Z变换方法及典型题解分析

汤国熙　编著

宇航出版社

Z变换方法及典型题解分析

汤国熙　编著

宇航出版社

内 容 简 介

本书主要介绍了 Z 变换方法的概念、性质及应用。为便于读者较快、较深入地掌握其解题方法和技巧，书中配有660多道典型例题和近350道练习题，所选题目力求解题方法典型且富有启发性，并具有一定的深度和广度。在内容安排上，每章给出提要、例题，在每章后面配有一定量的练习题，书后给出答案或提示。

本书可供应用科学、系统工程，以及计算机、无线电、信号分析、自动控制等专业的教师、研究生、高年级大学生及有关工程技术人员参考、学习使用。

Z 变换方法及典型题解分析

汤国熙　编著

责任编辑：曹　英

*

宇航出版社出版

北京和平里滨河路 1 号

邮政编码：100013

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

航空航天部航天科技情报研究所印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：18.875 字数：507千字

1991年2月第1版第1次印刷　印数：1—2000册

ISBN 7-80034-329-4/O·009　　定价：12.00元

前　言

近30年来，由于计算机的发展，使电子工程、控制工程、系统工程及其它领域相继获得巨大发展。这些科学技术领域的迅速发展，是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密关联，相辅相成的。尤其近20年来发展起来的边缘学科更是与数学紧密结合。

Z变换方法是对离散变量序列进行运算的一种有力的数学工具，它广泛地应用于应用科学和系统工程之中，是工程、运筹学和应用科学中所必需的基本数学工具。它在分析和表示离散时域线性时变系统时，起了重要作用。读者要掌握这种数学工具，充分发挥这种数学方法的全部潜力，除在理论上进行严谨的学习之外，还需要具有一定的解题运算技巧。初学者从非专门论著的例题中，可以附带地获得一些变换方法的知识，在这种情况下，虽然能够学到一些诀窍，以解决某些典型问题，但是非常容易产生严重错误，往往是弊多利少。

随着科学技术的发展和数学在科学技术中的广泛应用，科技工作者仅利用微积分、常微分方程和积分变换的一些基本知识去解决连续时间系统问题，已远远不够。有关解决离散时间系统的数学方法，如Z变换方法、离散傅里叶（Fourier）变换等，已成为必需掌握的数学工具。但要使读者在较短时间内，较快、较深入地掌握这些内容和方法，特别是掌握其解题方法和技巧，会遇到不少困难，因此，出版一本具有一定理论深度又有一定广度，繁简适中的Z变换方法解题分析，指导读者运用基本概念、基本理论与基本方法去分析问题和解决问题，提高解题能力，掌握

必要的解题技巧，加深对基本内容的理解，就很有必要了。然而，到目前为止，还没有这方面内容的题解分析书籍，为此，编写了这本介绍Z变换方法及题解分析书籍，供读者参考。

本书共分8章30节，共选入660多个典型例题，并配有近350个练习题。选题不求全面，但求方法典型而富有启发性，选了一些较新颖有趣的问题，且具有一定的深度和广度。有些例题写的比较详细，解法灵活，努力给出各种分析和解题方法，有些解法比常用方法更为巧妙。在解题过程中，对部分典型题目，作了一些必要的注记，说明问题背景、应注意的问题、引用的公式、与其它问题的联系等等。在有些段落的后面，给出学习方法的小结。

在内容安排上，每节给出提要、例题。在每章后面给出练习题，同时给出答案或者提示。

虽然对所选例题均作了详细的解答，但仍希望读者自己独立地解题，然后进行比较，或者遇到困难时，再参考解答，这样也许对读者更有帮助。书中答案仅对读者的解答提供核对、补充或者最多是一种提示，这是本书给出解答的目的。

