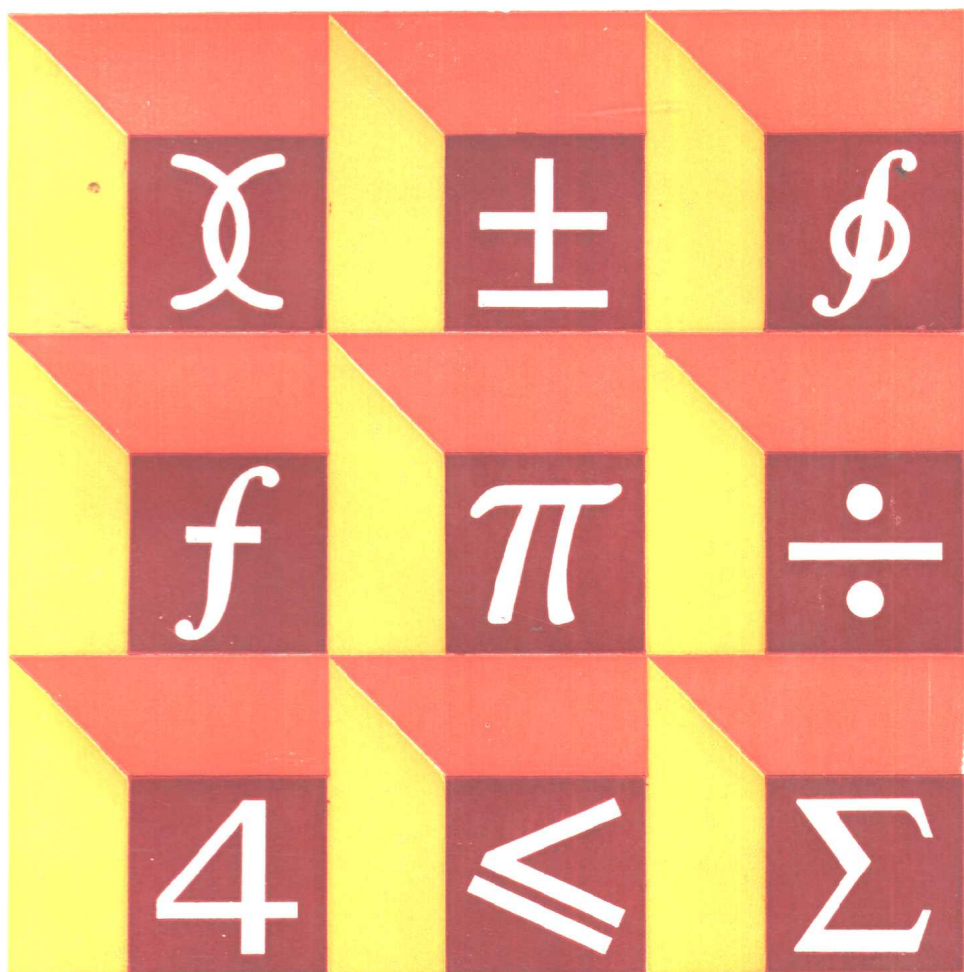


# 美國 歷屆數學 競賽題解

(1950—1972)

廣東人民出版社



# 美國 歷屆數學 競賽題解

( 1950—1972 )

梁偉強 編

廣東人民出版社

**美國歷屆數學競賽題解**

**(1950—1972)**

梁偉強 編

•

廣東人民出版社出版

(原出版者：商務印書館香港分館)

廣東省新華書店發行

廣東粵北印刷廠印刷

850×1168毫米32開本 16.75印張 2插頁 358,000字

1984年3月第1版 1984年3月第1次印刷

印數 1—24,620册

書號 7111·1373 定價 2.45元

## 出版說明

本書原由商務印書館香港分館於1980年編輯、出版。出版後受到廣大讀者的歡迎。為滿足讀者的需要，現與商務印書館香港分館商定，以我社名義，照原書版樣，在廣州出版，向內地發行。

本書收集了1950年至1972年美國數學協會舉辦的數學競賽試題及解答。這些試題的知識面寬，綜合性強，技巧性高，靈活、新穎而具有趣味性。解答較詳盡，敘述較嚴謹。

本書對提高分析推理，抽象思維，以及靈活運用所學知識的能力都有一定的幫助。可作為中學生的課外讀物，也可供中學數學教師教學與輔導課外數學小組時參考。

一九八三年九月

54:45/67

# 前 言

本書是美國數學協會（簡稱 *MAA*）所舉辦的一年一度高中生數學競賽試題滙編。

中學生的周期性的數學競賽，在美國已有五十多年的傳統歷史，但 *MAA* 所舉行的這類型的競賽是在 1950 年才開始，所以本書所收集的試題是從 1950 年起，至 1972 年止，1972 年以後的競賽試題集，將在另一集續編。

