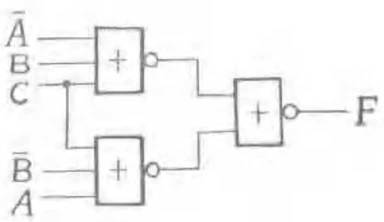
逻辑代数与电子计算机

汪世铭 任毅 编



安徽省数学学会
芜湖教育学院

逻辑代数与电子计算机

汪世铭　任　毅　编

安徽省数学学会
芜湖教育学院　出版

芜湖市西门纸品厂　印刷

安徽省人民政府出版事业管理局
非出印字 第 134 号

（内部发行）

前　　言

随着电子计算机和自动控制技术的日益发展和广泛应用，关于它的数学基础——逻辑代数，已经逐渐成为每一个参加四个现代化建设的普通劳动者必备的知识。因此，教育部决定将这部分内容有计划地逐步纳入中学数学课程中去。与此相适应，全国师范院校数学系（科）普遍增设了这方面的课程，然而缺乏合适的教材。为此，根据教育部去年十一月在天津召开的师专数学工作座谈会精神，参考我省及一些兄弟省市师专关于本课程的教学大纲，在我们教学实践的基础上编写了这本讲义。考虑到各校开设该课程的时间和学时数不尽相同，并且兼顾中学数学教师的自学进修，本讲义在内容安排上基本自成体系。全书可供65—70学时授课使用。如果授课安排52—56学时，可以删节带有＊号的章节，这将不会影响前后衔接。

全书共七章。第一章简要地介绍了数的不同进位制的概念以及各种进位制之间的转换方法和理论证明。第二、三、四章分别阐述了集合代数、逻辑代数和开关代数的基本概念和理论。由于三者就公理化结构看，都属于同一种代数系统，在概念和理论上是互相平行的，所以，为了尽量避免重复，在讲述时各有侧重。集合代数部分着重阐明公理系统的建立以及从公理出发推证集合恒等式的方法；逻辑代数部分着重叙述理论的完备性及逻辑函数的代数化简法；开关代数部分着重介绍另一种实际工作者广泛采用的卡诺图化简法及其在逻辑设计中的应用。第五章，在前述各种实际背景的基础上

引入抽象代数结构的概念，进而证明集合代数、逻辑代数和开关代数的同构性。于是，可从理论上认识到三者为什么如此类似的实质。第六章阐述了一般布尔代数的概念和性质，这对于逻辑代数理论的完整性和居高临下地认识逻辑代数的抽象本质都是必要的。第七章简略地介绍了电子计算机的发展情况，基本工作原理和硬件、软件等基本概念。考虑到目前多数师范专科学校尚缺乏上机实习的条件，对计算机的构造和操作方法未作介绍。然而，有了本书对电子计算机概貌的认识，读者完全可以自行阅读计算机的“程序设计”、“算法语言”等书，学会使用计算机。

在编写这本讲义的过程中，安徽大学数学系和芜湖教师进修学院的领导给予我们很大的鼓励和支持。安徽大学数学系郑祖庥副教授、芜湖师专葛尚范副教授对编写工作做了指导并认真地审阅和订正了全部手稿。安徽大学数学系计算机教研室张道胜、黄涛同志、巢湖师专程正权同志、芜湖师专刘为铨同志、蚌埠教师进修学院张振龙同志以及我省各兄弟院校的主讲该课程的同志们提出了宝贵的意见。徐家来同志提供了不少参考资料，程世琼、程立志同志协助选编了部分习题。在出版发行的过程中，杨守昌同志和安大印刷厂给予很多帮助。在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中难免有不少错误和缺点，敬请读者批评指正。

编　者

一九八二年二月

再版前言

《逻辑代数与电子计算机》第一版出书后，受到读者的欢迎，许多单位用作教材，给我们以极大支持和鼓励。借此机会，表示感谢。

鉴于去年10月在昆明召开了全国师专数学专业课程教学大纲审定会。为了使这本教材更加符合大纲要求，这次根据昆明会议通过的全国师专"逻辑代数与电子计算机课程教学大纲"，结合一年来的教学实践，在广泛征求读者意见的基础上，本着精炼压缩初版书稿，保持原书基本特色，贯彻大纲精神的原则，对初版书进行了全面的修订；并在今年暑期太平—黄山逻辑代数讨论会上再次征求了与会代表的意见，最后定稿再版。本版根据大纲要求，增加了第四章，命题代数及其在数学推理中的应用；第八章，基本 BASIC 语言。删去了初版书的第五章，代数系统的概念。第六、八章为选学内容，其余各章为必修内容。

