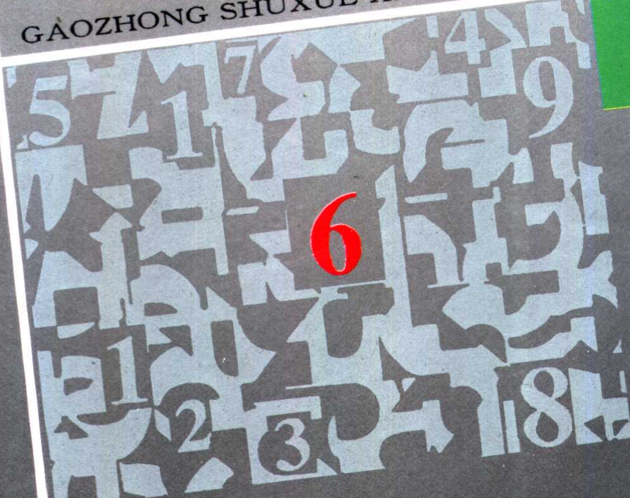
高中数学系统训练指南

GAOZHONG SHUXUE XITONG XUNLIAN ZHINAN



6

上海辞书出版社

高中数学系统训练指南

上海辞书出版社

• GAOZHONG SHUXUE XITONG XUNLIAN ZHINAN •

高中数学系统训练指南

上海辞书出版社出版
（上海陕西北路457号　邮政编码200040）
上海辞书出版社发行所发行　上海新华印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张12.25　插页1　字数286000
2000年2月第1版　2000年2月第1次印刷
印数1-8000
ISBN 7-5326-0653-8/O·26
定价：14.90元

编 者 的 话

《高中数学系统训练指南》是供师生使用的高中数学专题训练用书.本书以中学数学教学大纲和教材为依据,以高考考点知识和数学基本能力为重点,以专题形式编写为特色,注重培养学生的数学思维和各种能力.它具有三个特点:专题性(从内容和方法上优化选择若干专题,每个专题中确定若干重点);思维性(点拨思路,给出思维方法和解题规律);综合性(知识的综合、方法的综合).

本书编写中注意融知识、方法和技能为一体.全书分为两篇:知识篇和方法篇.共十八个专题.每个专题包含如下内容:(一)专题内容和要求,即参照教学大纲和高考说明,简要列出主要内容,提出复习要求.(二)专题例析,即根据重点、难点、考点、热点内容,精选例题,整理方法,归纳技巧,阐明重点知识和易混概念,总结解题规律和思维方法,指出注意之处.例析包含[例题]:选题经典、新颖、覆盖面广,难度相当于高考的中、高档题;[分析]:启迪思维、点拨思路;[解答]:书写规范、简明的答题过程,必要时给出多种解法;[说明]:总结解题规律,拓展讨论.(三)习题,按高考题型精选适量习题,供读者自我训练和评价学习水平.(四)参考答案和提示,即给出答案,部分习题作适当提示或给出解法,便于参考.

读者在使用本书时要根据自己的实际水平选择适当的专题和习题,循序渐进,逐步提高,切记不要贪多求快,要扎扎实实,一步一个脚印,才能取得较好的效果.

由于水平所限,编写中疏漏和不妥之处在所难免,热忱希望广大读者提出批评和改进意见,以便适时修订.

胡仲威

2000.1

目　录

知　识　篇

方　法　篇

知　识　篇

一、函数综合解题指导

本专题内容包括：二次函数，二次函数的图象和性质；幂函数；指数函数；对数函数；指数函数、对数函数的图象与性质；反函数；三角函数；反三角函数；三角函数的图象与性质．在理解函数概念的基础上，重点掌握函数的值域、最值、单调性、奇偶性、反函数及图象，并对函数与数列、不等式、三角、解几等知识的综合运用有足够的重视，而且对有关函数的有实际背景的新情景题会建立模型而求解之．

