

第 20 篇 机械振动的控制及利用

主要撰稿 蔡学熙 纪盛青
审 稿 李长顺

本篇主要符号

A 、 a ——振幅, m	q ——广义坐标, m 或 rad
A ——面积, m^2	R 、 r ——半径, m
a ——加速度, m/s^2	r ——质量偏心半径, m
B 、 b ——振幅, m	$R(\tau)$ ——相关函数
B ——宽度, m	$S(\omega)$ ——功率谱密度函数
C ——粘性阻尼系数, $N \cdot s/m$	S ——刚度比
C_c ——临界阻尼系数, $N \cdot s/m$	T ——周期, s
C_e ——等效阻尼系数, $N \cdot s/m$	T ——张力, N
C_φ ——粘性扭转 (或摆动) 阻尼系数, $N \cdot m \cdot s/rad$	T ——动能, J; $N \cdot m$
	T ——传递率
D 、 d ——直径, m	t ——时间, s
D ——能量散失函数, J, $N \cdot m$	V ——体积, m^3
D ——抛掷指数	V ——速度, m/s
E ——拉压弹性模量, Pa, N/m^2	V ——势能, J; $N \cdot m$
$F(f)$ 、 $F(\omega)$ ——时域函数的傅里叶变换	v ——速度, m/s
$F(x)$ ——概率分布函数	x ——位移, m
f ——频率, Hz	$\dot{x}$ ——速度, m/s
f_d ——有阻尼固有频率, Hz	$\ddot{x}$ ——加速度, m/s^2
f_i ——多自由度系统第 i 阶固有频率, Hz	y ——位移, m
f_n ——固有频率, Hz	$\dot{y}$ ——速度, m/s
$f(t)$ ——时域函数	$\ddot{y}$ ——加速度, m/s^2
$f(x)$ ——概率密度函数	z ——位移, m
I ——转动惯量, $kg \cdot m^2$	Z ——频率比
I ——冲量, $N \cdot s$	α ——转角, rad
I_p ——极转动惯量, $kg \cdot m^2$	α ——相位角, rad
i ——传动比	α ——倾角, ($^\circ$)
J ——截面惯性矩, m^4	α ——衰减系数
J_p ——截面极惯性矩, m^4	β ——转角, rad
K ——刚度, N/m	β ——相位差角, rad
K_d ——共振时动刚度的模, N/m	β ——放大因子
K_e ——等效刚度, N/m	β ——材料损耗因子
K_φ ——扭转刚度, $N \cdot m/rad$	γ ——转角, rad
L 、 l ——长度, m	δ ——柔度, m/N
M 、 m ——质量, kg	δ ——相对位移, m
M ——力矩, 弯矩, $N \cdot m$	δ ——对数衰减率
M_t ——扭矩, $N \cdot m$	δ ——振动方向角, ($^\circ$)
N ——功率, W 或 kW	δ_{st} ——静变形, m
N ——正压力, Pa, N/m^2	ζ ——阻尼比
n ——转速, r/min	η ——隔振系数
n ——每分钟振次, $1/min$	η_1 ——损耗因子, 摩擦阻尼参数
n_c ——临界转速, r/min	θ ——转角, rad
P ——力, N	θ ——角位移, rad
Q ——力, N	$\dot{\theta}$ ——角速度, rad/s
	$\ddot{\theta}$ ——角加速度, rad/s^2

