LM 朗曼专题

北京朗曼教学与研究中心教研成果

• 学科专题研究系列丛书 •

主编 任千里

数学专题研究

ShuXueZhuanTiYanJiu

总主编 宋伯涛

高中数学重点问题详析

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

高中数学重点问题详析

主编　任千里

中国青年出版社

责任编辑:李 培 广
封面设计:Paul Song

高中数学重点问题详析

主编 任千里

*
中国青年出版社出版 发行
社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708
三河欣欣印刷有限公司印刷 新华书店总经销
*
850×1168 1/32 11.375印张 320千字
2001年8月北京第1版 2001年8月北京第1次印刷
定价:13.00元
ISBN 7-5006-4543-0/G·1336

敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“朗曼专题”、“北京朗曼教学与研究中心教研成果”等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局100101—89号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编100101。
本中心 E-mail:SPTJWLSQ@163bj.com

出 版 前 言

展望二十一世纪教育发展的未来，必将是以学生素质全面发展为前提，通过减轻学生过重的学业负担，还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此，国家教委进行高考课程改革，推广试用新教材。在这种情况下，我们的助学用书如何适应这一变化，并与素质教育的要求相匹配呢？基于这样的思考与愿望，我们按照新教材的体系，将新教材中有关章节的内容有机组合，编写一套既相互联系，又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共13分册，分别为：1.集合与简易逻辑；2.函数及其性质；3.数列、极限、数学归纳法；4.三角函数；5.向量；6.方程与不等式；7.排列、组合和概率；8.直线、平面、简单几何体；9.直线与二次曲线；10.怎样解高中数学选择题；11.怎样解高中数学应用题；12.高中数学解题方法集锦；13.高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中，始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练，并有意识地引导学生亲历"做数学"的过程，并且最终得出结论。因为，与具体的知识、技能相比，探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说，本丛书在数学教学《大纲》的基础上，本着源于教材且高于教材的要求进行编写，并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索，进行精析和指导，并且坚持了以学生为主体，以学生能力发展为根本的理念，便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准，在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材，并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表，供读者对照使用。

由于作者水平有限，且时间仓促，书中难免存有不尽人意之处，敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001年8月于北师大

目　录

一、等价变形问题

问题 1 判断下述集合的包含关系

$A=\{x\mid f[f^{-1}(x)]=2x-1, x\in R\}$

$B=\{x\mid f^{-1}[f(x)]=2x-1, x\in R\}$，其中 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

分析：注意方程变形的等价性

$$f[f^{-1}(x)]=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}x=g(x)\\x\in f^{-1}(x)\text{的定义域}\end{cases}$$

$$f^{-1}[f(x)]=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}x=g(x)\\x\in f(x)\text{的定义域}\end{cases}$$

解：$f(x)$的定义域为$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq-1\}$

$f^{-1}(x)$的定义域为$\{x\mid x\in R$ 且 $x\neq 1\}$

$\therefore f[f^{-1}(x)]=2x-1$ 的解集为$\varnothing$即 $A=\varnothing$

$f^{-1}[f(x)]=2x-1$ 的解集$\{1\}$即 $B=\{1\}$

$\therefore A\subset B$

解：(略)

说明：若不注意等价性很可能作出 $A=B$ 的误判.

问题 2 解 x 的方程$\dfrac{\lg(x-a)}{lg2x}=2$

分析： 原方程

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-a>0\\2x>0\text{ 且 }x\neq\dfrac{1}{2}\\4x^2=x-a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\text{ 且 }x\neq\dfrac{1}{2}\\4x^2=x-a\end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=-4x^2+x$

$\left(x>0\text{ 且 }x\neq\dfrac{1}{2}\right)$

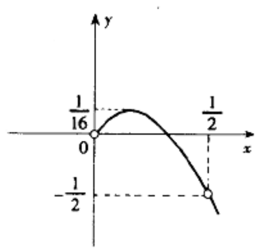

图 1－1

考察曲线 $c_1: y=a$

与曲线 $C_2: y=-4x^2+x\left(x>0\text{ 且 }x\neq\dfrac{1}{2}\right)$

由图象可得：

$a>\frac{1}{16}$或 $a=-\frac{1}{2}$时原方程无解

$a<-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{2}<a\leqslant 0$ 或 $a=\frac{1}{16}$时原方程有一解

$x=\frac{1+\sqrt{1-16a}}{8}$

$0<a<\frac{1}{16}$时原方程有两解：$x=\frac{1\pm\sqrt{1-16a}}{8}$

解：(略)

问题 3 解方程 $\lg(x-1)+\lg(3-x)-\lg(a-x)=0$

分析：要注意变形的等价性，必要时结合图像来解.