1．求函数的最值的方法有：二次函数法、判别式法、不等式法、换元法、利用函数性质（单调性）法、图象法、三角函数法、导数法．

2．对于底数含有字母的指数函数、对数函数要进行分类讨论，特别对对数函数要首先考虑其真数大于零．

3．若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则它们的单调性相同，即同为增函数或同为减函数，只不过可能单调区间不相同．利用求反函数可求出原函数的值域，原函数的图象与其反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称．

4．掌握用定义证明或判定函数的奇偶性与单调性，并能用求导数的方法判定函数的单调性．在判定函数的奇偶性时应当

注意:一个函数是奇函数或偶函数的必要非充分条件是函数的定义域关于原点对称.若此函数的定义域不关于原点对称,则即可判定该函数为非奇非偶函数.

5. 熟练掌握函数 $y=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$ 的性质,该函数在 $(-\infty,-\sqrt{a})$ 及 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上为增函数,在 $(-\sqrt{a},0)$ 及 $(0,\sqrt{a})$ 上为减函数,当 $x=\sqrt{a}$ 时,y 极小值为 $2\sqrt{a}$,当 $x=-\sqrt{a}$ 时,y 极大值为 $-2\sqrt{a}$.

6. 对三角函数与反三角函数要注意它们的区别与联系,特别应从角的形式、函数的名称、运算方式考虑解题思路,要善于进行差异分析和模式辨别,在解有关三角函数题时,应掌握三角中的基本方法:降次或升次、化切为弦(或化弦为切)、代换(如辅助角代换、万能代换、1 的代换).另外三角作为工具可用来解决:代数和解析几何中的值域或最值、复数的三角形式中的问题、以角为参数的解析几何中的轨迹问题、解斜三角形问题.而反三角函数可用于表示两条异面直线的夹角、直线与平面所成角、平面角、向量的夹角以及直线的倾斜角等,只不过需注意这些角的范围.

例 1 求函数 $y=(2^x-a)^2+(2^{-x}-a)^2(a>0)$ 的最小值.

[分析] 将右边展开,经代换后,转化成二次函数的最值问题,然后对字母 a 讨论.

[解] $y=2^{2x}+2^{-2x}-2a(2^x+2^{-x})+2a^2(a>0)$,
令 $t=2^x+2^{-x}$,则 $t\geqslant 2$,经代换后,得

$$y=t^2-2at+2a^2-2,\ t\geqslant 2,\ a>0.$$

(i) 若 $a\geqslant 2$,当 $t=a$ 时,即 $x=\log_2\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ 时,

$$y_{\min}=a^2-2.$$

（ⅱ）若$0<a<2$，则函数$y=t^2-2at+2a^2-2$在$[2,+\infty)$上为增函数，当$t=2$时，即$x=0$时，$y_{\min}=2(a-1)^2$.

$$\therefore\ y_{\min}=\begin{cases}a^2-2 & (a\geqslant 2),\\ 2(a-1)^2 & (0<a<2).\end{cases}$$

［说明］ 变量代换是在求函数最值中常用的方法，目的是将陌生的问题转化成熟悉的模式，然后按常规方法求之. 问题是有些学生不知如何代换，或不知整体代换，这需要一定的洞察力. 另外，变量代换要注意前后命题的等价性，本例题易漏考虑t的取值范围，从而造成错解.

例2 关于x的方程$\cos 2x+\sin x+a=0$有实数解，求实数a的取值范围.

［分析］ 将原方程化为$2\sin^2x-\sin x-a-1=0$，该方程有解，则令$t=\sin x$，转化为方程$2t^2-t-a-1=0$，$t\in[-1,1]$，再将方程转化为函数问题，令$f(t)=2t^2-t-a-1$，$|t|\leqslant 1$，即将原问题转化成二次函数$f(t)$与x轴的两个交点的横坐标在$[-1,1]$中，求a的取值范围. 这是通常的解法，但太复杂，其实只需将$2\sin^2x-\sin x-a-1=0$变形为：$a=2\sin^2x-\sin x-1$，即可利用闭区间上二次函数求最值的方法，求得a的取值范围.

