差分法

吴迪光 编

高等教育出版社

变 分 法

吴迪光 编

高等教育出版社

本书介绍变分法的基本内容，全书共8章：第1章变分法的概念；第2章固定边界的变分问题；第3章变动边界的变分问题；第4章重积分的变分问题；第5章泛函的条件极值问题；第6章泛函极值的充分条件；第7章变分原理；第8章变分问题的近似解法。

本书可供工科大学有关专业大学生、研究生作教学参考书，也可供工程技术人员作自学用书。

变分法

吴迪光　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张6.75　字数160 000

1987年4月第1版　1987年4月第1次印刷

印数 00,001—8 150

书号 13010·01325　　定价 1.40 元

序　言

自然科学和工程技术中出现的许多问题，常要研究这样一种抽象的函数——泛函，其值域是实数域，而定义域由某类函数所构成．研究泛函的极值问题，是变分法的基本问题．变分法是数学分析的一个分支，是微分学中处理函数极值方法的扩展，但由于泛函定义域中的函数起着独立变量的作用，在处理极值问题时，适合泛函极值条件的变元不是单个或有限多个数值变量，而是整个变动的曲线或函数，甚至是一组函数，因而它涉及的问题更深入和广泛．

古希腊人提出所谓等周问题，即在长度一定的所有封闭曲线中，找出含有最大面积的一条封闭曲线，这就是一个变分问题．人们很早就知道，这条曲线是一个圆，但这个事实直到十八世纪由欧拉(Euler)和拉格朗日(Lagrange)确立了变分法后，才得到令人满意的证明．1696年约翰·伯努利(Johann Bernoulli)向他的长兄雅可布·伯努利(Jakob Bernoulli)和其他数学家们挑战性地提出了捷线(最速降线)问题，这是变分法发展的一个标志．这个问题引起了当时数学家们的极大兴趣，如牛顿(Newton)、莱布尼兹(Leibniz)、洛必达(L'Hospital)都获得了一些结果，只有受到自己弟弟嘲笑为无能的雅可布得到的结果与众不同，在他那“很不优美”的解答中，却看到了其他人所没有看到的事实——从无穷多条曲线中，选出一条满足极值条件的曲线．实质上，这个问题是一类新问题，这类问题的解决，需要寻找新的方法．在一系列的研究中，欧拉和拉格朗日得出了泛函极值的必要条件，勒让德(Legendre)、雅可比(Jacobi)和另外一些数学家又加以发展，导出了极值

的充分条件，维尔斯特拉斯(Weierstrass)又使该理论臻于完善．希尔伯特(Hilbert)对变分法这个领域做出了若干重要的贡献，他在一个定理中叙述并证明了极小弧的可微性条件，在许多场合里，上述条件保证了极小值的存在．在希尔伯特工作的启示下，物理学家里兹(Ritz Walter)从已修正的狄利克雷(Dirichlet)原理出发，发现了一个求偏微分方程边值问题数值解的极有用的方法，这个方法为今天计算机成为日益成功的数值计算工具，提供了一种可能性条件．希尔伯特深切体会到：重大的个别问题是数学的活的血液．变分法的理论正是在解决个别问题的基础上发展起来的．1900 年 8 月庞加莱(Poincaré)在巴黎宣布第二次国际数学家代表大会开幕，希尔伯特作了“数学问题”的报告，强调了决定着一门科学发展方向的问题的重要性，他提出并讨论了二十三个个别问题，他相信这些问题的解决，必将大大地推动二十世纪数学的发展．他所提出的第二十三个问题，是对将来的一个建议，希尔伯特认为，变分法这个数学领域，在过去受到了不适当的忽视，他希望下个世纪的数学家们能对这个领域给以更多的注意．