解：原方程$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\3-x>0\\a-x>0\\(x-1)(3-x)=a-x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\3-x>0\\(x-1)(3-x)=a-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<3\\-x^2+5x-3=a\end{cases}$

$y=-x^2+5x-3(1<x<3)$的图象如图 1－2

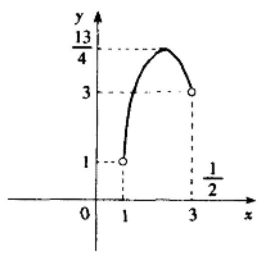

图 1－2

$x^2-5x+a+3=0$ 可得 $x=\frac{5\pm\sqrt{13-4a}}{2}$

由函数 $y=a$ 与 $y=-x^2+5x-3(1<x<3)$的图像可知：

$a\leqslant 1$ 或 $a>\frac{13}{4}$时原方程无解

$1<a\leqslant 3$ 或 $a=\frac{13}{4}$时原方程一解：$x=\frac{5-\sqrt{13-4a}}{2}$

$3<a<\frac{13}{4}$时原方程有两解：$x=\frac{5\pm\sqrt{13-4a}}{2}$

问题 4 解 x 的方程

$$1+\frac{\log_2(2a-x)}{\log_2 x}=2\log_x 2$$

分析：

$$原方程\Leftrightarrow\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\2a-x>0\\x(2a-x)=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\x(2a-x)=4\end{cases}$$

（由 $x>0$ 及 $x(2a-x)=4$ 可推出 $2a-x>0$ 所以可省去 $2a-x>0$）

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\-x+2a=\frac{4}{x}\end{cases}$$

考察曲线 $c_1:y=-x+2a$ 与曲线 $c_2:y=\frac{4}{x}(x>0 \text{ 且 } x\neq 1)$

当 c_1 与 c_2 相切时，$x^2-2ax+4=0$ 的判别式 $\Delta=4(a^2-4)=0$，舍去 $a=-2$ 可得 $a=2$；当 c_1 过点 $(1,4)$ 时 $a=\frac{5}{2}$

这样，观察图象就可得到：

$a<2$ 时无解；$a=2$ 或 $a=\frac{5}{2}$ 时一解：

$x=a+\sqrt{a^2-4}$；$a>2\left(a\neq\frac{5}{2}\right)$ 时两解：$x=a\pm\sqrt{a^2-4}$.

解：（略）

说明：方程、不等式的求解以及函数的变形必须坚持等价变形，本问题将原方程写为$\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\2a-x>0\\x(2a-x)=4\end{cases}$就是一个等价转换而将此三式写为$\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\x(2a-x)=4\end{cases}$又是一个重要的既等价又“简缩”的过程，“简缩”以后问题的处理就会显得十分简洁.

本题在处理$\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\ x(2a-x)=4\end{cases}$时若不用数形结合，也可从对二次方程 $f(x)=x^2-2ax+4=0$ 的根的分布状态进行讨论下手：

由于 $x_1x_2=4$，所以无根状态仅表现在

①无实根　此时 $\Delta=4(a^2-4)<0$　$-2<a<2$

②$x_1<0$ 且 $x_2<0$

此时$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ a<0\\ f(0)>0\end{cases}$　解得 $a\leqslant -2$

这样就得出 $a\in(-2,2)\cup(-\infty,-2]$ 即 $a\in(-\infty,2]$ 时方程无解.

发生下述情形，方程只有一解：

情形一：$x_1=x_2<0$　此时 $\Delta=0$　得 $a=2$

情形二：$\begin{cases}x_1=1\\ x_2>0 \text{ 但 } x_2\neq 1\end{cases}$　此时 $a=\frac{5}{2}$.