θ ——扭转(或摆动)振幅, rad

θ ——相位差角, rad

μ ——泊松比

μ ——质量比

μ ——摩擦因数

ρ ——回转半径, m

ρ ——密度, kg/m^3

ρ_A ——面密度, kg/m^2

ρ_l ——线密度, kg/m

σ ——应力, Pa, N/m^2

σ ——标准离差

τ ——时间, s

φ ——转角, rad

φ ——角位移, rad

$\dot{\varphi}$ ——角速度, rad/s

$\ddot{\varphi}$ ——角加速度, rad/s^2

φ ——相位差角, rad

ψ ——相位差角, rad

ψ ——角位移, rad

ω ——圆频率, rad/s

ω_d ——有阻尼固有圆频率, rad/s

ω_n ——固有圆频率, rad/s

$[M]$ ——质量矩阵

$[K]$ ——刚度矩阵

$[C]$ ——阻尼矩阵

$[F]$ ——柔度矩阵

$[A]$ ——动力矩阵

$[I]$ ——单位矩阵

第1章 概述

1 机械振动的分类及工程中的振动问题

表 20-1-1

机械振动的分类

分 类	基 本 特 征	
按产生 振动原因	自由振动	系统在去掉外加干扰力之后出现的振动。这种振动靠弹性力、惯性力和阻尼力来维持。振动的频率就是系统的固有频率(也称自然频率)。因有阻尼力存在,振动逐渐衰减,阻尼愈大,衰减愈快。如果系统无阻尼存在(这只是一种理想状态,实际上是不可能的),则称这种振动为无阻尼自由振动,无阻尼自由振动是一种恒幅简谐振动
	受迫振动	在激振力持续作用下,系统被迫产生的振动。振动特征与外部激振力的大小、方向和频率有关。在简谐激振力作用下,能同时激发起以系统固有频率为振动频率的自由振动和以干扰频率为振动频率的受迫振动,其自由振动部分将逐渐衰减,乃至最终消失,这时只剩下恒幅受迫振动部分,即稳态振动响应
	自激振动	机械系统由于外部能量与系统运动相耦合(即系统的非振荡性能源通过反馈装置)形成振荡激励所产生的振动。当振动停止,振荡激励随之消失。振动频率接近于系统固有频率
按振动 随时间的 变化规律	简谐振动	物体随时间按正弦或余弦函数规律变化的振动
	非简谐振动	系统运动量值按一定时间间隔重复出现的非简谐振动。可用谐波分析方法,将其分解为若干个简谐振动之和
	随机振动	对未来任一给定时刻,物体运动量的瞬时值均不能根据以往的运动历程预先加以确定的振动。只能用数理统计方法来描述系统的运动规律
按振动 系统结构 参数	线性振动	系统的惯性力、阻尼力和弹性恢复力分别与加速度、速度和位移的一次方成正比,能用常数系数线性微分方程描述的振动。能运用叠加原理
	非线性振动	系统的惯性力、阻尼力、弹性恢复力具有非线性特性,只能用非线性微分方程描述的振动。不能运用叠加原理。振动系统的固有频率与振幅有关
按振动 系统的自 由度数目	单自由度系统的振动	用一个广义坐标就能确定系统在任意瞬时位置的振动
	多自由度系统的振动	用两个或两个以上的广义坐标才能确定系统任意瞬时位置的振动
	连续系统的振动	需要用无穷多广义坐标才能确定系统任意瞬时位置的振动。连续系统的振动通常可以简化为有限多自由度系统振动问题加以处理,本篇不再赘述
按振动 形式	纵向直线振动	振动体上的质点只作沿轴线方向的直线振动
	横向直线振动	振动体上的质点只作沿垂直轴线方向的直线振动
	扭转振动	振动体垂直轴线的两平面上质点相对作绕轴线的回转振动
	摆动	振动体上质点在同一平面上作绕垂直平面轴线的回转振动

无论是纵向直线振动或横向直线振动,还是扭转振动和摆动都具有相同的规律性,可以举一反三,有关直线振动和定轴转动振动系统类比参见表 20-3-4

表 20-1-2

机械工程常见的振动问题

振动问题	振 动 控 制	振 动 利 用
共 振	当外部激振力的频率和系统固有频率接近时,系统将产生强烈的振动,这在机械设计和使用中,多数情况下是应该防止或采取控制措施。例如:隔振系统和回转轴系统应使其工作频率和工作转速在各阶固有频率和各阶临界转速的一定范围之外。尽管如此,机械系统在启动和停机过程中,仍然要通过共振区,仍有可能产生较强烈的振动,必要时需采取抑制共振的减振、消振措施	在近共振状态下工作的振动机械,就是利用弹性力和惯性力基本接近于平衡以及外部激振力主要用来平衡阻尼力的原理工作的,因而所需激振力和功率较非共振类振动机械显著减小

续表

振动问题	振 动 控 制	振 动 利 用
自激振动	自激振动中有机床切削过程的自振、低速运动部件的爬行、滑动轴承油膜振荡、传动带的横向振动、液压随动系统的自振等。这些对各类机械及生产过程都是一种危害，应加以控制	蒸汽机、风镐、凿岩机、液压气动碎石机等均为自激振动应用实例
不平衡惯性力	旋转机械和往复机械产生振动的根本原因，都是由于不平衡惯性力所造成的。为减小机械振动，应采取平衡措施。有关构件不平衡力的计算和静动平衡及各类转子的许用不平衡量已分别在“一般设计资料篇”和“机构篇”进行了介绍	惯性振动机械就是依靠偏心质量回转时所产生的离心力作为振源的
振动的传递	为减小外部振动对机械设备的影晌或机械设备的振动对周围环境的影响，可配置各类减振器，进行隔振、减振和消振	弹性连杆式激振器就是将曲柄连杆形成的往复运动，通过连杆弹簧传递给振动机体的
非线性振动	在减振器设计中涉及的摩擦阻尼器和粘弹性阻尼器均为非线性阻尼器。自激振动系统和冲击振动系统也都是非线性振动系统。实际上客观存在的振动问题几乎都是非线性振动问题，只是某些系统的非线性特性较弱，作为线性问题处理罢了	振动利用问题几乎都是利用振动系统的非线性特性工作的，例如：振动输送类振动机等
冲击振动	当机械设备或基础受到冲击作用时，常常需要校核系统对冲击的响应，必要时采取隔振措施	冲击类振动机实际上都可以转换为非线性振动问题加以处理
随机振动	随机振动的隔离和减振与确定性振动的隔离和消减有两点重要区别：一是随机振动的隔离和消减只能用数理统计方法来解决；二是对宽带随机振动隔离措施已经失效，只能采取阻尼减振措施	
机械结构抗振能力及噪声	衡量机械结构抗振能力的最重要的指标是动刚度，复杂结构的动刚度多采用有限单元法进行优化设计，若要提高结构的动刚度并控制噪声源，通常是合理布置筋板和附以粘弹性阻尼材料。这种问题涉及面较宽，因受篇幅限制，本篇不加以讨论	
振动的测试与调试	振动设计中常碰到系统阻尼系数很难确定的问题，解决这类问题惟一可靠的方法是测试。另外，由于振动设计模型忽略了许多振动影响因素，使得振动系统的实际参数与设计参数间有较大差别，特别像动力吸振器要求附加系统与主振系统的固有频率一致性较高的一类问题，设备安装后必须进行调试，否则振动设计将不能发挥应有的作用。对于实际经验不丰富的设计人员，调试前，可凭借测试对实际系统有一个充分了解，确定怎样调试，调试后又要借助测试检验调试结果，因此，测试是振动设计的一个重要工具。有关调试测试内容详见第5~7章介绍	

2 有关振动方面的部分标准

主要参考的标准

- GB/T 2298—1991 机械振动与冲击术语
- GB 6075.1—1999 制定机器振动标准的基础
- GB/T 6444—1995 机械振动平衡术语
- GB/T 7184—1987 中小功率柴油机振动测量方法
- GB 7772—1989 变容真空泵噪声测量方法
- GB/ * 7773—1987 变容真空泵振动测量方法
- GB/T 7777—1987 往复式压缩机机械振动测量与评价
- GB 7786—1987 动力用空气压缩机和隔膜压缩机噪声功率极限值
- GB/T 8540—1987 振动与冲击隔振器确定特性要求导则
- GB/T 10084—1988 振动、冲击数据分析和表示方法
- GB/T 10397—1989 中小功率柴油机振动评级
- GB/T 10398—1989 小型汽油机振动测试方法