变分法理论的发展，与力学、物理学等其它自然科学的发展密切相关，相互促进．拉格朗日用其最小作用原理成功地描述了流体动力学的规律，启示着这些概念可应用到物理学的其它分支上去．在十九世纪早期，泊松(Poisson)、索非·乔曼(Sophie Germain)、柯西(Cauchy)等用变分法解决了许多弹性理论问题．哈密顿(Hamilton)在 1824 年到 1832 年，建立了光学的数学理论，此后，他从最小作用原理出发得出更普遍的原理，在其它数学物理分支，如弹性理论、电磁理论、相对论和量子理论中，求得相似的变分原理，不仅推动了变分法的进一步研究．而且也推动了微分方程进一步的研究．1928—1934年间，摩斯(M.Morse)与刘斯切尔尼克(Л.А.Люстерник)、舍尼列利玛(Л.Г.Шнирельман)分别提出两种联系紧流形上函数临界点的性态与流形自身拓扑性质的理论，这

两个理论已成功地应用到变分学中的测地线问题中去. 近十多年来,变分理论又有了重大的进展,1973 年由安布罗塞特(A.Ambrosetti)、鲁滨罗维茨(P.H.Rabi-nowitz)提出了山路引理, 引出了一系列极小极大原理. 这些原理可以处理既无下界又无上界的泛函变分问题,为超线性椭圆型方程边值问题、超线性弦的周期振动问题、以及哈密顿方程组周期轨道的研究提供了有效的工具. 变分法在近代科学技术中应用愈来愈广泛, 如信息论中确定信息熵的最佳分布, 控制论中研究最优控制问题都有它的应用. 本书限于介绍古典变分法的理论, 也涉及到与近代有限元方法有关的变分原理部分,内容分为两部分:

第一部分 古典变分法泛函极值的必要条件与充分条件(第一章至第六章),这是本书的主要部分.

第二部分 变分原理(第七章)和变分问题的近似解法(第八章),第七章是第八章的理论基础.

本书是在教学实践的基础上, 根据高等学校工科数学课程教学指导委员会(原工科数学教材编委会)的编写要求, 和《变分法》评审组拟订的编写提纲编写的. 评审组的同志和复审人姚昌瑞同志对本书内容提出许多极为宝贵的意见,在此表示衷心的感谢. 编者希望本书能为读者在学习有关专业课程和在实际应用方面提供必要的基础知识. 限于编者水平,本书难免存在缺点和不当之处, 敬希读者批评指正.

吴迪光

1985 年 3 月

目　　录

序　言
第1章　变分法的概念 …… 1
§1　泛函和泛函的极值 …… 1
1.1　实例 …… 1
1.2　泛函和泛函的极值 …… 4
§2　基本引理 …… 8
习题1 …… 10
第2章　固定边界的变分问题 …… 12
§1　欧拉(Euler)方程 …… 12
1.1　欧拉方程的推导 …… 12
1.2　欧拉方程的几种特殊情况 …… 15
1.3　捷线问题的近似解 …… 23
§2　含多个未知函数的变分问题 …… 25
§3　含高阶导数的变分问题 …… 29
§4　参数形式的变分问题 …… 33
§5　泛函的变分 …… 38
5.1　泛函的一阶变分 …… 38
5.2　极值必要条件的变分表示 …… 43
5.3　泛函的二阶变分 …… 45
习题2 …… 50
第3章　变动边界的变分问题 …… 55
§1　变动端点变分问题的自然边界条件 …… 55
§2　变动端点变分问题的横截条件 …… 59
2.1　横截条件 …… 59
2.2　一阶变分的一般形式 …… 62