［解］ $a=2\sin^2x-\sin x-1$，令$t=\sin x$，$t\in[-1,1]$，则$a=2t^2-t-1$. 当$t=\frac{1}{4}$时，$a_{\min}=-\frac{9}{8}$；当$t=-1$时，$a_{\max}=2$. 故$a\in\left[-\frac{9}{8},2\right]$.

例3 函数$y=\sqrt{\sin 2x-(h-4)(\sin x+\cos x)+h}$的定义域为$\boldsymbol{R}$，求$h$的取值范围.

[解] 令 $t=\sin x+\cos x, t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,则 $\sin 2x=t^2-1$,

$\therefore\ y=\sqrt{t^2-(h-4)t+h-1}, t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

要使原函数定义域为 $\boldsymbol{R}$,则需 $t^2-(h-4)t+h-1\geqslant 0$ 在 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$上恒成立.

令 $f(t)=t^2-(h-4)t+(h-1), t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

以下分三种情形讨论:

(ⅰ) 因为函数 $f(t)$的二次项系数为 $1>0$,

所以只要 $\Delta\leqslant 0$ 就能保证 $f(t)\geqslant 0$.

由

$$\Delta=(h-4)^2-4(h-1)=h^2-12h+20=(h-2)(h-10)\leqslant 0,$$

得

$$2\leqslant h\leqslant 10.$$

(ⅱ) 若二次函数图象的顶点横坐标 $t_{顶}=\dfrac{h-4}{2}\leqslant -\sqrt{2}$, $\Delta>0$ 且$f(-\sqrt{2})\geqslant 0$,则 $f(t)$在$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$上非负.

$$\therefore \begin{cases}\Delta>0\\ \dfrac{h-4}{2}\leqslant -\sqrt{2}\\ f(-\sqrt{2})\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(h-2)(h-10)>0\\ h\leqslant 4-2\sqrt{2}\\ 2+\sqrt{2}(h-4)+h-1\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow \text{无解}.$$

(ⅲ) 若二次函数图象的顶点横坐标 $t_{顶}=\dfrac{h-4}{2}\geqslant\sqrt{2}, \Delta>0$ 且 $f(\sqrt{2})\geqslant 0$,则 $f(t)$在$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$上非负.

$$\therefore \begin{cases}\Delta>0\\ \dfrac{h-4}{2}\geqslant\sqrt{2}\\ f(\sqrt{2})\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h<2, h>10\\ h\geqslant 4+2\sqrt{2}\\ h\leqslant 9+5\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow 10<h\leqslant 9+5\sqrt{2}.$$

综上所述,$h\in[2,\ 9+5\sqrt{2}]$.

[说明] 本例关键是代换,将三角问题转化成代数问题,最

终转化为含参量的二次函数在闭区间上的保号性问题.

例 4 平面直角坐标系上以点 $A(0,0)$,$B(8,4)$,$C(4,8)$,$D(2,8)$为顶点的四边形 $ABCD$ 被直线 $y=ax\left(\frac{1}{2}<a<4\right)$ 分为两部分.

(1) 直线 $l:y=ax$ 与直线 AB、BC 或 CD 所围成的一部分的面积为 S,试用 a 表示 S;

(2) 若直线 l 恰将四边形 $ABCD$ 的面积二等分,试求 a 的值.

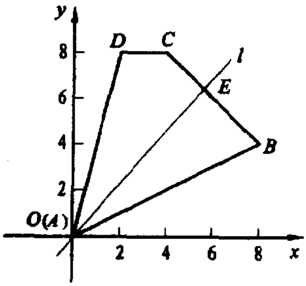


图 1-1

[分析] 如图 1-1,直线 l 与线段 BC 的交点为 E,此时围成的图形是$\triangle ABE$;而直线 l 与线段 CD 的交点为 F,则围成的图形是四边形 $ABCF$. 当直线 l 过 C 点时,可得 a 的分界点.