1950 年 *MAA* 舉行第一次數學競賽的時候，參加人數很少，只限於紐約和康城地區，直至 1957 年，這種競賽才納入國家的方案。以後參加的地區逐漸擴大，人數也越來越多，1960 年參加的學生人數為 15 萬，而 1972 年參加的學生人數已超過 35 萬了。在美國幾乎每一州或每一地區，甚至加拿大人口較多的省份，都舉辦過這種競賽。

*MAA* 的競賽試是以中學課程為基礎，不需要應用到高深的數學知識，此項競賽不是專門針對高能學生而設，一般學生也可參加，但要取得滿分却是不容易的。在 1950~1959 年，整整十年的數學競賽試中，得滿分者（即 150 分）僅三人，80 分或 80 分以上的均列入 *Honor Roll* 的榮譽名單中。

競賽試題基本上分為三或四部分，前面的一、二部分是有關數學的基本概念及簡單計算技巧的訓練，後面的部分是數學的應用及計算技巧的試測，涉及的範圍較廣，不是教科書上問題的重

演，有時需要花更多腦筋來思考。

試卷成績評定規定如下，有興趣的讀者，不妨試測一下，看看自己的名字能否列入榮譽名單中。

年 度	總題 目數	總分	第一部分		第二部分		第三部分		第四部分	
			題目數	每題 分數	題目數	每題 分數	題目數	每題 分數	題目數	每題 分數
1950~1959	50	150	15	2	20	3	15	4	—	—
1960~1967	40	150	20	3	10	4	10	5	—	—
1968~1972	35	150	10	3	10	4	10	5	5	6

本書在每年度試題之後附有解答，供讀者參閱。

# 目 錄

1950 年試題 .....	( 1 )	解答 .....	(204)
解答 .....	(10)	1960 年試題 .....	(215)
1951 年試題 .....	(22)	解答 .....	(223)
解答 .....	(32)	1961 年試題 .....	(233)
1952 年試題 .....	(44)	解答 .....	(240)
解答 .....	(54)	1962 年試題 .....	(251)
1953 年試題 .....	(68)	解答 .....	(259)
解答 .....	(77)	1963 年試題 .....	(272)
1954 年試題 .....	(89)	解答 .....	(280)
解答 .....	(99)	1964 年試題 .....	(300)
1955 年試題 .....	(112)	解答 .....	(308)
解答 .....	(123)	1965 年試題 .....	(323)
1956 年試題 .....	(134)	解答 .....	(331)
解答 .....	(143)	1966 年試題 .....	(345)
1957 年試題 .....	(155)	解答 .....	(354)
解答 .....	(165)	1967 年試題 .....	(372)
1958 年試題 .....	(176)	解答 .....	(381)
解答 .....	(186)	1968 年試題 .....	(403)
1959 年試題 .....	(195)	解答 .....	(411)

1969 年試題 .....(427)	1971 年試題 .....(476)
解答 .....(435)	解答 .....(484)
1970 年試題 .....(452)	1972 年試題 .....(504)
解答 .....(459)	解答 .....(512)



# 1950 年 試 題

## 第 一 部 分

1. 若 64 分成三部分，且成 2, 4 與 6 之比，其最小部分是：  
(A)  $5\frac{1}{3}$  (B) 11 (C)  $10\frac{2}{3}$  (D) 5 (E) 非上述之答案
2. 設  $R = gS - 4$ ，當  $S = 8$ ，則  $R = 16$ ，當  $S = 10$ ， $R$  等於：  
(A) 11 (B) 14 (C) 20 (D) 21 (E) 非上述之答案
3. 方程式  $4x^2 + 5 - 8x = 0$  之根的和等於：  
(A) 8 (B) -5 (C)  $-\frac{5}{4}$  (D) -2 (E) 非上述之答案
4. 化簡  $\frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$  至最低項，等於：  
(A)  $\frac{a}{b}$  (B)  $\frac{a^2 - 2b^2}{ab}$  (C)  $a^2$  (D)  $a - 2b$   
(E) 非上述之答案
5. 若於 8 與 5832 間插入五個等比中項時，則此等比級數第五項是：  
(A) 648 (B) 832 (C) 1168 (D) 1944  
(E) 非上述之答案
6. 滿足方程式  $2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0$   
 $2x + y + 3 = 0$