2.3 三维空间的横截条件 ……66
习题 3 ……68
第4章 重积分的变分问题 ……71
§1 固定边界问题 ……71
§2 变动边界问题与自然边界条件 ……78
习题 4 ……80
第5章 泛函的条件极值问题 ……82
§1 短程线问题 ……82
§2 等周问题 ……91
§3 哈密顿(Hamilton)原理 ……99
习题 5 ……104
第6章 泛函极值的充分条件 ……108
§1 泛函弱极值的充分条件 ……108
1.1 雅可比(Jacobi)方程 ……109
1.2 雅可比判定法 ……112
1.3 欧拉方程与雅可比方程解的联系 ……114
§2 泛函强极值的充分条件 ……117
2.1 极值曲线场 ……118
2.2 维尔斯特拉斯(Weierstrass)函数 ……119
2.3 强极值的充分条件 ……121
习题 6 ……124
第7章 变分原理 ……125
§1 预备知识 ……125
1.1 函数的内积 ……125
1.2 微分算子 ……128
§2 与自共轭微分方程边值问题等价的变分问题 ……135
2.1 构造泛函 ……135
2.2 二次泛函的变分原理 ……137
2.3 非齐次边界条件 ……139
2.4 高阶方程的情形 ……141
§3 与自共轭偏微分方程边值问题等价的变分问题 ……142

3.1 狄里克雷(Dirichlet)问题 …… 143
3.2 诺伊曼(Neumann)问题 …… 145
3.3 洛平(Robin)问题 …… 147
3.4 非齐次边界条件 …… 150
习题 7 …… 152
第 8 章 变分问题的近似解法 …… 157
§ 1 里兹法 …… 157
1.1 里兹法的基本思想 …… 157
1.2 二阶自共轭微分方程边值问题的里兹法 …… 163
1.3 二阶自共轭偏微分方程边值问题的里兹法 …… 169
§ 2 伽辽金法 …… 178
§ 3 有限元法介绍 …… 186
习题 8 …… 195
习题答案 …… 198

第1章　变分法的概念

本章从实例引入泛函和泛函极值的定义，介绍变分法的基本引理，为讨论泛函极值的必要条件作准备.

§1　泛函和泛函的极值

1.1 实　　例

例 1 捷线(最速降线)问题 一质量为m的质点，在重力作用下，从定点A沿曲线下滑到定点B，试确定一条曲线，使质点下滑的时间最短. 假定质点在A点处的初速$v_0 \neq 0$，且A,B两定点不在同一铅直线上，我们不考虑曲线上的摩擦力和周围介质的阻力.

如图 1-1，取坐标系xOy，点A、B的坐标分别为(x_0, y_0)，(x_1, y_1). 过点A,B任取一条光滑曲线l，设其方程为

$$l: \quad y=y(x), \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

若质点从点A沿曲线l下滑到任意一点$P(x,y)$处的速率为v，由能量守衡定律得出

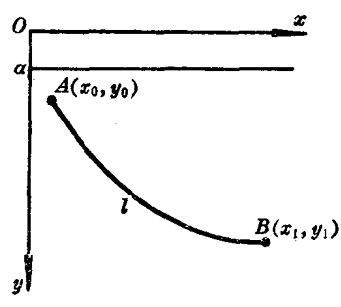

图 1-1

$$\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=mg(y-y_0),$$

由上式解得　$v=\sqrt{2g(y-a)}$，其中　$a=y_0-\dfrac{v_0^2}{2g}$，g为重力

加速度.

若令 s 表示弧 AP 的长，由微分学知识，$v=\dfrac{ds}{dt}$，于是

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2g(y-\alpha)}},$$

两边积分，得质点沿曲线 l 从点 A 下滑到点 B 所需时间为

$$T=\int_0^T dt=\int_l \frac{ds}{v}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y-\alpha}}\,dx. \tag{1-1}$$

对于过 A、B 两点的每一选定的光滑曲线 l，由积分(1-1)都有确定的 T 值与之对应. 也就是说，T 是依赖于曲线 $y=y(x)$ 的，不妨记为 $T=T[y]$. 因此，捷线问题的数学提法是：在满足端点条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{1-2}$$

的光滑曲线集合 $\{y=y(x),\ x\in[x_0,x_1]\}$ 中，确定一条曲线 $y=y(x)$，使积分(1-1)取极小值. 所求曲线称为捷线，或最速降线，是约翰·伯努利在 1696 年提出的.

例 2 等周问题 在平面上，给定长度为 l 的所有封闭光滑曲线中，求一条曲线，使它所围区域的面积 A 为最大.