GB/T 10399—1989 小型汽油机振动评级
 GB/* 10889—1989 泵的振动测量与评价方法
 GB/* 10890—1989 泵的噪声测量与评价方法
 GB 10894—1989 分离机械噪声声功率级的测定 工程法
 GB 10895—1989 离心机、分离机 机械振动 测试方法
 GB/T 11347.1—1989 大型旋转机械振动烈度现场测量与评定
 GB/T 11348.1—1989 旋转机械转轴径向振动的测量与评定 第一部分 总则
 GB/T 11348.2—1997 旋转机械转轴径向振动的测量与评定 第二部分 陆地安装的大型汽轮发电机组
 GB/T 12779—1991 往复式机器整机振动测量与评级方法
 GB 16490—1996 振动给料机安全规范
 GB/T 16768—1997 金属切削机床 振动测量方法
 GB/T 16769—1997 金属切削机床 噪声声压级测量方法

其他有关方面的振动标准

GB/* 3982—1983 ZG 型电磁振动给煤机
 GB/T 7453—1996 船体振动测量
 GB 7670—1987 电动振动试验设备特性的描述方法
 GB/T 8910.1—1988 凿岩机械与气动工具振动测量方法 总则
 GB/T 8910.2—1988 凿岩机械与气动工具振动测量方法 冲击式机械的测量
 GB/T 8910.3—1988 凿岩机械与气动工具振动测量方法 回转式机械的测量
 GB 9239—1988 刚性转子平衡品质许用不平衡的确定
 GB 10179—1989 液压伺服振动试验设备特性的描述方法
 GB 10861—1989 液压振动台
 GB/* 10862—1989 GZ 型电磁振动给料机型式和基本尺寸
 GB 11349.1 ~ .3 机械导纳的试验确定
 GB/T 11353—1989 振动发生器辅助台设备特性的描述方法
 GB/T 13309—1991 机械振动台 技术条件
 GB/T 13310—1991 电动振动台 技术条件
 GB/T 13436—1992 扭转振动测量仪器要求
 GB/T 13437—1992 扭转振动减振器特性描述
 GB/T 13823.1 ~ .18 (1992 ~ 1997) 振动与冲击传感器的校准方法
 GB/T 13824—1992 对振动烈度测量仪的要求
 GB/T 13860—1992 地面车辆机械振动测量数据的表述方法
 GB/T 13866—1992 振动冲击与测量 描述惯性式传感器特性的规定
 GB 14097—1993 小型汽油机噪声限值
 GB/T 14123—1993 冲击的特性描述
 GB/T 14124—1993 机械振动与冲击对建筑物振动影响的测量和评价 基本方法及使用导则
 GB/T 14412—1993 机械振动与冲击 加速度计的安装
 GB/T 15168—1994 振动与冲击隔离器性能测量方法
 GB/T 15371—1994 曲轴轴系扭转振动的测量与评定方法
 GB 15739—1995 小型汽油机噪声限值
 GB/T 16768—1997 振动测量方法·金属机床
 GB/T 16769—1997 噪声声压级测量方法·金属机床
 GB/T 16908—1997 机械振动 轴与配合件平衡的键准则
 GB/T 17189—1997 水力机械振动和脉动现场测试规程对人体的振动
 GB/T 8419—1987 土方机械司机座椅 振动试验方法和限值
 GB/T 13441—1992 人身全身振动环境的测量规范
 GB/T 13442—1992 人身全身振动暴露的舒适性降低界限和评价准则

GB/T 13921—1992 关于固定结构特别是建筑物和海上结构的居住者对低频 (0.063 ~ 1Hz) 水平运动影响的评价导则

GB/T 14790—1997 人体手传振动的测量与评价方法

GB/T 15619—1995 人体机械振动与冲击术语

GB/T 16440—1996 振动与冲击 人体的机械驱动点阻抗

GB/T 16441—1996 振动与冲击 人体 z 轴向的机械传递率

注：以上标准有部分将改为行业标准。

3 振动等级的评定

一般多用振动速度作为衡量标准来评定机械的振动程度。美国和加拿大以速度的峰值来表示机器的振动特征。西欧国家和我国多采用速度的有效值来衡量机器的振动。机械振动一般都是简谐振动，振动的速度的峰值和有效值之间存在着简单的关系：

$$V_{\max} = \sqrt{2} V_e = 2\pi f A \quad (\text{mm/s})$$

式中 $V_{\max}$ ——振动速度的峰值，mm/s；

V_e ——振动速度的有效值，mm/s；

f ——频率，Hz；

A ——振幅，mm。

我国已采用国际标准化组织所颁布的一种专门的量值——振动烈度作为评价机械振动的指标。遵照 ISO 的规定，按振动烈度 V_m 的大小来划分振动等级。从人体开始感觉的振动有效速度 0.112mm/s 开始，每增 1.6 倍 (4dB) 为一个数量级，相当于振动响应的一个重要变化。为了便于实用，且不致过分复杂，再将它们归并成四个等级，每级相当于两个数量级的烈度范围 (表 20-1-3)。各个等级的含义如下：