这样，我们就知道 $a=2$ 或 $a=\frac{5}{2}$ 时，方程仅有一解.

当$\begin{cases}x_1>0\\ x_2>0\\ x_1\neq x_2\\ x_1\neq 1,x_2\neq 1\end{cases}$　时　可得$\begin{cases}\Delta>0\\ a>0\\ 5-2a\neq 0\end{cases}$

即得 $a>2\left(a\neq\frac{5}{2}\right)$ 时有两个解.

问题 5　解方程 $\tan 5x=\tan 3x$

分析：原方程$\Leftrightarrow\begin{cases}\tan 5x \text{ 有意义} & ①\\ \tan 3x \text{ 有意义} & ②\\ 5x=k\pi+3x & ③\end{cases}$

由③　$x=\frac{1}{2}k\pi(k\in z)$

再由①②检验可得原方程的解为 $x=n\pi(n\in z)$

解：（略）

说明：方程、不等式的求解，函数式的变形均应坚持等价变形，再看几例：

在解方程 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-2$ 时，若化为

$\frac{1+\tan x}{1-\tan x}+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=-2$ 是一个“失根”变形，因为原方程与变形后的方程中 x 的范围不同，前者为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4}$，后者在前者范围的基础上还应增加：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$. 所以 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 这个根就可能失去，对它应进行代入原方程检验. 事实上 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 的确是原方程的解，若不对这个可能失去的根进行检验，就会得出原方程无解的错误结论，若将原方程变形为 $\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=-2$ 这是一个等价变形

再看方程 $\frac{\sin 2x}{\cos x}=\frac{\cos 2x}{\sin x}$. 它应等价于 $\begin{cases}\cos x\neq 0 & ①\\ \sin x\neq 0 & ②\\ \cos 3x=0 & ③\end{cases}$

由③ $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}(k\in z)$

再由①、②检验 原方程解为 $x=n\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=n\pi-\frac{\pi}{6}$ $(n\in z)$

在函数式变形中应注意等价变形的几个例子：

判断 $y=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的奇偶性（等价于 $y=\tan\frac{x}{2}$ $(x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 且 $x\neq 2k\pi+\pi, k\in z)$ 故为非奇非偶）

求函数 $y=\frac{4\sin x(1-\tan^2 x)}{\sec x(1+\tan^2 x)}$ 的最小正周期（它可等价变形为 $y=\sin 4x(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in z)$ 从图象判断得最小正周期为 π. 若不注意括号中的说明，误认为原函数就是 $y=\sin 4x$，则会得出最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的误判）

求函数 $y=\frac{\sin 2x\sin x}{1-\cos x}$ 的值域

（应等价变形为 $y=2\cos x(1+\cos x)(-1\leqslant\cos x<1)$ 这是关于 $\cos x$ 的二次函数，它的值域 $\left[-\frac{1}{2},4\right)$，若仅将原函数变形为 $y=2\cos x(1+\cos x)$，会得出值域为 $\left[-\frac{1}{2},4\right]$ 的误判.）

问题 6　已知 x 的方程 $\dfrac{\lg 2x}{\lg(x+a)}=2$

(1)若此方程有解，求 a 的范围；

(2)若此方程有两解，求 a 的范围.

分析：原方程 $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x+a>0 \text{ 且 } x+a\neq 1\\\sqrt{2x}=x+a\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq\dfrac{1}{2}\\\sqrt{2x}=x+a\end{cases}$

考察曲线 $c_1: y=\sqrt{2x}\left(x>0 \text{ 且 } x\neq\dfrac{1}{2}\right)$ 与曲线 $c_2: y=x+a$

当 c_2 与 c_1 相切时，从 $x^2+(2a-2)x+a^2=0$ 的判别式 $\Delta=(2a-2)^2-4a^2=0$ 得 $a=\dfrac{1}{2}$，切点的横坐标 $x=\dfrac{1}{2}$（舍去）；当 c_2 经过原点时，$a=0$.

这样，我们从图上不难看出：

当 $a<\dfrac{1}{2}$ 时原方程有解；当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时原方程有两解.