在这次修订过程中，得到安徽大学数学系实验室主任王继清老师的诸多帮助，于堰教师进修学院项楷尧老师，洛阳师专张鹏祥老师，台州师专徐光章老师，西昌师专田明老师等提出了宝贵的意见，特此致谢。由于我们水平有限，本版还会有不少错误和不当之处，敬请各地专家和读者批评指正。

编　者

一九八三年十月

目 录

第一章 进位制

§1.1 二进制及其算术运算……………………………(1)

§1.2 不同进位制数间的转换方法…………………(7)

★ §1.3 关于数制转换的若干定理……………………(14)

§1.4 计算机中数的表示形式及运算………………(20)

第二章 集合代数

§2.1 集合与集合代数………………………………(25)

§2.2 集合恒等式的证明……………………………(33)

第三章 逻辑代数

§3.1 命题及其运算…………………………………(46)

§3.2 逻辑式、逻辑函数及其真值表………………(56)

§3.3 逻辑代数的概念………………………………(67)

§3.4 标准形和完全性………………………………(73)

§3.5 最小项和范式…………………………………(80)

§3.6 逻辑表达式的化简……………………………(95)

第四章 命题代数及其在数学推理中的应用

§4.1 蕴涵关系及蕴涵定律…………………………(104)

§4.2 数学命题………………………………………(108)

§4.3 数学推理………………………………………(118)

§4.4 逻辑方程………………………………………(125)

第五章　开关代数及其在逻辑设计中的应用

§5.1 开关电路与开关代数……………………… (137)
§5.2 卡诺图化简法……………………………… (146)
§5.3 开关代数在逻辑设计中的应用………… (161)

第六章　一般布尔代数

§6.1 二元关系与等价关系……………………… (175)
§6.2 偏序关系和格……………………………… (184)
§6.3 格的概念及其性质………………………… (194)
§6.4 布尔格和布尔代数………………………… (203)
§6.5 有限布尔代数的唯一性………………… (212)

第七章　电子计算机简介

§7.1 电子计算机发展概况……………………… (222)
§7.2 电子计算机的组成及工作原理………… (227)
§7.3 软件概述…………………………………… (242)

第八章　基本BASIC语言

§8.1 BASIC的基本概念……………………… (253)
§8.2 BASIC的基本语句……………………… (258)
§8.3 如何用BASIC语言编程序…………… (283)
§8.4 BASIC程序的写入、修改和执行…… (297)

第一章　进 位 制

当前，电子计算机的应用是如此广泛，以至于有人称之为电子计算机时代。而要了解计算机就首先要了解它所采用的进位制。事实上，在计算机的设计和使用中涉及了多种进位制，如二进制、八进制、十进制、十六进制、二十进制等等，但最基本的还是二进制。另一方面，由于人们的长期习惯，在生产实践和科学实验中提出的数据通常都用十进制表示的，这就要求我们弄清楚不同的进位制之间的转换关系。本章所要阐述的内容主要是这两个方面。

§1.1　二进制及其算术运算

1.1.1　进位制的概念

“逢十进一，退一当十”是大家都习惯的。流行的说法是，人有十个手指头，屈指计数，自然逢十进一，因此十进制好象是古往今来，天经地义。其实不然，由于历史的原因和应用的需要，历来就存在着各种不同的进位制。例如，某人给弟弟变“魔术”，他说：“这里有八个数，你随意选定一个记在心里，然后我问你三个问题，你要如实回答我，我就能猜出你选定的是一个什么数。”弟弟选好数后，他把八个数平均分成两半，问：“你的数在哪一半中？”弟弟回答后，他又把八个数平均分成两半，又问：“你的数在哪一半

中？”弟弟回答后，他再把八个数平均分成两半，再问，“你的数在哪一半中？”弟弟再次回答后，他正确地报出了弟弟所选的数。弟弟十分惊奇。你知道哥哥是怎么猜到这个数的吗？熟悉二进制的读者不难看出这个问题的答 。所以，我们应当把视野放宽，以自然的态度来接受不同的进位制，特别是计算机中使用的二进制。

我们最常用最熟悉的十进制数是由0，1，2…，9十个记数符号（又称数码），根据“十进一”，“退一当十”的进退位方式排列成的有规则的序列，其中每个数码按其所在位置对应一个10的某次幂为位值（或权）。例如，十进制数342.95可表为：

$$342.95 = 3\times10^2 + 4\times10^1 + 2\times10^0 + 9\times10^{-1} + 5\times10^{-2}。$$