A 级——不会使机械设备的正常运转发生危险的振级，通常标作“良好”；

B 级——可验收的、允许的振级，通常标作“许可”；

C 级——振级是允许的，但有问题，不满意，应设法降低，通常标作“可容忍”；

D 级——振级太大，不能允许，机器不能运转，通常标作“不允许”。

表 20-1-3 为推荐的机械设备的振动标准。表中振动烈度 0.71 级为振动烈度 $V_m > 0.45 \sim 0.71 \text{mm/s}$ 。

以振动速度的方均根值来表示机器的振动烈度。根据 ISO 建议，振动的测量在三个方向进行：垂直、纵向、横向三个方向上有许多分散的点。以三个方向的振动速度的有效值的方均根值表示机器的振动烈度：

$$V_m = \sqrt{\left(\frac{\sum V_x}{N_x}\right)^2 + \left(\frac{\sum V_y}{N_y}\right)^2 + \left(\frac{\sum V_z}{N_z}\right)^2} \quad (\text{mm/s})$$

式中 $\sum V_x$ 、 $\sum V_y$ 、 $\sum V_z$ ——垂向、纵向、横向三个方向上各自振动速度的有效值之和，mm/s；

N_x 、 N_y 、 N_z ——垂向、纵向、横向三个方向上的测点数目。

我国国家标准基本相同，对各种机器有各自的规定。

机械设备的类型分类大致如下：

I 类：在正常条件下与整机连成一体的电动机和机器零件 (15kW 以下的生产用电机；中心高 $\leq 225\text{mm}$ 、转速 $\leq 1800\text{r/min}$ 或中心高 $> 225\text{mm}$ ，转速 $\leq 1000\text{r/min}$ 的泵)。

II 类：没有专用基础的中等尺寸的机器 (输出功率 15 ~ 75kW 的电机)；刚性固定在专用基础上的发动机和机器，300kW 以下 (转速 $> 1800 \sim 4500\text{r/min}$ 、中心高 $\leq 225\text{mm}$ 或转速 $> 1000 \sim 1800\text{r/min}$ 、中心高 $> 225 \sim 550\text{mm}$ 或转速 $> 600 \sim 1500\text{r/min}$ 、中心高 $> 550\text{mm}$ 的泵)。

III 类：安装在刚性非常大的 (在测振方向上)、重的基础上的、带有旋转质量的大型原动机和其他大型机器 (中心距 $\leq 225\text{mm}$ 、转速 $> 4500 \sim 12000\text{r/min}$ 或中心距 $> 225 \sim 550\text{mm}$ 、转速 $> 1800 \sim 4500\text{r/min}$ 或中心距 $> 550\text{mm}$ 、转速 $> 1500 \sim 3600\text{r/min}$ 的泵)。

IV 类：安装在刚性非常小的 (在测振方向上) 基础上、带有旋转质量的大型原动机和其他大型机器 (透平发动机组，特别是轻型透平发动机组；中心高 $> 225 \sim 550\text{mm}$ 、转速 $> 4500 \sim 12000\text{r/min}$ 或中心高 $> 550\text{mm}$ 、转速 $> 3600 \sim 12000\text{r/min}$ 的泵；对称平衡式压缩机)。

V类：安装在刚性非常大的（在测振方向上）基础上带有不平衡惯性力的机器和机械驱动系统（由往复运动造成，包括角度式、对置式压缩机；标定转速 $\leq 3000\text{r/min}$ 、刚性支承的多缸柴油机）。

VI类：安装在刚性非常小的（在测振方向上）基础上、带有不平衡惯性力的机械和机器驱动系统（立式、卧式压缩机；刚性支承、转速 $> 3000\text{r/min}$ 或弹性支承、转速 $\leq 3000\text{r/min}$ 的多缸柴油机）；具有松动耦合旋转质量的机器（如研磨机中的回转轴）；具有可变的不平衡力矩能自成系统地进行工作而不用连接件的机器（如离心机）；加工厂中用的振动筛、动态疲劳试验机和振动台。

VII类：安装在弹性支承上、转速 $> 3000\text{r/min}$ 的多缸柴油机；非固定式压缩机。

表 20-1-3 推荐的机械设备的振动标准

分级范围	振动烈度 V_m $/\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$	分贝 /dB	机 械 设 备 的 类 别						
			I	II	III	IV	V	VI	VII
0.11	0.071 ~ 0.112	81	A	A	A	A	A	A	A
0.18	0.112 ~ 0.18	85							
0.28	0.18 ~ 0.28	89							
0.45	0.28 ~ 0.45	93							
0.71	0.45 ~ 0.71	97							
1.12	0.71 ~ 1.12	101	B	B	B	B	B	B	B
1.8	1.12 ~ 1.8	105							
2.8	1.8 ~ 2.8	109	C	C	C	C	C	C	C
4.5	2.8 ~ 4.5	113							
7.1	4.5 ~ 7.1	117	D	D	D	D	D	D	D
11.2	7.1 ~ 11.2	121							
18	11.2 ~ 18	125							
28	18 ~ 28	129							
45	28 ~ 45	133							
71	45 ~ 71	137							
112	71 ~ 112	141							

注：振动速度级的基准取为 $V_{0(\text{eff})} = 10^{-6}\text{cm/s}$ ，
每 4dB 一档。相当的量程比例为 1:1.6。在大多数机器中 4 个 dB 的差额产生一个速度增量（或降低量），在振动响应中它表示了一个重要的变化。
我国有些设备标准不完全按表 20-1-3 的规定，例如对于单缸柴油机（标定转速 $\leq 3000\text{r/min}$ ）的标准如表 20-1-4。

表 20-1-4 单缸柴油机的等级和振动烈度
(标定转速 $\leq 3000\text{r/min}$)

等 级	水 冷		风 冷	
	刚性支承	弹性支承	刚性支承	弹性支承
	振动烈度限值/ $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$			
A	7.1	11.2	11.2	18.0
B	11.2	18.0	18.0	28.0
C	18.0	28.0	28.0	45