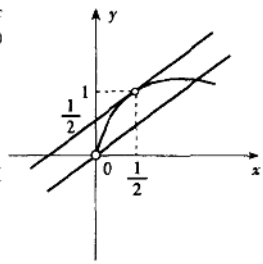

图 1—3

解：(略)

说明：原方程有解的问题也可转为求函数的值域问题，因此第(1)小题还可有下述解法：

$a=-x+\sqrt{2x}\quad\left(x>0 \text{ 且 } x\neq\dfrac{1}{2}\right)$

令 $\sqrt{2x}=t$　则 $t>0$ 且 $t\neq 1$，$x=\dfrac{t^2}{2}$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2}t^2+t\,(t>0 \text{ 且 } t\neq 1)$

对称轴 $t=1$　$\therefore a<\dfrac{1}{2}$.

另外应注意若将原方程转为 $\begin{cases}x>0\\x+a>0 \text{ 且 } x+a\neq 1\\2x=(x+a)^2\end{cases}$，则没有上述解法中将最后一个等式写为 $\sqrt{2x}=x+a$ 简洁.

再提供类似一题：若 x 的方程 $\log_a(x-2)-\log_a(x+2)-\log_a(x-1)=1$ 有解．求 a 的范围．

分析：原方程 $\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\(x-2)=a(x+2)(x-1)\end{cases}$ 原方程有解的问题可转为函数的值域问题：

$$\frac{1}{a}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-2}=(x+3)+\frac{4}{x-2}=(x-2)+\frac{4}{x-2}+5\geqslant 9$$

（当且仅当 $x=4$ 时取"="）

$\therefore$ 原方程有解时 $a\in\left(0,\frac{1}{9}\right]$

当然本题也可用图象解，将问题转为曲线 c_1：$y=\frac{1}{a}(x-2)$ 与曲线 $y=(x+2)(x-1)(x>2)$ 有解时斜率 $\frac{1}{a}$ 的范围．

问题 7　等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，$a_n>0$．是否存在正数 c 使

$\lg(S_n-c)$、$\lg(S_{n+1}-c)$、$\lg(S_{n+2}-c)$ 成等差数列？

分析：问题可转化为关于 c 的方程

$\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)=2\lg(S_{n+1}-c)$（ * ）是否有正数解？

$$\text{方程}(*)\Leftrightarrow\begin{cases}S_n-c>0\\S_{n+1}-c>0\\S_{n+2}-c>0\\(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S_n-c>0\\(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2\end{cases}$$

（简缩的依据是：$\because a_n>0\quad\therefore S_{n+2}-c>S_{n+1}-c>S_n-c$）

将 $(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2$ 再作转换：

当 $q=1$ 时　该方程为

$(na_1-c)[(n+2)a_1-c]-[(n+1)a_1-c]^2=0$

可整理为　$-a_1^2=0$　$\because a_1>0$　$\therefore$ 此时无解　$\therefore$ 正数 C 不存在

当 $q\neq 1$ 时　该方程为

$$\left[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}-c\right]\left[\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}-c\right]-\left[\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}-c\right]^2=0$$

$$\frac{a_1^2}{(1-q)^2}[(1-q^n)(1-q^{n+2})-(1-q^{n+1})^2]$$

$-\frac{a_1c}{1-q}[(1-q^n)+(1-q^{n+2})-2(1-q^{n+1})]=0$

整理得 $a_1q^n[a_1-c(1-q)]=0$

$\because a_1q^n\neq 0 \quad \therefore c=\frac{a_1}{1-q}$

$\because c>0, a_1>0 \quad \therefore 1-q>0$

将 $c=\frac{a_1}{1-q}$ 代入 S_n-c 得 $S_n-c=-\frac{a_1q^n}{1-q}<0$

$\therefore q\neq 1$ 时 正数 C 也不存在.

解:(略)

问题 8 解不等式:

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}$$

分析:该题若用通法:转为能求解的等价组是不可能成功的.下面改用图象法.

原不等式 $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \frac{4x-1}{2x+1}>\log_2(x+2) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0 \\ \frac{4x-1}{2x+1}<\log_2(x+2) \end{cases}$

在同一坐标系中分别画出 $y=\frac{4x-1}{2x+1}\left(\text{即 } y=2-\frac{3}{2x+1}\right)$ 与 $y=\log_2(x+2)$ 的图象可得原不等式的解为 $-\frac{1}{2}<x<0$.