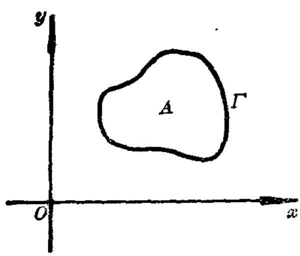

图 1-2

设曲线的参数方程为

$$\Gamma:\ \begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}\quad t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

且 $x(t_0)=x(t_1)$，$y(t_0)=y(t_1)$.

由条件，有

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=l\,(\text{常数}). \tag{1-3}$$

根据格林(Green)公式，曲线 Γ 所围成的面积为

$$A=\frac{1}{2}\oint_\Gamma x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt. \tag{1-4}$$

对每一条满足条件(1-3)的光滑曲线Γ，由积分(1-4)有确定的A值与之对应，也就是说，A是依赖于$x=x(t)$，$y=y(t)$的，记为$A=A[x,\ y]$. 于是等周问题归结为：在封闭光滑曲线的集合$\{x=x(t),\ y=y(t),t_0\leqslant t\leqslant t_1\}$中，求一条曲线，它使积分(1-4)在条件(1-3)下取极大值. (1-3)式称为等周条件.

例 3 极小曲面问题 在三维空间中，给定一条光滑闭曲线Γ(图 1-3)，在以Γ为边界的一切光滑曲面中，求面积最小的曲面.

设l是Γ在平面xOy上的投影，D是l所围的平面区域，以Γ为边界的任一光滑曲面方程为

$$z=z(x,y),(x,y)\in D.$$

由积分学知识，曲面面积为

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy. \tag{1-5}$$

设M为l上任一点，与点M对应，Γ上的点的纵坐标为已知函数$g(M)$，即

$$z|_l=g(M),\quad M\in l, \tag{1-6}$$

为(1-5)中函数z必须满足的条件.

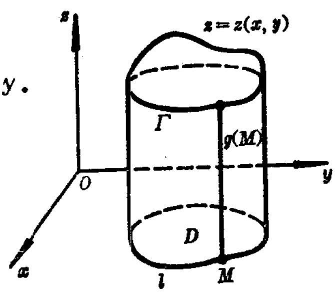

图 1-3

对于每一张满足条件(1-6)的光滑曲面$z=z(x,y)$，积分(1-5)有确定的值与之对应，或者说，面积S的值是依赖于函数$z=z(x,y)$的，记为$S=S[z]$. 因此，极小曲面问题归结为在给定的条件(1-6)下，在光滑曲面的集合$\{z=z(x,y),(x,y)\in D\}$中，求一张曲面$z=z(x,y)$，使积分(1-5)取极小值.

以上例 1 至例 3 中，$T=T[y]$，$A=A[x,y]$，$S=S[z]$，都以定积分的形式出现，它们的变化分别依赖于未知函数$y(x)$；$x(t)$和$y(t)$；$z(x,y)$等. 求这些定积分在给定的附加条件(如(1-2)、

(1-3)、(1-6))下的极值问题，就是所谓泛函的极值问题．这些未知函数 $y(x)$，$x(t)$和 $y(t)$，$z(x,y)$是独立变化的，它们起着通常微分学中自变量的作用．因此，我们现在要研究的所谓泛函极值问题，就是适合泛函极值条件的变元并不是单个或有限多个数值变量，而是整个变动的曲线或曲面，一个函数或一组函数．从无穷多个适合问题条件的函数中，求出一个函数，或一组函数使之能满足问题的要求，这实质上是一类新问题，它与微分学研究的函数极值问题，提法上虽相同，但涉及到的数学概念却是很不相同的．因此，这类问题的解决，需要新的数学方法．研究求泛函极值的方法就产生了变分法这门学科．