在一种进位制中，全部可使用的数码总数称为它的基数，十进制的基数为10。

稍作推广，不难知道，二进制数是由0，1两个数码，按照“逢二进一”，“退一当二”的方式排列成的有规则序列，它的每个数码的位值为2的某次幂，而基数为2。例如，二进制数$(101.01)_2$可表为：

$$(101.01)_2 = 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0 + 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2}。$$

进一步推广，可以知道：

若r是大于或等于2的整数，则r进制数S的展开式为：

$$\begin{aligned}(S)_r &= (x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-(m-1)} x_{-m})_r \\ &= x_n r^n + x_{n-1} r^{n-1} + \cdots + x_1 r^1 + x_0 r^0 \\ &\quad + x_{-1} r^{-1} + \cdots + x_{-m} r^{-m} \\ &= \sum_{i=n}^{-m} x_i r^i\end{aligned}$$

公式 $(S)_r=\sum_{i=n}^{-m}x_ir^i$ 叫做r进制数S的按权展开式，由此式可将r进制数S的特点归结为：

（i）只有r个数码，各个x_i只能在0，1，2…，r－1这r个数码中间取值；

（ii）每一位数码x_i表示的数值是x_ir^i，r^i即数码x_i所在数位的位权或位值，x_i即r^i的系数，x_i所在数位称为r的i次幂位；

（iii）"逢r进一，退一当r"，相邻两位高位的一个单位等于低位的r个单位。

当基数r＞10时要加选数码。如r＝12，要加$\overline{0}$，$\overline{1}$或t，e。

1.1.2 二进制的算术运算

二进制的加减乘除四则算术运算，与十进制十分相似，它的加法表、乘法表比十进制简单得多。

加法表

+	0	1
0	0	1
1	1	10

乘法表

×	0	1
0	0	0
1	0	1

例1． 1011.01＋10.11＝?

解：

$$\begin{array}{rrcr} & 1011.01 & \cdots & 11.25 \\ + & 10.11 & \cdots & 2.75 \\ \hline & 1110.00 & \cdots & 14.00 \end{array}$$

∴1011.01＋10.11＝1110.00

其特点是逢二进一。

例2． 1101.1×1.01＝?

解：

$$
\begin{array}{rl}
1101.1 & \cdots\ 13\frac{1}{2} \\
\times \quad 1.01 & \cdots\ 1\frac{1}{4} \\
\hline
11011 & \\
00000 & \\
+\ 11011 & \\
\hline
10000.111 & \cdots\ 16\frac{7}{8}
\end{array}
$$

$\therefore\ 1101.1\times1.01=10000.111$

其特点是移位相加。

利用加法、减法互为逆运算的原理得到减法规则：

$0-0=0$，$1-0=1$，$1-1=0$，$10-1=1$。

例3． $1011.101-110.11=?$

解：

$$
\begin{array}{rl}
1\ 0\ 1\ 1\ .\ 1\ 0\ 1 & \cdots\ 11\frac{5}{8} \\
-\quad 1\ 1\ 0\ .\ 1\ 1 & \cdots\ 6\frac{3}{4} \\
\hline
1\ 0\ 0\ .\ 1\ 1\ 1 & \cdots\ 4\frac{7}{8}
\end{array}
$$

$\therefore\ 1011.101-110.11=100.111$

其特点是借一当二。

乘法与除法也是互为逆运算的，故得除法规则：

$0\div1=0$，　　$1\div1=1$。

例4． $10001.1\div111=?$

解：

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 1\ 0\ .\ 1 \quad \cdots 2\frac{1}{2} \\
\cline{2-2}
7\cdots111 & \big)\,1\ 0\ 0\ 0\ 1\ .\ 1 \quad \cdots 17\frac{1}{2} \\
 & \ \ 1\ 1\ 1\ 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 1\ 1\ \ 1 \\
 & \qquad 1\ 1\ \ 1 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\therefore\ 10001.1\div111=10.1$

其特点是移位相减。

读者不难将二进制的算术运算推广到 r 进制的情形。

1.1.3 二进制与电子计算机

电子计算机要进行大量的数据运算，选择什么样的记数法来表示数字对计算机的构造和性能都有很大的影响。大多数计算机之所以采用二进制，这是因为：

第一，易于实现。制造具有两个稳定物理状态的元件，如电子元件的开和关，比制造具有三个稳定物理状态或十个状态的元件要简单得多。

第二，节省设备。假定表示一种状态需要一个元件，那么采用十进制表示 0 到 999 这一千个数需要用三位，每位十种状态，总共需要30个元件；而采用二进制表示 0 到1023这一千零二十四个数需要十位，每位两种状态，总共只要20个元件。我们很容易证明，基数为 3 时最省设备。但是，目前制造具有三个稳定状态的元件不但难度大，而且可靠性差，所以通常计算机还是采用二进制。