之  $y$  值可由下列何方程式解得：

(A)  $y^2 + 14y - 7 = 0$       (B)  $y^2 + 8y + 1 = 0$

(C)  $y^2 + 10y - 7 = 0$       (D)  $y^2 + y - 12 = 0$

(E) 非上述之答案

7. 若數字 1 被安置於兩位數之後，此兩位數之十位數字是  $t$ ，個位數字是  $u$ ，則新數是：

(A)  $10t + u + 1$     (B)  $100t + 10u + 1$     (C)  $1000t + 10u + 1$

(D)  $t + u + 1$       (E) 非上述之答案

8. 若一圓之半徑增加 100%，則面積增加：

(A) 100%    (B) 200%    (C) 300%    (D) 400%

(E) 非上述之答案

9. 內接於半徑為  $r$  之半圓的最大三角形面積是：

(A)  $r^2$     (B)  $r^3$     (C)  $2r^2$     (D)  $2r^3$     (E)  $\frac{1}{2}r^2$

10. 有理化式  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  之分子，則其分母之最簡型是：

(A)  $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$     (B)  $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(C)  $3 - \sqrt{3}\sqrt{2}$       (D)  $3 + \sqrt{6}$

(E) 非上述之答案

11. 於公式  $C = \frac{en}{R + nr}$ ，當  $e, R$ ，與  $r$  不變時，若  $n$  增加，則  $C$ ：

(A) 減少    (B) 增加    (C) 保持不變    (D) 增加然後減少

(E) 減少然後增加

12. 若凸多邊形之邊數由 3 至  $n$  增加，則其外角度量之和：

(A) 增加    (B) 減少    (C) 保持不變    (D) 不能預算

(E) 變成  $(n-3)$  個平角

13.  $(x^2 - 3x + 2)(x)(x - 4) = 0$  之根為：  
 (A) 4 (B) 0 與 4 (C) 1 與 2 (D) 0, 1, 2 與 4  
 (E) 1, 2 與 4
14. 聯立方程式  $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 6y - 4x = 9 \end{cases}$  之解為：  
 (A)  $x = 4, y = 0$  (B)  $x = 0, y = \frac{3}{2}$  (C)  $x = 0, y = 0$   
 (D) 無解存在 (E) 無限解存在
15.  $x^2 + 4$  之實因式是：  
 (A)  $(x^2 + 2)(x^2 + 2)$  (B)  $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$  (C)  $x^2(x^2 + 4)$   
 (D)  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$  (E) 不存在

## 第二部分

16. 展開  $[(a + 3b)^2(a - 3b)^2]^2$ ，並化簡後之項數是：  
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8
17. 如附表中所示，則  $x, y$  之間的關係式為：  
 (A)  $y = 100 - 10x$  (B)  $y = 100 - 5x^2$  (C)  $y = 100 - 5x - 5x^2$   
 (D)  $y = 20 - x - x^2$  (E) 非上述之答案

附表：

$x$	0	1	2	3	4
$y$	100	90	70	40	0

18. 下列 (1)  $a(x - y) = ax - ay$  (2)  $a^x \cdot y = a^x - a^y$   
 (3)  $\log(x - y) = \log x - \log y$   
 (4)  $\frac{\log x}{\log y} = \log x - \log y$  (5)  $a(xy) = ax \cdot ay$  中，

- (A) 只有(1)與(4)真確 (B) 只有(1)與(5)真確  
 (C) 只有(1)與(3)真確 (D) 只有(1)與(2)真確  
 (E) 只有(1)真確

19. 若  $m$  人於  $d$  天可完成一工作，則  $m+r$  人於幾天可完成此工作：

- (A)  $d+r$  天 (B)  $d-r$  天 (C)  $\frac{md}{m+r}$  天 (D)  $\frac{d}{m+r}$  天  
 (E) 非上述之答案

20. 當  $x^3+1$  以  $x-1$  除時，其剩餘是：

- (A) 1 (B)  $-1$  (C) 0 (D) 2 (E) 非上述之答案

21. 長方體之側、前、底面之面積各為 12 平方吋、8 平方吋、6 平方吋時，則其體積是：

- (A) 576 立方吋 (B) 24 立方吋 (C) 9 立方吋  
 (D) 104 平方吋 (E) 非上述之答案

22. 連減 10% 與 20% 之折扣相當於減去多少 % 之折扣：

- (A) 30% (B) 15% (C) 72% (D) 28%  
 (E) 非上述之答案

23. 某人購屋 \$10,000 並出租之，此人取每月租費的  $12\frac{1}{2}\%$  作修繕費；並付年稅 \$325 後，且能以購屋款之  $5\frac{1}{2}\%$  再行投資，則月租費是：