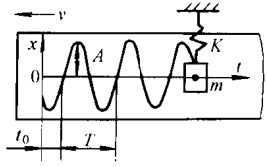
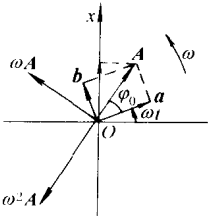
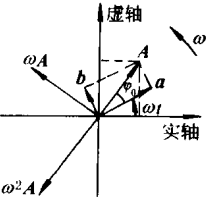
以上规定适用于振动频率的下限为 10Hz。在现代船舶中，振动频率低于 10Hz 的也还是有的，当频率低于 10Hz 时，建议采用振幅作为衡量标准，请参看相关专业标准。

第2章 机械振动基础资料

1 机械振动表示方法

1.1 简谐振动表示方法

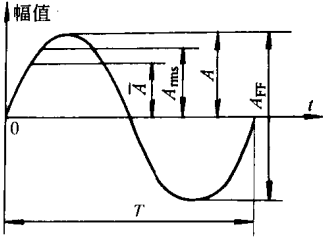
表 20-2-1

项 目	时间历程表示法	旋转矢量表示法	复数表示法
简 图			
说 明	作简谐振动的质量 m 上的点光源照射在以运动速度为 v 的紫外线感光纸上记录的曲线		
	矢量 A 或 $(a + b)$ 以等角速度 ω 逆时针方向旋转时, 在坐标轴 x 上的投影		
	矢量 A 或 $(a + b)$ 以等角速度 ω 逆时针方向旋转时, 同时在实轴和虚轴上投影		
	T ——周期, s; f ——频率, Hz, $f = \frac{1}{T}$; ω ——圆频率, rad/s, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$; A ——振幅, m; φ ——相位角, rad, $\varphi = \omega t$; φ_0 ——初相角, rad, $\varphi_0 = \omega t_0$; $ a = A \cos \varphi_0$; $ b = A \sin \varphi_0$		
振动位移	$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$		$x = A e^{i(\omega t + \varphi_0)}$
振动速度	$\dot{x} = A \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$		$\dot{x} = i \omega A e^{i(\omega t + \varphi_0)}$
振动加速度	$\ddot{x} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$		$\ddot{x} = -\omega^2 A e^{i(\omega t + \varphi_0)}$
振动位移、速度、加速度的相位关系	振动位移、速度和加速度的频率都等于 ω_0 。最大位移即振幅为 A 振动速度矢量比位移矢量超前 90° , 最大速度 $v_0 = \omega A$ 振动加速度矢量又超前速度矢量 90° , 最大加速度 $a_0 = \omega^2 A$		

注：时间历程曲线表示法是振动时域描述方法，也可以用来描述周期振动、非周期振动和随机振动。

1.2 周期振动幅值表示法

表 20-2-2

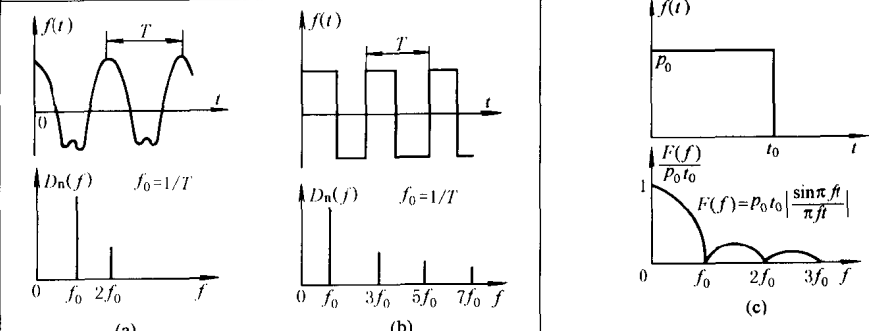
名 称	幅 值	简谐振动幅值比	简 图
峰值 A	$x(t)$ 的最大值	1	
峰峰值 A_{FF}	$x(t)$ 的最大值和最小值之差	2	
平均绝对值 $\bar{A}$	$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	0.636	
均方值 A_{ms}	$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$	—	
均方根值(有效值) A_{rms}	$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$	0.707	

注：1. 周期振动幅值表示法是一种幅域描述方法，也可以用来描述非周期振动和随机振动。

2. 对简谐振动峰值即为振幅，峰峰值即为双振幅。

1.3 振动频谱表示法

表 20-2-3

项 目	周 期 性 振 动	非 周 期 性 振 动
振动时间函数 $f(t)$ 的傅里叶变换	$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ $= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{i n \omega_0 t}$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ $= \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{i2\pi f t} df$
振动的频谱表达式	傅里叶系数: $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 \right)$ $a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$ 幅值谱: $c_n(\omega) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ 相位谱: $\varphi_n(\omega) = \arctan(-b_n/a_n)$ 复谱: $D_n(\omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i n \omega_0 t} dt$ $D_n(f_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ $F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi f t} dt$
图 例		

注：图 a、b、c 的下图为上图的频谱。图 a 的下图表示只有两个谐波分量，为完全谱。图 b 的下图表示前四个谐波分量，为非完全谱。该方法是振动的频域描述方法，也可用以描述随机振动。

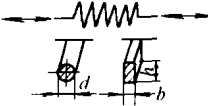
2 弹性构件的刚度

作用在弹性元件上的力（或力矩）的增量 T 与相应的位移（或角位移）的增量 δ_{st} 之比称为刚度。刚度 K 由下式计算：

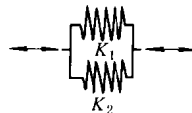
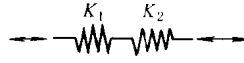
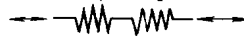
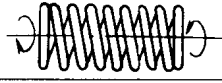
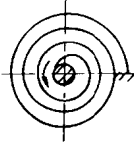
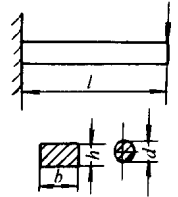
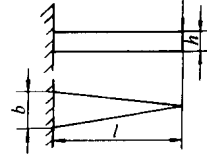
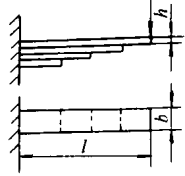
$$K = T/\delta_{st} \quad (\text{N/m 或 N}\cdot\text{m/rad})$$