[解] (1) $l_{BC}:x+y=12$,

当$\frac{1}{2}<a\leqslant 2$ 时,由$\begin{cases}y=ax,\\x+y=12,\end{cases}$ 得交点为 $E\left(\frac{12}{a+1},\frac{12a}{a+1}\right)$,

$$S_{\triangle ABE}=S(a)=\frac{1}{2}|AB|\frac{\left|\frac{12}{a+1}-\frac{24a}{a+1}\right|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{80}\times\frac{12|1-2a|}{\sqrt{5}(a+1)}=\frac{24(2a-1)}{a+1}.$$

当 $2<a<4$ 时,由$\begin{cases}y=ax,\\y=8,\end{cases}$得交点为

$$F\left(\frac{8}{a},8\right),|DF|=\frac{8}{a}-2.$$

$$S_{\text{四边形}ABCF}=S_{\text{四边形}ABCD}-S_{\triangle ADF}=32-\frac{1}{2}\times 8\times\left(\frac{8}{a}-2\right)$$

$$=\frac{8(5a-4)}{a}.$$

$$\therefore\ S(a)=\begin{cases}\dfrac{24(2a-1)}{a+1},\dfrac{1}{2}<a\leqslant 2,\\ \dfrac{8(5a-4)}{a},2<a<4.\end{cases}$$

(2) l 将四边形 $ABCD$ 的面积二等分,

$\because\ S_{四边形ABCD}=32$,

当 $\frac{1}{2}<a\leqslant 2$ 时,$\frac{24(2a-1)}{a+1}=16,a=\frac{5}{4}$;

当 $2<a<4$ 时,$\frac{8(5a-4)}{a}=16,a=\frac{4}{3}$(舍).

$\therefore\ a=\frac{5}{4}$.

[说明] 由于直线 l 与四边形 $ABCD$ 边界的交点位置不同,故找出分界点是关键,另外可将四边形 $ABCF$ 的面积问题转化为四边形 $ABCD$ 的面积与三角形 ADF 面积之差的问题.

例 5 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=e^{1999-tn}$($n\in N$,t 为常数,e 是自然对数的底数).

(1) 求证数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $t=2$,求数列 $\left\{\frac{\ln a_{n+1}^2}{\ln a_n}\right\}$ 的最大项和最小项的值.

(1) [证] $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{e^{1999-tn}}{e^{1999-t(n-1)}}=e^{-t}$(常数),$a_1=e^{1999-t}$,所以数列 $\{a_n\}$ 是以 e^{1999-t} 为首项,e^{-t} 为公比的等比数列.

(2) [解] 令 $C_n=\frac{\ln a_{n+1}^2}{\ln a_n}$,又因为 $t=2$,$a_n=e^{1999-2n}$,

$$\therefore\ C_n=\frac{2[1999-2(n+1)]}{1999-2n}=2-\frac{4}{1999-2n}=2+\frac{2}{n-999.5}.$$

此时 C_n 实质是关于 n 的反比例函数($n\in N$).由图 1-2,可

知：

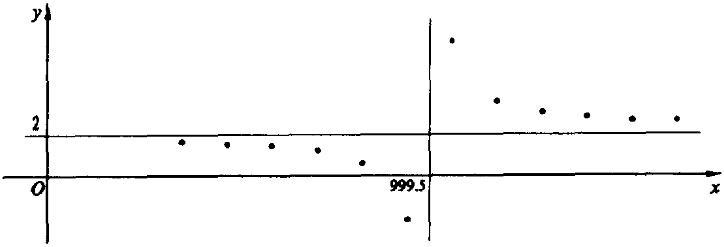


图 1-2

当 $n-999.5>0$，即 $n\geqslant 1000(n\in N)$时，C_n随n 的增大而减小，所以

$$2<C_n\leqslant C_{1000}=2+\frac{2}{1000-999.5}=6;$$

当 $n-999.5<0$，即 $n\leqslant 999(n\in N)$时，C_n也随 n 的增大而减小，所以 $2>C_n\geqslant C_{999}=2+\frac{2}{999-999.5}=-2.$

综上所述，对任意自然数，有

$$C_{999}\leqslant C_n\leqslant C_{1000},$$

所以 $\{C_n\}$ 的最大项为 $C_{1000}=6$，最小项 $C_{999}=-2$，即 $\left\{\frac{\ln a_{n+1}^2}{\ln a_n}\right\}$的最大项为 6，最小项为 -2.