第三，运算简单。二进制的四则运算可归结为加法，减法和移位，采用适当的编码方法，减法又可变成加法来做，因此只要有加法器和移位器线路，计算机就能完成全部算术运算。

第四，还可用来进行多种逻辑运算。这是因为二进制的两个数码“1”和“0”恰可用来表示二值逻辑中命题的两个值。

应当指出，二进制虽有上述优点，但也不是完美无缺的，把一个较大的数1023表示成二进制数是1111111111，共十位，读写和观察都不方便。还有，实际数据都是十进制的，计算机又只能对二进制数进行运算，因此在把数据输入和输出机器的过程中，要进行两次数据转换，占用不少机器

时间。所以，根据不同的需要，也有不少专用数据处理机是采用十进制的。在实际工作中，还有采用八进制或十六进制的。

习 题 一

1．分别写出二进制、五进制、八进制的前十二个整数（从0开始，由小往大写）。

2．在□中写入“1或0”使下列不等式成立

（1）110□□>11000，（2）100□□>10010，

（3）10□□0>10100，（4）1□01□□>11010。

3．用二进制数表示一个三位长的十进制整数最少需要几位？最多需要几位？

4．十二位长的二进制整数的表示范围是多大？（提示：这里既没有规定最高位非零，又没有说明该数可否为负数。）

5．在二进制中计算：

（1）$1011+111+101$，（2）$1001+101+11$，

（3）$1001+1101+1111+110$，（4）$11101-1011$，

（5）$10001-1100$，（6）1100×100，

（7）1110×11，（8）1011×101，

（9）$11110\div1010$，（10）$100101011\div1101$，

（11）$101.111+11.011$，（12）$1000-101.1$，

（13）$1100.10-111.01$，（14）1010×11.01

（15）101.11×10.01，（16）$0.1011\div11.001$，

（17）$100100100+10101010-11100111-11011011$，

（18）$10101101\div1101+1011\times101$。

6．写出下列各数的按权展开式：

（1） $(4211.375)_{10}$，（2） $(-1011.011)_2$，

（3） $(3\overline{5}\,\overline{2}.\overline{0}4)_{16}$。

7．（1）一个奇的二进制整数末一位数码是什么？

（2）一个偶的二进制整数末一位数码是什么？

8。如何判断一个七位的二进制正整数：

$N=K_7K_6K_5K_4K_3K_2K_1$ 是4的倍数？

9。设正整数 $A=(K_mK_{m-1}\cdots K_2K_1K_0)_{10}=(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0)_9$ 证明：（1）a_0 是 $K_m+K_{m-1}+\cdots+K_2+K_1+K_0$ 被 9 除时所得的余数，

（2）A被9整除当且仅当 $K_m+K_{m-1}+\cdots+K_2+K_1+K_0$ 被 9 整除。

10。如果 $8\times8=54$ 是正确的，$7\times6=$？你知道吗？

§1.2 不同进位制数间的转换方法

1.2.1 二进制数转换成十进制数

直接利用二进制数的按权展开式，便可将任何一个二进制数转换成十进制数。

例1．（1） $(10110)_2=(\ ?\ )_{10}$

（2） $(0.1101)_2=(\ ?\ )_{10}$

（3） $(111111.011001)_2=(\ ?\ )_{10}$

解：（1） $(10110)_2=1\times2^4+1\times2^2+1\times2^1=22$

（2） $(0.1101)_2=2^{-1}+2^{-2}+2^{-4}=0.8125$

（3） $(111111.011001)_2$

$$=2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+1+2^{-2}+2^{-3}+2^{-6}$$

$$=63\frac{25}{64}$$

如二进制数的位数较多，可先将它转换成八进制数，再转换成十进制数，这种用八进制作过渡的转换方法又叫二——八——十转换法。

例2. (1)　$(111111.011001)_2=(\ ?\ )_{10}$

(2)　$(11101110.0111101)_2=(\ ?\ )_{10}$

解：(1)　$(111,\ 111.011,\ 001)_2$

$$=(77.31)_8=7\times8+7+3\times8^{-1}+8^{-2}$$

$$=63\frac{25}{64}$$

(2)　$(011,\ 101,\ 110.011,\ 110,\ 100)_2$

$$=(356.364)_8=3\times8^2+5\times8+6+3\times8^{-1}+6\times8^{-2}+4\times8^{-3}$$

$$=238\frac{244}{512}=238\frac{61}{128}$$

按权展开求和的方法对于一般 r 进制数转换成十进制数也是适用的。

为避免位数较多时求和的麻烦，还可分别对整数部分、小数部分采用下列不直接利用按权展开式的转换方法。

例3. [乘2（或乘r）加整法]