- (A) \$64.82 (B) \$83.33 (C) \$72.08 (D) \$45.83  
 (E) \$177.08

24. 方程式  $x + \sqrt{x-2} = 4$  有：

- (A) 2 實根 (B) 1 實與 1 虛根 (C) 2 虛根 (D) 無根  
 (E) 1 實根

25.  $\log_5 \frac{(125)(625)}{25}$  之值等於：
- (A) 725 (B) 6 (C) 3125 (D) 5 (E) 非上述之答案
26. 若  $\log_{10} m = b - \log_{10} n$ ，則  $m$  等於多少？
- (A)  $\frac{b}{n}$  (B)  $bn$  (C)  $10^b n$  (D)  $b - 10^n$  (E)  $\frac{10^b}{n}$
27. 一汽車行駛於 120 哩之路程上(從  $A$  至  $B$ )，每小時 30 哩，但同一距離回來時每小時 40 哩，來回之旅程之平均速率最近乎：
- (A) 33 mph (B) 34 mph (C) 35 mph (D) 36 mph (E) 37 mph
- (其中 mph 表每小時所行之哩)
28.  $A$ ,  $B$  兩人各騎自行車同時出發，從甲城至乙城，相距六十哩。 $A$  每小時慢  $B$  四哩。 $B$  至乙城即刻折返，遇  $A$  於距乙城 12 哩處。則  $A$  之速率是：
- (A) 4 mph (B) 8 mph (C) 12 mph (D) 16 mph (E) 20 mph
29. 某設計者建造一機器能在 8 分鐘內打出 500 信封之地址，他希望建造另一機器以致於兩者同時操作時能在 2 分鐘內打出 500 信封之地址，那麼僅第二個機器在  $x$  分鐘內能打出 500 信封地址之等式為：
- (A)  $8 - x = 2$  (B)  $\frac{1}{8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$  (C)  $\frac{500}{8} + \frac{500}{x} = 500$
- (D)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{8} = 1$  (E) 非上述之答案
30. 自一羣男女中，女走了 15 名時，則餘下來的男女比例為 2 比 1，在此之後，男走了 45 名。則男女的比例為 1 : 5，問最初之女人數為：

- (A) 40 (B) 43 (C) 29 (D) 50 (E) 非上述之答案
31. 某君定製四雙黑襪子及額外一些藍襪子，黑襪子每雙之價格兩倍於藍的。當定製單填好後，才發現兩顏色的雙數互換了。為此，支出增加 50%。問在原先之定製單上黑襪子的雙數與藍襪子的雙數之比為：
- (A) 4:1 (B) 2:1 (C) 1:4 (D) 1:2 (E) 1:8
32. 25 呎之梯子置放在一建築物之垂直牆上，梯足距建築物底端 7 呎，若梯子之頂端滑下 4 呎則梯足將滑：
- (A) 9 呎 (B) 15 呎 (C) 5 呎 (D) 8 呎 (E) 4 呎
33. 內直徑為 1 吋的圓管子需多少隻管子才能裝與內直徑為 6 吋的圓管子同量的水（假設管長相等）：
- (A)  $6\pi$  (B) 6 (C) 12 (D) 36 (E)  $36\pi$
34. 當一氣球周長由 20 吋增至 25 吋時，則半徑應增加：
- (A) 5 吋 (B)  $2\frac{1}{2}$  吋 (C)  $\frac{5}{\pi}$  吋 (D)  $\frac{5}{2\pi}$  吋 (E)  $\frac{\pi}{5}$  吋
35. 於  $\triangle ABC$  中， $AC = 24''$ ， $BC = 10''$ ， $AB = 26''$  則內切圓半徑為：“ ”表吋)
- (A) 26'' (B) 4'' (C) 13'' (D) 8''
- (E) 非上述之答案

### 第三部分

36. 一商人購貨，按原標價扣去 25%，他希望對貨物定一新標價，以便在標價上能扣去 20% 之後，且在售價上仍獲有 25% 之純利，問此商人必須標的貨價與原標價間的百分比是：

(A) 125% (B) 100% (C) 120% (D) 80% (E) 75%

37. 若  $y = \log_a x$  且  $a > 1$ , 下列之敘述何者不真?