本书可供应用科学、系统工程，以及计算机、无线电、信号分析、自动控制等有关专业的教师、研究生、高年级大学生及有关的工程技术人员参考、学习使用。

也许读者还有更好的解题方法，希望提出来相互交流。解答中可能会有不妥或错误之处，欢迎读者批评指正。

编　　者

1985年3月于国防科学技术大学

目　录

数 学 符 号 表

$f(n)$，$g(n)$，…；$\{\cdots\}$	序列
T	取样间隔
z	变量
$Z[\cdot]$	Z 变换
$Z^{-1}[\cdot]$	逆 Z 变换
$\mathscr{Z}[\cdot]$	双边 Z 变换
$\mathscr{Z}^{-1}[\cdot]$	双边逆 Z 变换
$Z_\eta[\cdot]$，$Z_m[\cdot]$	修改 Z 变换
$L[\cdot]$	拉普拉斯变换
$L^{-1}[\cdot]$	拉普拉斯逆变换
$F(s)$	拉普拉斯变换函数
$F(z)$，$G(z)$，…	Z 变换函数
$\mathscr{F}(z)$，$\mathscr{G}(z)$，…	双边 Z 变换函数
$\tilde{F}(z)$	生成函数
$\tilde{F}(\omega)$	傅里叶变换函数
$F(z_1, z_2)$	二维 Z 变换函数
$F(z,\eta)$，$H(z, m)$	修改 Z 变换函数
$F_w(k)$	离散沃尔什变换
$F_k(N, z)$	沃尔什序列的 Z 变换
$\mathrm{Wal}(\cdot,\cdot)$，$\mathrm{Sal}(\cdot,\cdot)$，$\mathrm{Cal}(\cdot,\cdot)$	沃尔什序列
$u(n)$	单位阶跃函数
$\delta(n)$	δ-函数，δ 脉冲

$\left.\begin{array}{l}\|z\|>R \\ R_1<\|z\|<R_2\end{array}\right\}$	收敛域，R 为收敛半径
$[x]$	不超过 x 的最大整数
$\boldsymbol{A}^T$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵
▮	证明完毕
$\triangleq$	记为
$\oplus$	模 2 加
$\mathrm{Res}[\cdot]$	留数
$\mathrm{Re}(\cdot)$	复数的实部
$\mathrm{I_m}(\cdot)$	复数的虚部
$\triangle f(n)$	序列 $f(n)$ 向前差分
$\nabla f(n)$	序列 $f(n)$ 向后差分
$*$	两序列的褶积

第一章　Z 变换方法的概念

§1　Z 变换方法的基本概念

提　　要

定义 1　设有一连续时间信号 $f(t)(0\leqslant t<\infty)$ 或离散时间信号 $f(nT)$（$n=0$，1，2，…），T 是固定正常数，则称

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \quad (|z|>R) \tag{1.1}$$

为 $f(t)$ 或 $f(nT)$ 的 Z 变换，或称为单边 Z 变换。记为

$$Z[f(t)]=F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \quad (|z|>R) \tag{1.2}$$

这里 R 是式（1.1）复数级数的绝对收敛半径。

定义 2　设有一连续时间信号 $f(t)$（$-\infty<t<\infty$）或离散时间信号 $f(nT)$（$n=0$，±1，±2，…），T 是固定正常数，则称

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)z^{-n} \quad (0<R_1<|z|<R_2) \tag{1.3}$$

为 $f(t)$ 或 $f(nT)$ 的双边 Z 变换，记为

$$\mathscr{F}(z)=\mathscr{Z}[f(t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)z^{-n} \quad (R_1<|z|<R_2) \tag{1.4}$$

其中 $0<R_1<|z|<R_2$ 称为复数级数式（1.3）的收敛域。

注记：1. 在后面解题中，常取 $T=1$。

2. 如果 $f(nT)$ 是复数序列，那么，上述结论仍然成立。

例　题

1. 求下列序列的（单边或双边）Z 变换，并写出收敛域：

（1）$\frac{1}{2^n}u(n)$；　（2）$\frac{1}{2^n}u(-n)$；　（3）$\frac{1}{2^n}u(-n-1)$；

（4）$\frac{1}{2^n}[u(n)-u(10)]$；　（5）$u(n)-(-1)^n$，其中 $u(n)$ 表示单位阶跃函数。

解　由式（1.2）和式（1.4）得

（1）$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}u(n)z^{-n}=\frac{2}{2-z^{-1}}\quad\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$$

（2）$$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{2^n}u(-n)\,z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n=\frac{1}{1-2z}$$

$$\left(|z|<\frac{1}{2}\right)$$

（3）$$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{2^n}u(-n-1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^nz^n=\frac{2z}{1-2z}$$

$$\left(|z|<\frac{1}{2}\right)$$

（4）由于 $v(n)=u(n)-u(10)=\begin{cases}0, & n<0, n=10\\ 1, & 0\leqslant n\leqslant 9, 11\leqslant n,\end{cases}$

故 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}v(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{9}2^{-n}z^{-n}+\sum_{n=11}^{\infty}2^{-n}z^{-n}$

$$=\frac{1+(2^{-1}z^{-1})^{11}-(2^{-1}z^{-1})^{10}}{1-2^{-1}z^{-1}}\quad\left(|z|>\frac{1}{2}\right)$$

（5）因为当 n 为偶数和零时，序列元素为零，当 n 为奇数时，序列元素为2，故

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[u(n)-(-1)^n]z^{-n}=\frac{2z}{2z-1}\qquad(|z|>1)$$