表 20-2-4

弹性元件的刚度

序号	构件型式	简 图	刚度 $K/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ($K_\phi/\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$)												
1	圆柱形拉伸或压缩弹簧		圆形截面 $K = \frac{Gd^4}{8nD}$ 矩形截面 $K = \frac{4Ghb^3\Delta}{\pi nD}$ n——弹簧圈数 <table><tr><td>h/b</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Δ</td><td>0.141</td><td>0.196</td><td>0.229</td><td>0.263</td><td>0.281</td></tr></table>	h/b	1	1.5	2	3	4	Δ	0.141	0.196	0.229	0.263	0.281
h/b	1	1.5	2	3	4										
Δ	0.141	0.196	0.229	0.263	0.281										

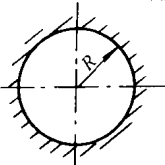
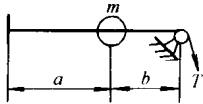
续表

序号	构件型式	简图	刚度 $K/N \cdot m^{-1}$ ($K_\varphi/N \cdot m \cdot rad^{-1}$)
2	圆锥形拉伸弹簧		圆形截面 $K = \frac{Gd^4}{2n(D_1^2 + D_2^2)(D_1 + D_2)}$ 矩形截面 $K = \frac{16Ghb^3\eta}{\pi n(D_1^2 + D_2^2)(D_1 + D_2)}$ $\eta = \frac{0.276\left(\frac{h}{b}\right)^2}{1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2}$ D_1——大端中径, m D_2——小端中径, m
3	两个弹簧并联		$K = K_1 + K_2$
4	n 个弹簧并联		$K = K_1 + K_2 + \dots + K_n$
5	两个弹簧串联		$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$
6	n 个弹簧串联		$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n}$
7	混合联接弹簧		$K = \frac{(K_1 + K_2) K_3}{K_1 + K_2 + K_3}$
8	受扭圆柱弹簧		$K_\varphi = \frac{Ed^4}{32nD}$
9	受弯圆柱弹簧		$K_\varphi = \frac{Ed^4}{32nD} \left[\frac{1}{1 + E/2G} \right]$
10	卷簧		$K_\theta = \frac{El_s}{l}$ l ——钢丝总长
11	等截面悬臂梁		$K = \frac{3EI}{l^3}$ 圆截面: $K = \frac{3\pi d^4 E}{64l^3}$ 矩形截面: $K = \frac{bh^3 E}{4l^3}$
12	等厚三角形悬臂梁		$K = \frac{bh^3 E}{6l^3}$
13	悬臂板簧组 (各板排列成等强度梁)		$K = \frac{nbh^3 E}{6l^3}$ n ——钢板数

续表

序号	构件型式	简图	刚度 $K/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ($K_\varphi/\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$)												
14	两端简支		$K = \frac{3EI}{l_1^3 l_2^3}$ 当 $l_1 = l_2$ 时, $K = \frac{48EI}{l^3}$												
15	两端固定		$K = \frac{3EI^3}{l_1^3 l_2^3}$ 当 $l_1 = l_2$ 时, $K = \frac{192EI}{l^3}$												
16	力偶作用于悬臂梁端部		$K_\varphi = \frac{EI}{l}$												
17	力偶作用于简支梁中点		$K_\varphi = \frac{12EI}{l}$												
18	力偶作用于两端固定梁中点		$K_\varphi = \frac{16EI}{l}$												
19	受扭实心轴		$(a) K_\varphi = \frac{G\pi D^4}{32l} \quad (b) K_\varphi = \frac{G\pi D_k^4}{32l}$ $(c) K_\varphi = \frac{G\pi D_1^4}{32l} \quad (d) K_\varphi = 1.18 \frac{G\pi D_1^4}{32l}$ $(e) K_\varphi = 1.1 \frac{G\pi D_1^4}{32l} \quad (f) K_\varphi = \alpha \frac{G\pi b^4}{32l}$ <table><tr><td>a/b</td><td>1</td><td>1.5</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>α</td><td>1.43</td><td>2.94</td><td>4.57</td><td>7.90</td><td>11.23</td></tr></table>	a/b	1	1.5	2	3	4	α	1.43	2.94	4.57	7.90	11.23
a/b	1	1.5	2	3	4										
α	1.43	2.94	4.57	7.90	11.23										
20	受扭空心轴		$K_\varphi = \frac{G\pi(D^4 - d^4)}{32l}$												
21	受扭锥形轴		$K_\varphi = \frac{3G\pi D_1^3 D_2^3 (D_2 - D_1)}{32l(D_2^3 - D_1^3)}$												
22	受扭阶梯轴		$\frac{1}{K_\varphi} = \frac{1}{K_{\varphi 1}} + \frac{1}{K_{\varphi 2}} + \frac{1}{K_{\varphi 3}} + \dots$												
23	受扭紧配合轴		$K_\varphi = K_{\varphi 1} + K_{\varphi 2} + \dots$												
24	周边简支中心受力的圆板		$K = \frac{4\pi E\delta^3}{3R^2(1-\mu)(3+\mu)}$												