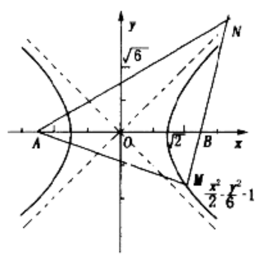

图 1－4

解:(略)

说明：作两个函数图象时均用到了图象的平移变换知识.

函数 $y=2-\dfrac{3}{2x+1}$ 的图象是以 $\left(-\dfrac{1}{2},2\right)$ 为中心，$x=-\dfrac{1}{2}$，$y=2$ 为渐近线的双曲线. $y=\log_2(x+2)$ 是过 $(-1,0)$ 以 $x=-2$ 为渐近线的对数曲线.

本题也可在求出定义域 $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$ 的基础上，对 $\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$、$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$、$(0,+\infty)$ 逐个检查. 比如

当 $x\in\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ 时，原不等式等价于

$$\frac{4x-1}{2x+1}<\log_2(2+x)$$

而此时 $\dfrac{4x-1}{2x+1}=2-\dfrac{3}{2x+1}>2$

$$\log_2(2+x)<\log_2\frac{3}{2}<2$$

$\therefore\quad x\in\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$ 时不等式不成立.

当 $x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 时 $\quad\dfrac{6}{2x+1}>0$

而 $1+\log_2(2+x)>1+\log_2\dfrac{3}{2}>0\quad\therefore\dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}<0$

$\therefore x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 时，原不等式成立

同样可对 $x\in(0,+\infty)$ 时作检查可知原不等式不成立

这样也可得到原不等式的解为 $-\dfrac{1}{2}<x<0$. 但笔者看法是后种解法不及图象法简洁，当然用图象法解题必须掌握良好的图象理论（平移、对称、伸缩等）.

问题 9　解不等式：

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

分析：本题可以用常规的手法转化为能求解的等价组解，但不如结合函数的单调性简单：

考察函数 $y=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$，它定义域为 $[-1,3]$.

$\because$ 在 $[-1,3]$ 上　$y=\sqrt{3-x}$ 递减、$y=-\sqrt{x-1}$ 也递减

$\therefore y=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$在$[-1,3]$上递减

用解无理方程的知识可求得方程$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}$的解为$x=1-\frac{\sqrt{31}}{8}$

$\therefore$不等式的解应为$-1\leqslant x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$.

解:(略)

说明:该题用了单调函数的性质:两个单调性相同的函数的"和函数"的单调性不变.

下面一题也是可用单调性求得不等式的解:

解不等式:$3+x+\log_2 x>4$

解:$\because 3+x+\log_2 x$ 在$(0,+\infty)$上递增($3+x$与$\log_2 x$均在$(0,+\infty)$上递增),而$x=1$时,$3+x+\log_2 x=4$

$\therefore$不等式的解应为 $x>1$.

问题 10 已知奇函数$f(x)$定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,在$(0,+\infty)$上递增,若$f(-2)=-1$且对任意正实数$m$、$n$总有$f(mn)=f(m)+f(n)$

解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}|f(x)+1|>0$

分析:将题设条件作如下发展:

$$\left.\begin{array}{l}f(x)\text{为奇函数}\\ f(x)\text{在}(0,+\infty)\text{上递增}\end{array}\right\}\Rightarrow f(x)\text{在}(-\infty,0)\text{上递增}$$

$$\left.\begin{array}{l}f(x)\text{为奇函数}\\ f(-2)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow f(2)=-f(-2)=1$$

再将原不等式转化为$0<|f(x)+1|<1$,即$-1<f(x)<0$或$-2<f(x)<-1$.若要进一步解出x的范围,由于$f(x)$的单调性是已知的,所以就要思考x取什么数值时$f(x)$的值为-2、-1、0?

于是再回到条件:"对任意正实数m、n总有$f(mn)=f(m)+f(n)$"赋m、n一些正值可产生一些有用的信息:

取$m=n=1$ 则有$f(1)=f(1)+f(1)$ $\therefore f(1)=0$

取$m=n=2$ 则有$f(4)=f(2)+f(2)=2$

取$m=4,n=\frac{1}{2}$则有$f(2)=f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)$