(A) 若  $x = 1$ ,  $y = 0$  (B) 若  $x = a$ ,  $y = 1$

(C) 若  $x = -1$ ,  $y$  是虛數(複數)

(D) 若  $0 < x < 1$ ,  $y$  常小於 0, 且當  $x$  趨近零時, 無限制的減少。

(E) 上列諸敘述中只有某些是真確的。

38. 若  $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$  表  $ab - cd$  之值(對於所有之  $a, b, c$  與  $d$  之值而言)。

則方程式  $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 3$

(A)  $x$  為 1 值可滿足。 (B)  $x$  為  $\frac{3}{2}$  或  $-1$  值可滿足。

(C) 無  $x$  之值可滿足。 (D) 有無窮的  $x$  值可滿足。

(E) 非上述之答案。

39. 已知級數  $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \dots$ , 並有下列五敘述:

(1) 此和無限制增加。

(2) 此和無限制減少。

(3) 序列中的任何項與零之間的差可以使之小於不論怎樣小的任何正量。

(4) 此和與 4 之間的差, 可以使之小於不論怎樣小的任何正量。

(5) 此和趨於一極限。

在這些敘述中，真確者為：

- (A) 只有(3)與(4) (B) 只有(5) (C) 只有(2)與(4)  
 (D) 只有(2), (3)與(4) (E) 只有(4)與(5)

40. 當  $x$  趨近 1 且為極限時， $\frac{x^2-1}{x-1}$  之極限為：

- (A) 0 (B) 不定 (C)  $x-1$  (D) 2 (E) 1

41. 函數  $ax^2+bx+c(a>0)$  之最小值是：

- (A)  $-\frac{b}{a}$  (B)  $-\frac{b}{2a}$  (C)  $b^2-4ac$  (D)  $\frac{4ac-b^2}{4a}$

(E) 非上述之答案

42. 滿足等式  $X^{x^{\dots}} = 2$  的  $x$  為：

- (A) 無窮大 (B) 2 (C)  $4\sqrt{2}$  (D)  $\sqrt{2}$

(E) 非上述之答案

43.  $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \dots$  至無窮之和為：

- (A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{1}{24}$  (C)  $\frac{5}{48}$  (D)  $\frac{1}{16}$  (E) 非上述之答案

44.  $y = \log x$  之圖形：

- (A) 與  $Y$  軸相交 (B) 與所有跟  $X$  軸正交之直線相交

(C) 與  $X$  軸相交 (D) 不與軸相交

(E) 與以原點為中心之所有圓相交

45. 100 邊多邊形可引之對角綫數是：

- (A) 4850 (B) 4950 (C) 9900 (D) 98 (E) 8800

46. 於三角形  $ABC$  中， $AB = 12$ ,  $AC = 7$ , 與  $BC = 10$ , 若邊  $AB$ ,  $AC$  之長均二倍之，而  $BC$  之長不變時，則三角形的



- (A) 面積變二倍 (B) 高變二倍 (C) 面積變四倍  
 (D) 中綫不變 (E) 面積變為 0
47. 一矩形內接於一三角形中，其一底與三角形之底邊  $b$  重合，若三角形之高為  $h$ ，而矩形之高  $x$  為其底之一半時，則，  
 (A)  $x = \frac{1}{2}h$  (B)  $x = \frac{bh}{h+b}$  (C)  $x = \frac{bh}{2h+b}$   
 (D)  $x = \sqrt{\frac{hb}{2}}$  (E)  $x = \frac{1}{2}b$
48. 自等邊三角形內任取一點，由該點至三邊作垂直綫段，這些垂直綫段長之和為：  
 (A) 當此點為此三角形之重心時，最小。  
 (B) 大於此三角形之高。 (C) 等於此三角形之高。  
 (D) 此三角形三邊之和之半。  
 (E) 當此點為此三角形之重心時，最大。
49. 一三角形有長為 2 吋之固定底  $AB$ ，自  $A$  引  $BC$  之中綫，其長為  $1\frac{1}{2}$  吋，但位置可變，則此三角形之頂點  $C$  的軌跡是：  
 (A) 直綫  $AB$ ，自  $A$  之長為  $1\frac{1}{2}$  吋。  
 (B) 一圓，以  $A$  為中心，半徑為 2 吋。  
 (C) 一圓，以  $A$  為中心，半徑為 3 吋。  
 (D) 一圓，半徑為 3 吋，且中心在  $AB$  上，距  $B$  4 吋。  
 (E) 一橢圓，以  $A$  為焦點。
50. 一條私掠船在順風方向 10 哩處發現一商船，其時正為 11:45，私掠船每小時可航行 11 哩，至於商船却只能以每小時 8 哩的速度使勁逃跑。經過兩小時的追縱，私掠船的頂帆失去效用。當此之時，商船能作 15 哩之航行，私掠船却只能作 17