2. 确定下列序列的双边 Z 变换，并写出收敛域：

（1）$\delta(n)$；（2）$\delta(n-1)$；（3）$\delta(n+1)$；（4）$\delta(n-l)$；（5）$\delta(n+l)$，其中 $\delta(n)$ 表示单位冲激函数，亦称为Delta函数，l 是自然数或者零。

解 由式（1.4），且根据 δ 函数的定义有

（1）$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$ （整个 Z 平面）

（2）$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-1)z^{-n}=z^{-1}$ （$|z|>0$）

（3）$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+1)z^{-n}=z$ （$|z|\geqslant 0$）

（4）$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-l)z^{-n}=z^{-l}$ （$|z|>0$）

（5）$\mathscr{F}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n+l)z^{-n}=z^{l}$ （$|z|\geqslant 0$）

3. 求下列序列的 Z 变换 $F(z)$：

（1）$\{0, 1, r, r^2, \cdots\}$；　　（2）$\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \cdots\}$

解　由式（1.2）得

（1）$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}z^{-n}=r^{-1}\frac{rz^{-1}}{1-rz^{-1}}=\frac{1}{z-r}$$

$$(|z|>|r|)$$

（2）$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{-4k}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)z^{-(4k+2)}=\frac{1-z^{-2}}{1-z^{-4}}$$

$$(|z|>1)$$

在（2）中，由于所给序列所成的级数在 $|z|>1$ 内是收敛，所以可以任意交换项的次序。

4. 求下列序列的 Z 变换：

（1）$$f(nT)=\begin{cases}1, & n=0, k, 2k, \cdots \\ 0, & \text{其它}；\end{cases}$$

（2）$$f(nT)=\begin{cases}n, & 0\leqslant n\leqslant N \\ 2N-n, & N+1\leqslant n\leqslant 2N \\ 0, & \text{其它}；\end{cases}$$

（3）$$f(nT)=\begin{cases}1, & n=0, 1, \cdots, k-1 \\ -1, & n=k, k+1, \cdots, 2k-1 \\ 0, & n=2k, \cdots \qquad (k=1, 2, \cdots)\end{cases}$$

解　由式（1.2）得

（1）$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z^{-k})^n=\frac{1}{1-z^{-k}}\qquad(|z|>1)$$

（2）$$F(z)=\sum_{n=0}^{N} nz^{-n}+\sum_{n=N+1}^{2N}(2N-n)z^{-n}$$

$$= 2N\sum_{n=N+1}^{2N} z^{-n} + 2\sum_{n=1}^{N} nz^{-n} - \sum_{n=1}^{2N} nz^{-n}$$

$$= 2Nz^{-(N+1)}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} + 2\frac{Nz^{-N-2}+z^{-1}-(N+1)z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$-\frac{2Nz^{-2(N+1)}+z^{-1}-(2N+1)z^{-2N-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$(|z|>1)$$

（3） $F(z)=\sum_{n=0}^{k-1} z^{-n}+\sum_{n=k}^{2k-1}(-1)z^{-n}=\frac{(1-z^{-k})^2}{1-z^{-1}}$

$$(|z|>1)$$

注记：这里用到等比级数求和公式。在（2）的求和中用到下关系式：

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x} \qquad (|x|<1)$，则

$$\sum_{n=0}^{m} nx^n = x\frac{ds(x)}{dx} = \frac{mx^{m+2}+x-(m+1)x^{m+1}}{(1-x)^2}$$

5. 求下列序列的 Z 变换：

（1） a^{rn}，a，r 是常数，$a\neq 0$；

（2） $\cos(\theta n)$ 和 $\sin(\theta n)$，θ 是常数；

（3） $r^n\cos(\omega n+\varphi)$，$0<r<1$，$\omega$，$\varphi$ 是常数。

解 （1）由式（1.2）得

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^{rn}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(a^r z^{-1})^n = \frac{z}{z-a^r}$$

$$(|z|>|a^r|)$$

在上等式中，当 $a=e$ 时，

$$Z[e^{rn}]=\frac{z}{z-e^{r}} \qquad (|z|>e^{r}) \tag{1.5}$$

当 $a=1$ 时，为单位阶跃函数情况：

$$Z[u(nT)]=\frac{z}{z-1} \tag{1.6}$$

当 $a=-1$ 时，$Z[(-1)^{rn}]=\dfrac{z}{z-(-1)^{r}}$ (1.7)

（2）考虑序列 $f(nT)=e^{i\theta n}$ 的 Z 变换，由式（1.5）：

$$Z[f(nT)]=\frac{z}{z-e^{i\theta}}=\frac{z(z-\cos\theta)+iz\sin\theta}{z^{2}-2z\cos\theta+1}$$