1.2 泛函和泛函的极值

下面，我们介绍泛函和泛函极值的概念，先介绍泛函的定义．

（一）泛函的定义

定义 给定满足一定条件的函数集合$\mathscr{F}$：$\{y(x)\}$，和实数集合 $\mathbf{R}$．设 $y(x)$是$\mathscr{F}$中的函数，J 是R中的变量，若$\mathscr{F}$和R之间存在一个对应关系，使$\mathscr{F}$中每一个函数 $y(x)$，R 中都有唯一的 J 值与之对应，则称 J 是 $y(x)$的泛函，记为

$$J=J[y(x)] \text{ 或 } J=J[y]. \tag{1-7}$$

$\mathscr{F}$称为泛函的定义域．

对于依赖于多个未知函数，或未知函数的自变量多于一个的情形，我们可以类似地定义如下的泛函：

$$J=J[y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)],$$

$$J=J[u(x_1,x_2,\cdots,x_n)],$$

$$J=J[u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)].$$

为了叙述方便，我们介绍下面的术语：

函数类 具有某种共同性质的函数集，称为函数类．

如在区间(x_0,x_1)上连续的函数集，称为在区间(x_0,x_1)上的连续函数类，记为$C(x_0,x_1)$.

在区间(x_0,x_1)上n阶导数连续的函数集，称为在区间(x_0,x_1)上n阶导数连续的函数类，记为$C^n(x_0,x_1)$，而$C^0(x_0,x_1)$约定为$C(x_0,x_1)$.

上述术语中，若为闭区间$[x_0,x_1]$的情形，则在区间端点处的所谓连续与导数，皆是单边的.

关于C与C^n的记号，可同样地用于多元函数.

例如，在n维区域G上，若n元函数连续，而且n阶以及n阶以下的各阶偏导数皆连续的函数集，记为$C^n(G)$.

例 1 设泛函

$$J=J[y]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

试分别求 $y=x,y=x^2,y=\mathrm{ch}x$ 的泛函值.

解 $y=x$, $y'=1$,

$$J[x]=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2};$$

$$y=x^2,\ y'=2x,$$

$$\begin{aligned}J[x^2]&=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx\\&=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\left[\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]\\&\approx 1.4789;\end{aligned}$$

$$y=\mathrm{ch}x,\ y'=\mathrm{sh}x$$

$$\begin{aligned}J[\mathrm{ch}x]&=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\mathrm{sh}^2x}\,dx\\&=\int_0^1\mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}\,x\Big|_0^1\end{aligned}$$

$$=\text{sh}1\approx 1.1752.$$

事实上，只要给定的函数$y(x)\in C^1[0,1]$，由于连续函数的定积分存在，上述泛函就有定义.

（二）函数间的距离　函数的邻域

定义　设函数$y(x)$与$y_0(x)$都属于$C^n[a,b]$，则

$$|y(x)-y_0(x)|,|y'(x)-y_0'(x)|,\cdots,|y^{(n)}(x)-y_0^{(n)}(x)|,$$

在区间$[a,b]$上的最大值，称为函数$y(x)$与$y_0(x)$在$[a,b]$上的n级距离，记为

$$d_n(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}\{|y-y_0|,|y'-y_0'|,\cdots,|y^{(n)}-y_0^{(n)}|\}. \tag{1-9}$$

特别，

$$d_0(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}|y-y_0|, \tag{1-10}$$

表示y与y_0在区间$[a,b]$上的零级距离；

$$d_1(y,y_0)=\max_{x\in[a,b]}\{|y-y_0|,|y'-y_0'|\} \tag{1-11}$$

表示y与y_0在区间$[a,b]$上的一级距离.

定义　设给定$y_0(x)\in C^n[a,b]$和正数δ，如果对于$y(x)\in C^n[a,b]$，有

$$d_n(y,y_0)<\delta, \tag{1-12}$$

则称y与y_0具有n阶的δ接近度．又称集

$$N_n[\delta,y_0]\triangleq\{y(x)\,|\,y(x)\in C^n[a,b],d_n(y,y_0)<\delta\}^* \tag{1-13}$$

为y_0的n阶δ邻域.

在(1-12)式中，特别当$n=0,1$时，分别表示y与y_0具有零阶与一阶的δ接近度．对于给定的正数δ，我们由(1-10)与(1-11)式表示的函数间的距离的意义知道，如果y与y_0具有一阶的δ接近度，那

* 记号$\triangleq$是“定义相等”或“表示”的意思.