[说明] 数列的通项公式 a_n与它的项数一般可看成是一个函数的关系式，只不过定义域是自然数集 N 或它的子集. 如：等差数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，在 $d\neq 0$ 时，为关于 n 的一次函数，它的图象是直线上的孤立点，等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，在 $d\neq 0$ 时，为关于 n 的二次函数，它的图象是抛物线上孤立的点. 而本例最后归结为经

平移后的反比例函数,求此函数的最值问题.当自变量是连续变量时,反比例函数应无最值可言,但本例自变量是离散的量,故可有最值存在,难点在于不知如何求最值,其实只需画出图形,利用数形结合,即可求得.

例6　已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)$,当动点 $P(x,y)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图象上时,点 $Q(\frac{x}{3},ny)$ 在函数 $y=g_n(x)$ 的图象上 $(n\in N)$.

(1) 求函数 $g_n(x)$ 的表达式;

(2) 设 $S_n(x)=g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)$,当 $x\in[1,+\infty)$ 时,问 n,x 分别取何值时,$S_n(x)$ 的值最小,并求出这个最小值;

(3) 设 $G_n(x)=2^{g_n(x)}$,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}[G_1(x)+G_2(x)+\cdots+G_n(x)],$$

当 $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ 时,求 $S(x)$ 的值域.

[分析]　$g_n(x)$ 用点 P 的横坐标 x 表示,然后利用函数的性质求 $S_n(x)$ 的最小值,求出极限 $S(x)$,它仍然是关于 x 的函数,求其值域.

[解]　(1) 设 $Q(X,g_n(X))$,则

$$X=\frac{x}{3},g_n(X)=ny=n\log_2(x+1),$$

而 $x=3X$,因而　$g_n(X)=n\log_2(x+1)=n\log_2(3X+1)$,

$$\therefore\ g_n(x)=n\log_2(3x+1).$$

(2)
$$\begin{aligned}S_n(x)&=g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)\\&=\log_2(3x+1)+2\log_2(3x+1)+\cdots+n\log_2(3x+1)\\&=\log_2[(3x+1)(3x+1)^2(3x+1)^3\cdots(3x+1)^n]\\&=\frac{n(n+1)}{2}\log_2(3x+1).\end{aligned}$$

由于 $x\geqslant 1$,任取 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$,不妨设 $1\leqslant x_1<x_2$,则 $0<\dfrac{3x_1+1}{3x_2+1}<1$,所以 $\log_2\dfrac{3x_1+1}{3x_2+1}<0$,即

$$f(x_1)-f(x_2)=\log_2(3x_1+1)-\log_2(3x_2+1)<0,$$

又 $$\frac{n(n+1)}{2}>0\quad(\because\ n\in N),$$

所以 $S_n(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数,因此 $x=1$ 时,$S_n(x)$的最小值为 $S_n(1)=n(n+1)$.

又 $S_n(1)=n(n+1)(n\in N)$在 N 上为增函数,于是 $n=1$ 时,$S_n(1)$最小值为 $S_1(1)=2$. 因此,当 $x=1,n=1$ 时,$S_n(x)$的最小值为2.

(3) $$G_n(x)=2^{n\log_2(3x+1)}=(3x+1)^n,$$

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}[(3x+1)+(3x+1)^2+\cdots+(3x+1)^n]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3x+1)[1-(3x+1)^n]}{-3x}.$$

由 $-\dfrac{1}{3}<x<0$,知 $0<3x+1<1$,

$$S(x)=-\frac{3x+1}{3x}=-1-\frac{1}{3x},x\in\left(-\frac{1}{3},0\right),$$

$\because\ S(x)$在$\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$上为增函数, $\therefore\ S(x)\in(0,+\infty)$.

[说明] 本例关键是理解 $g_n(x),S_n(x),G_n(x)$的意义,知道相对于变量 x 来说 n 为常数,反之,求数列极限时,x 为相对常数,利用等差、等比数列的求和公式以及函数的单调性解题.