求$(101011)_2=(\ ?\ )_{10}$

解：$(101011)_2=2^5+0\times2^4+2^3+0\times2^2+2+1$

$$=2\{2^4+0\times2^3+2^2+0\times2^1+1\}+1$$

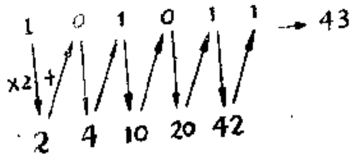
$$=2\{2[2^3+0\times2^2+2^1+0\times1]+1\}+1$$

$$=2\{2[2(2^2+0\times2^1+1)+0]+1\}+1$$

$$=2\{2[2(22+0+1)+0]+1\}+1$$

$$=2\{2[2(22\times1+0+1)+0]+1\}+1$$

从最里面的括号往外看，恰好是用 2 去乘原二进制数 $(101011)_2$ 最高位的 1 加上其后一位的 0，再乘 2 加上再下一位的 1，再乘 2 加上…这个运算过程可以简写成：



$\therefore (101011)_2 = 43$

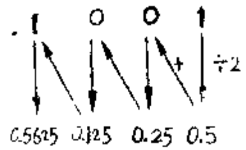
例4. ［2 除（或 r 除）加整法］

求 $(0.1001)_2 = (?\ )_{10}$

解： $(0.1001)_2 = 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 2^{-4}$

$= 2^{-1}\{1 + 2^{-1}[0 + 2^{-1}(0 + 1 \times 2^{-1})]\}$

因 $1 \times 2^{-1} = 1 \div 2$，故可得简写式：



$\therefore (0.1001)_2 = 0.5625$。

1.2.2　十进制整数转换成二进制整数

任给十进整数N，假定它可化成二进制整数，则有：

$N = x_n 2^n + x_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + x_1 2^1 + x_0$

这里，$x_i = 0$ 或 1，$i = 0, 1, \cdots, n$。如何求出各个 x_i 来呢？

现以 2 去除右端，可见余数是 x_0，再以 2 去除所得商，即得余数 x_1，又用 2 去除第二次所得的商，即得余数 x_2，如

此进行下去，相继得到余数 $x_0, x_1, x_2, x_3 \cdots$，直到第 $n+1$ 次相除得到商为 0，余数为 x_n 为止。

例5。求 $839=(\ ?\ )_2$

解：

$$\begin{array}{r|rl}
2 & 839 & \cdots\cdots \text{余数}=1=x_0 \\ \hline
2 & 419 & \cdots\cdots \text{余数}=1=x_1 \\ \hline
2 & 209 & \cdots\cdots \text{余数}=1=x_2 \\ \hline
2 & 104 & \cdots\cdots \text{余数}=0=x_3 \\ \hline
2 & 52 & \cdots\cdots \text{余数}=0=x_4 \\ \hline
2 & 26 & \cdots\cdots \text{余数}=0=x_5 \\ \hline
2 & 13 & \cdots\cdots \text{余数}=1=x_6 \\ \hline
2 & 6 & \cdots\cdots \text{余数}=0=x_7 \\ \hline
2 & 3 & \cdots\cdots \text{余数}=1=x_8 \\ \hline
2 & 1 & \cdots\cdots \text{余数}=1=x_9 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore 839=(1101000111)_2$

上述转换方法称为"2除取余法"，其运算过程可简记为：

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & \div 2 \\
 & 839 \to & 419 \to & 209 \to & 104 \to & 52 \to & 26 \to & 13 \to & 6 \to & 3 \to & 1 \to & 0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{余数} & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & (x_0) & (x_1) & (x_2) & (x_3) & (x_4) & (x_5) & (x_6) & (x_7) & (x_8) & (x_9)
\end{array}$$

将用 2 去除改成用 r 去除，便得到将十进制整数转换成 r 进制整数的 r 除取余法。

例6。求 $751=(\ ?\ )_8$

解：

$$\begin{array}{lccccc}
 & \div 8 \\
 & 751 \longrightarrow & 93 \longrightarrow & 11 \longrightarrow & 1 \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{余数} & & 7 & 5 & 3 & 1 \\
 & & (x_0) & (x_1) & (x_2) & (x_3)
\end{array}$$