么，就蕴含有零阶的δ接近度，但反之不成立．一般，若两曲线具有n阶的δ接近度，那么，它们将具有任何低于n阶的δ接近度．显然，接近度的阶数越高，两曲线接近得越好．

（三）连续泛函

定义 设泛函$J[y(x)]$的定义域为$\mathscr{F}$：$\{y(x)\mid y(x)\in C^n[a,b]\}$，又$y_0\in\mathscr{F}$．如果对于任意给定的正数$\varepsilon$，都能找到正数$\delta$，使得对于任意的

$$y(x)\in N_n[\delta,y_0]\subset\mathscr{F},$$

都有
$$|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon$$

成立，则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处是具有n阶δ接近度的连续泛函．

（四）泛函的极值

下面我们介绍泛函极值的定义，它和函数极值的定义是类似的．

定义 设$y_0(x)$是泛函$J[y(x)]$的定义域$\mathscr{F}$中的某一函数，若对于$\mathscr{F}$中任一函数$y(x)$都有

$$J[y_0(x)]\leqslant J[y(x)]\qquad(\text{或}J[y_0(x)]\geqslant J[y(x)])$$

则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处达到绝对极小值（或绝对极大值）．

若存在一正数δ，使对于任一$y(x)\in\mathscr{F}\cap N_0[\delta,y_0]$都有

$$J[y_0(x)]\leqslant J[y(x)]\qquad(\text{或}J[y_0(x)]\geqslant J[y(x)])$$

则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处达到强相对极小值（或强相对极大值）．

若存在一正数δ，使对于任一$y(x)\in\mathscr{F}\cap N_1[\delta,y_0]$都有

$$J[y_0(x)]\leqslant J[y(x)]\quad(\text{或}J[y_0(x)]\geqslant J[y(x)])$$

则称泛函$J[y(x)]$在$y_0(x)$处达到弱相对极小值（或弱相对极大值）．

极大值和极小值统称极值．

在上述绝对极值、强相对极值和弱相对极值的定义中，函数

$y_0(x)$是依次地与较小的函数集里的函数$y(x)$相比较而言的（如图1-4）. 因此，我们得出：

绝对极值⇒强相对极值⇒弱相对极值；

弱相对极值的必要条件⇒强相对极值的必要条件

⇒绝对极值的必要条件.

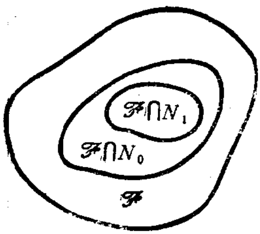

图 1-4

因此，我们推导泛函极值的必要条件时，只对泛函弱极值的必要条件进行推导. 在实际问题中，泛函极值的存在性，往往在问题给出时就已肯定了的. 因此，当泛函$J[y(x)]$有极值时，求出满足必要条件的未知函数$y(x)$，是我们着重要解决的问题.

泛函的极值问题，简称变分问题. 在一个变分问题中，还包含一些附加条件，如(1-2)、(1-6)给出函数在区间端点或区域边界上应满足的条件，叫边界条件. 其他的附加条件，叫约束条件，如(1-3)给出的等周条件就是一种约束条件.

求解变分问题就是要在指定的函数类中求泛函的极值，这类函数（其中每一函数至少应使泛函有定义，并满足边界条件及其他约束条件）叫做该变分问题的容许（可取）函数类，或容许（可取）曲线族. 因此，对于容许函数，我们总假定它在某函数类中来讨论.

§2 基本引理

为了导出泛函极值的必要条件，我们介绍下列基本引理.

引理 1 设函数$f(x)\in C[x_0,x_1]$，以及对任意函数$\eta(x)\in C[x_0,x_1]$，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，都有

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)\,dx=0, \tag{2-1}$$

则在区间$[x_0,x_1]$上，$f(x)\equiv 0$.