例7 已知定义在 R 上的函数$f(x)$为奇函数,且在$[0,+\infty)$上是增函数,对于任意实数 $\theta\in R$,不等式

$$f(\cos2\theta-3)+f(4m-2m\cos\theta)>f(0)$$

恒成立.求实数 m 的取值范围.

[分析] 首先需利用函数的性质,去除符号 f,建立关于

$\cos\theta$ 和 m 的不等式，然后用二次函数在闭区间上的保号性解之，或利用求函数的最值解之.

［解一］ 由 $f(x)$在 R 上为奇函数，知 $f(-x)=-f(x)$，令 $x=0$，则 $f(0)=0$.

由于 $f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，且 $f(x)$在 R 上为奇函数，可证 $f(x)$在$(-\infty,0]$上也为增函数，且 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant f(0)=0$，$x\leqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant f(0)=0$. 因而 $f(x)$在 R 上也为增函数.

$\therefore\ f(\cos 2\theta-3)>-f(4m-2m\cos\theta)+f(0)$.

由 $f(x)$为奇函数，得

$$f(\cos 2\theta-3)>f(2m\cos\theta-4m).$$

由 $f(x)$在 R 上为增函数，得

$$\cos 2\theta-3>2m\cos\theta-4m.$$

化简得
$$m<\frac{\cos 2\theta-3}{2\cos\theta-4}=\frac{2\cos^2\theta-4}{2\cos\theta-4}.$$

令
$$g(\theta)=\frac{\cos^2\theta-2}{\cos\theta-2},$$

原问题转化成求 $g(\theta)$的最大值，而 m 大于此最大值，就可得 m 的取值范围.

$$g(\theta)=\frac{\cos^2\theta-2}{\cos\theta-2}=\cos\theta+2+\frac{2}{\cos\theta-2}=\cos\theta+2-\frac{2}{2-\cos\theta},$$

令
$$t=2-\cos\theta,\ t\in[1,3],$$

$$g(t)=4-t-\frac{2}{t},\ t\in[1,3],$$

由于 $t>0$，于是 $t+\frac{2}{t}\geqslant 2\sqrt{2}$当且仅当 $t=\sqrt{2}$时等号成立且 $\sqrt{2}\in[1,3]$.

$\therefore\ g(t)\leqslant 4-2\sqrt{2}$，$m>g(t)_{\max}$，$m>4-2\sqrt{2}$，

$\therefore$ m 的取值范围是$(4-2\sqrt{2},+\infty)$.

[解二] 如解一,证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为增函数,可得不等式

$$2\cos^2\theta-2m\cos\theta+4m-4>0.$$

现将此不等式问题转化成二次函数在闭区间$[-1,1]$上保号性的问题.

令 $f(t)=2t^2-2mt+4m-4,t\in[-1,1]$,

问题转化为$f(t)$在闭区间$[-1,1]$上恒大于零,求 m 的取值范围.

下面分三种情况讨论:

(i) $\Delta<0 \Rightarrow m\in(4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$.

(ii) $\begin{cases}\dfrac{m}{2}<-1\\ \Delta\geqslant0\\ f(-1)>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m<-2\\ m\leqslant4-2\sqrt{2},m\geqslant4+2\sqrt{2}\\ m>\dfrac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow$

无解.

(iii) $\begin{cases}\dfrac{m}{2}>1\\ f(-1)>0\\ f(1)>0\\ \Delta>0\end{cases} \Rightarrow m\in(4-2\sqrt{2},+\infty)$.

$\therefore$ $m\in(4-2\sqrt{2},+\infty)$.

[说明] 解二比解一略烦一点,且易漏考虑(ii)(iii)两种情况.

解答中所用的方法,是分离参数法,一般在解含参数的不等式中,用此法将参数分离出来,不等式变为 $g(m)>f(x)$(或 $g(m)<f(x)$).若 $f(x)$的最大值为 k,则可得 $g(m)>k$(若