续表

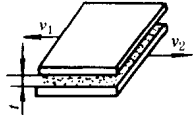
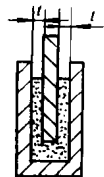
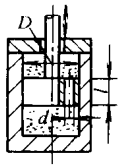
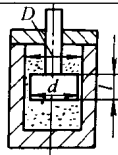
序号	构件型式	简图	刚度 $K/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ($K_\varphi/\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$)
25	周边固定中心受力的圆板		$K = \frac{4\pi E\delta^3}{3R^2(1-\mu^2)}$
26	受张力的弦		$K = \frac{T(a+b)}{ab}$

注: E ——弹性模量, Pa; G ——剪切弹性模量, Pa; J ——截面惯性矩, m^4 ; D ——弹簧中径、轴外径, m; d ——弹簧钢丝直径、轴直径, m; n ——弹簧有效圈数; δ ——板厚, m; μ ——泊松比。

3 阻尼系数

3.1 线性阻尼系数

表 20-2-5

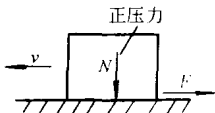
序号	机理	简图	阻尼力 F/N (或阻尼力矩 $M/\text{N}\cdot\text{m}$)	阻尼系数 $C/\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ ($C_\varphi/\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$)
1	液体介于两相对运动的平行板之间		$F = \frac{\eta A}{t} v$ 流体动力粘度系数 η , $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ 15℃空气 $\eta = 1.82 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ 20℃水 $\eta = 103 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ 20℃酒精 $\eta = 176 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ 15.6℃机油 $\eta = 11610 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$	$C = \frac{\eta A}{t}$ A ——与流体接触面积, m^2 t ——流体层厚度, m v ——两平行板相对运动速度, m/s, $v = v_1 - v_2$
2	板在液体内平行移动		$F = \frac{2\eta A}{t} v$	$C = \frac{2\eta A}{t}$ A ——动板一侧与液体接触面积, m^2
3	液体通过移动活塞上的小孔		圆孔直径为 d 时: $F = \frac{8\pi\eta l}{n} \left(\frac{D}{d}\right)^4 v$ n ——小孔数 矩形孔面积为 $a \times b$ 时: $F = 12\pi\eta l \frac{A^2}{a^3 b} v \quad (a \ll b)$ A ——活塞面积, m^2	圆孔孔: $C = \frac{8\pi\eta l}{n} \left(\frac{D}{d}\right)^4$ 矩形孔: $C = 12\pi\eta l \frac{A^2}{a^3 b}$
4	液体通过移动活塞柱面与缸壁的间隙		$F = \frac{6\pi\eta l d^3}{(D-d)^3} v$	$C = \frac{6\pi\eta l d^3}{(D-d)^3}$
5	液体介于两相对转动的同心圆柱之间		$M = \frac{\pi\eta l (D_1 + D_2)^3}{2 (D_1 - D_2)} \omega$ ω ——角速度, rad/s	$C_\varphi = \frac{\pi\eta l (D_1 + D_2)^3}{2 (D_1 - D_2)}$

续表

序号	机 理	简 图	阻尼力 F/N (或阻尼力矩 $M/N\cdot m$)	阻尼系数 $C/N\cdot s\cdot m^{-1}$ ($C_\varphi/N\cdot m\cdot s\cdot rad^{-1}$)
6	液体介于两 相对运动的同 心圆盘之间		$M = \frac{\pi\eta}{32t} (D_1^4 - D_2^4) \omega$	$C_\varphi = \frac{\pi\eta}{32t} (D_1^4 - D_2^4)$
7	液体介于两 相对运动的圆 柱形壳和圆盘 之间		$M = \pi\eta \left[\frac{bD_1^2D_2^2}{D_1^2 - D_2^2} + \frac{D_2^4 - D_3^2}{16t} \right] \omega$	$C_\varphi = \pi\eta \left[\frac{bD_1^2D_2^2}{D_1^2 - D_2^2} + \frac{D_2^4 - D_3^2}{16t} \right]$

3.2 非线性阻尼的等效线性阻尼系数

表 20-2-6

序号	阻尼种类	阻尼机理	阻尼力 F/N	等效线性阻尼系数 $C_e/N \cdot s \cdot m^{-1}$																								
1	干摩擦阻尼		$F = \mu N$ 摩擦因数 μ : 钢与铸铁 $\mu = 0.2 \sim 0.3$ 钢与铸铁 (除油) $\mu = 0.08 \sim 0.16$ 钢与钢 $\mu = 0.15$ 钢与青铜 $\mu = 0.15$	$C_e = \frac{4\mu N}{\pi A \omega}$ 尼龙与金属 $\mu = 0.3$ 塑料与金属 $\mu = 0.05$ 树脂与金属 $\mu = 0.2$																								
2	速度平方阻尼	物体在流体中以很高速度运动时, 也就是当雷诺数 Re 很大时, 所产生的阻尼力与速度的平方成正比	$F = \frac{\rho S^3}{2(C_d \alpha)^2} v^2$ ρ ——流体密度, kg/m^3 S ——活塞面积, m^2 α ——小孔面积, m^2 C_d ——流出系数, $C_2 = F/v^2$ v ——活塞运动速度	$C_e = \frac{8}{3\pi} C_2 \omega A$ 流出系数参考值: 孔长较短 $C_d = 0.6$ 孔长为直径 3 倍边缘为直角 $C_d = 0.8$ 孔长为直径 3 倍流入一侧为圆弧 $C_d = 0.9$ 带阀门的孔 $C_d = 0.6 \sim 0.7$																								
3	内部摩擦阻尼	当固体变形时, 以滞后形式消耗能量产生的阻尼。例如: 橡胶材料谐振时的阻尼	$F = K(1 + i\beta)x$ $K(1 + i\beta)$ ——复数形式的弹簧常数; i ——第二项相对于第一项的相位滞后 90° ; K ——动弹簧常数; β ——力学的材料损耗因子	$C_e = \frac{\beta K}{\omega}$ <table><tr><td>邵氏硬度</td><td>30°</td><td>50°</td><td>70°</td></tr><tr><td>β</td><td>5%</td><td>10%</td><td>15%</td></tr><tr><td>品种</td><td colspan="3">β</td></tr><tr><td>氯丁橡胶</td><td colspan="3">15% ~ 30%</td></tr><tr><td>丁腈橡胶</td><td colspan="3">25% ~ 40%</td></tr><tr><td>苯乙烯橡胶</td><td colspan="3">15% ~ 30%</td></tr></table>	邵氏硬度	30°	50°	70°	β	5%	10%	15%	品种	β			氯丁橡胶	15% ~ 30%			丁腈橡胶	25% ~ 40%			苯乙烯橡胶	15% ~ 30%		
邵氏硬度	30°	50°	70°																									
β	5%	10%	15%																									
品种	β																											
氯丁橡胶	15% ~ 30%																											
丁腈橡胶	25% ~ 40%																											
苯乙烯橡胶	15% ~ 30%																											
4	一般非线性阻尼		$F = f(x, \dot{x})$ 其中: $x = A \sin \varphi$ $\dot{x} = \omega A \cos \varphi$	$C_e = \frac{1}{\pi \omega A} \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}) \cos \varphi d\varphi$																								