比较上等式两边的实部和虚部得

$$Z[\cos(\theta n)]=\frac{z(z-\cos\theta)}{z^{2}-2z\cos\theta+1} \qquad (|z|>1) \tag{1.8}$$

$$Z[\sin(\theta n)]=\frac{z\sin\theta}{z^{2}-2z\cos\theta+1} \qquad (|z|>1) \tag{1.9}$$

（3）考虑序列 $g(nT)=r^{n}e^{i(\omega n+\varphi)}$，由式（1.2）得

$$Z[g(nT)]=e^{i\varphi}\frac{z}{z-re^{i\omega}}$$

$$=\frac{e^{i\varphi}z(z-re^{-i\omega})}{(z-re^{i\omega})\ (z-re^{-i\omega})}$$

$$=\frac{z^{2}\cos\varphi-rz\cos(\omega-\varphi)+i(z^{2}\sin\varphi+rz\sin(\omega-\varphi))}{z^{2}-2rz\cos\omega+r^{2}}$$

比较上等式两边的实部与虚部得

$$Z[r^n\cos(\omega n+\varphi)]=\frac{z^2\cos\varphi-rz\cos(\omega-\varphi)}{z^2-2rz\cos\omega+r^2}\qquad(|z|>r)$$

(1.10)

$$Z[r^n\sin(\omega n+\varphi)]=\frac{z^2\sin\varphi+rz\sin(\omega-\varphi)}{z^2-2rz\cos\omega+r^2}\qquad(|z|>r)$$

(1.11)

在上两等式中，当 $\varphi=0$，$r=1$ 时，式（1.10）和式（1.11）分别是式（1.8）和式（1.9）的结果。

注记：在这里 z 是独立的复数自变量，但在（2），（3）中取实部，虚部时，是把它作为实数来处理。

6. 设序列 $f(nT)$ 为：（1）$\frac{a^n}{n!}e^{-a}$，（2）$\frac{1}{(n+1)!}$，（3）当 n 为偶数时，是 a^n，当 n 为奇数时是 b^n，求 $Z[f(nT)]$ 和 $\tilde{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^n$，这里 a，b 是常数。

解 （1）由式（1.2）得

$$Z[f(nT)]=e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(az^{-1})^n=e^{-a}e^{az^{-1}}\qquad(|z|>0)$$

$$\tilde{F}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-a}(az)^n=e^{-a}e^{az}\qquad(\text{全 }Z\text{ 平面})$$

（2）由式（1.2）得

$$Z[f(nT)]=z\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}-1\right]=z(e^{z^{-1}}-1)\qquad(|z|>0$$

$$\tilde{F}(z)=z\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right]=z(e^z-1)\qquad(\text{全 }Z\text{ 平面})$$

（3）由式（1.2）得

$$Z[f(nT)]=\sum_{k=0}^{\infty}a^{2k}z^{-2k}+\sum_{k=0}^{\infty}b^{2k+1}z^{-(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{1-a^2z^{-2}}+\frac{bz^{-1}}{1-b^2z^{-2}}\quad(|z|>\max(|a|,|b|))$$

在$|z|>\max(|a|,|b|)$内，级数式（1.1）是收敛的，所以上面第一个等号是成立的。

$$\tilde{F}(z)=\frac{1}{1-a^2z^2}+\frac{bz}{1-b^2z^2}\qquad\left(|z|<\min\left(\frac{1}{|a|},\ \frac{1}{|b|}\right)\right)$$

注记：1. $\tilde{F}(z)$ 称为$\{f(nT)\}$的生成函数。2. 此题在运算过程中用到幂级数展开式：$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(|x|<\infty)$。

7. 设$\{f(nT)\}=\{f(0),\ f(T),\ f(2T),\ \cdots\}$和$\{g(nT)\}=\{f(T),\ f(2T),\ \cdots\}$，试证 $Z[g(nT)]=zZ[f(nT)]-zf(0)$ $(|z|>R)$.

证　由式（1.2）得

$$Z[f(nT)]=f(0)+z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}f(nT)z^{-n+1}$$

$$\underline{\underline{n=1+m}}\,f(0)+z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}f((1+m)T)z^{-m}$$

$$=f(0)+z^{-1}Z[g(nT)]\qquad\blacksquare^{\ominus}$$

8. 求下列序列的双边 Z 变换，并绘出它的零点和极点的示意图：

（1）$f(nT)=a^{|n|}(0<|a|<1)$；

⊖ ▮ 表示证明完毕。