注: A ——振幅, m ; ω ——振动频率, rad/s 。

4 振动系统的固有圆频率

4.1 单自由度系统的固有圆频率

质量为 m 的物体作简谐运动的圆频率 ω_n 称固有圆频率 (或固有角频率)。其与弹性构件刚度 K 的关系可由下式计算:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{rad/s}) \tag{20-2-1}$$

固有频率 f_n 为:

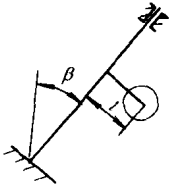
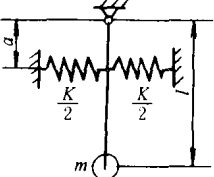
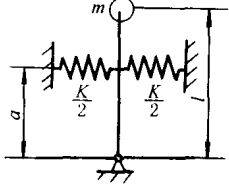
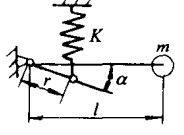
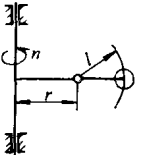
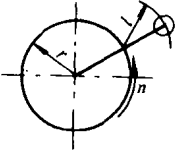
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (1/\text{s}) \tag{20-2-2}$$

表 20-2-4 已列出弹性构件的刚度, 代入式 (20-2-1) 即可求得各自的固有圆频率。其他见表 20-2-7。

表 20-2-7

序号	系统形式	系统简图	固有圆频率 $\omega_n/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
1	一个质量一个弹簧系统		$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \approx \sqrt{\frac{g}{\delta}}$ 若计弹簧质量 m_s: $\omega_n = \sqrt{\frac{3K}{3m + m_s}}$ K——弹簧刚度, N/m; m——刚体质量, kg; m_s——弹簧分布质量, kg; δ——静变形量, m; g——重力加速度, $g = 9.81\text{m/s}^2$
2	两个质量一个弹簧的系统		$\omega_n = \sqrt{\frac{K(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$
3	质量 m 和刚性杆弹簧系统		不计杆质量时 $\omega_n = \sqrt{\frac{Kl^2}{ma^2}}$ 若计杠杆质量 m_s 时, 则 $\omega_n = \sqrt{\frac{3Kl^2}{3ma^2 + m_s l^2}}$ 系统具有 n 个集中质量时, 以 $(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + \dots + m_n a_n^2)$ 代替式中的 ma^2 系统具有 n 个弹簧时, 以 $(K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2 + \dots + K_n l_n^2)$ 代替式中的 Kl^2
4	悬臂梁端有集中质量系统		$\omega_n = \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$ 若计杆质量 m_s 时, $\omega_n = \sqrt{\frac{3EJ}{(m + 0.24m_s) l^3}}$ E——弹性模量, Pa; J——截面惯性矩, m^4
5	一端固定、另一端有圆盘的扭转轴系		$\omega_n = \sqrt{\frac{K_\phi}{I}}$ 若计轴的转动惯量 I_s 时, $\omega_n = \sqrt{\frac{3K_\phi}{3I + I_s}}$
6	两端固定、中间有圆盘的扭转轴系		$\omega_n = \sqrt{\frac{GJ_\phi(l_1 + l_2)}{Il_1 l_2}}$ G——剪切弹性模量, Pa; J_ϕ——截面极惯性矩, m^4

续表

序号	系统形式	系统简图	固有圆频率 $\omega_n/\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$
7	单摆		$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$
8	物理摆		$\omega_n = \sqrt{\frac{gl}{\rho^2 + l^2}}$ l ——摆重心至转轴中心的距离, m ρ ——摆对质心的回转半径, m
9	倾斜摆		$\omega_n = \sqrt{\frac{g \sin \beta}{l}}$
10	双簧摆		$\omega_n = \sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}}$
11	倒立双簧摆		$\omega_n = \sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}}$
12	杠杆摆		$\omega_n = \sqrt{\frac{Kr^2 \cos^2 \alpha - K\delta r \sin \alpha}{ml^2}}$ δ ——弹簧静变形, m
13	离心摆 (转轴中心线在振动物体运动平面中)		$\omega_n = \frac{\pi n}{30} \sqrt{\frac{l+r}{l}}$ n ——转轴转速, r/min
14	离心摆 (转轴中心线垂直于振动物体运动平面)		$\omega_n = \frac{\pi n}{30} \sqrt{\frac{r}{l}}$