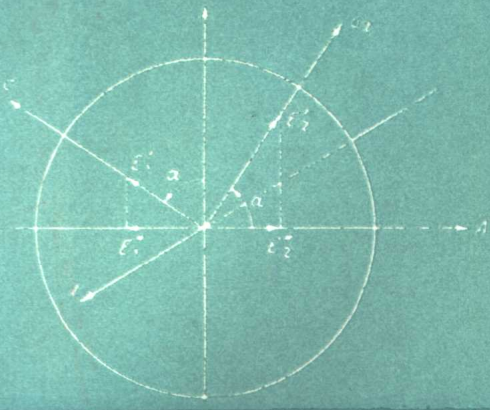
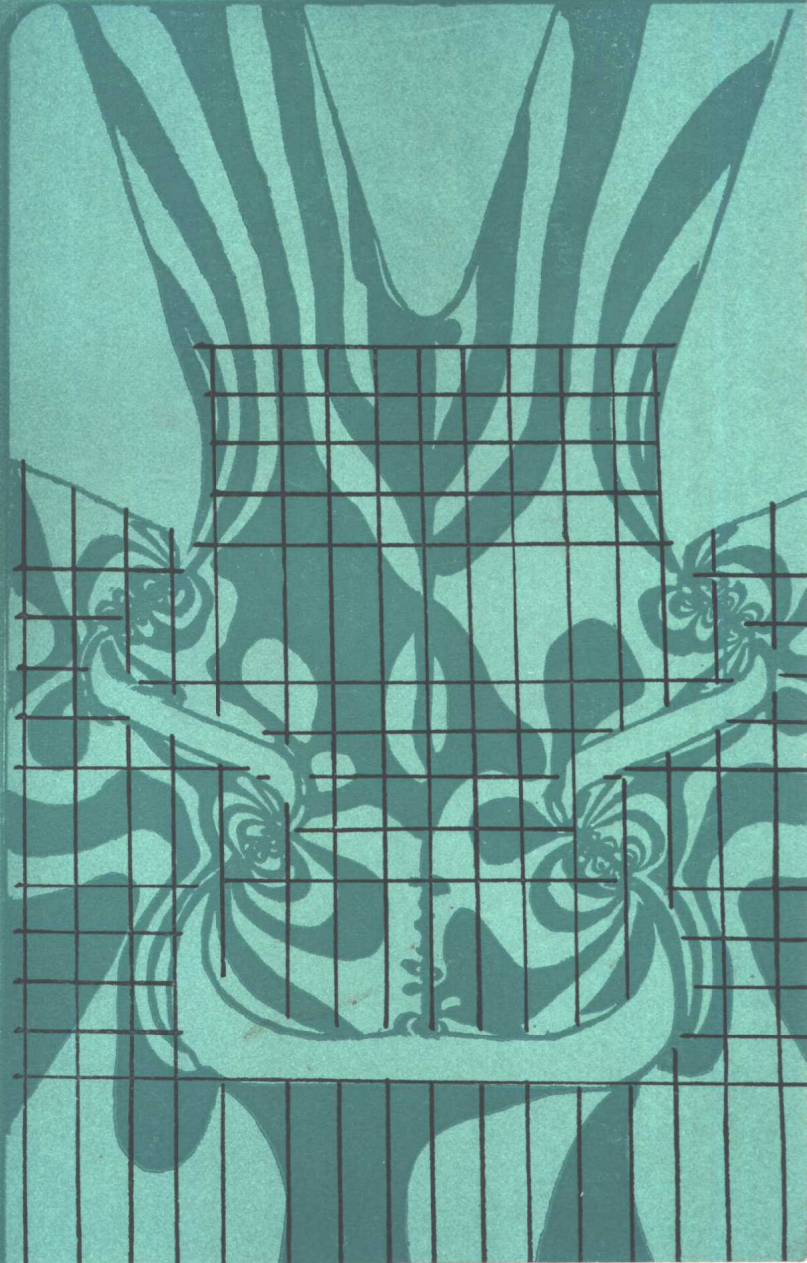


J. W. 达利 著
[美] W. F. 赖利



实验应力分析



海洋出版社

实验应力分析

[美] J.W.达利 W.F.赖利 著

韩铭宝 邓成光 译

苏先基 校

海洋出版社

1987年·北京

内 容 简 介

本书是实验应力分析教科书。书中重点讲述了四种主要实验方法，即：脆性涂层法、电阻应变测量法、光弹性法及云纹法。既有理论分析，又对所涉及的重要实验技术做了详细的介绍。为了加深读者对内容的了解，每章后面均给出练习题。

本书可作为高等院校力学、土木、机械、船舶、航空等专业的教学参考书，也可作为科研和工程技术人员从事实验应力分析工作的参考书。

责任编辑 赵士清

EXPERIMENTAL STRESS ANALYSIS

实验应力分析

[美] J.W.达利 W.F.赖利 著

韩铭宝 邓成光 译

苏先基 校

海洋出版社出版 (北京市复兴门外大街1号)
新华书店北京发行所发行 北京星城印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16印张 25.562 字数: 600千字

1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷

印数: 1—1900

ISBN 7-5027-0178-8/TB·1

统一书号: 13193·0569 7.80元

译者前言

自四十年代以来，随着各种实验应力分析手段的不断发展和完善，实验应力分析已逐渐形成一个相对独立的分支学科。国内外不少高等院校都开设了实验应力分析的专门课程，并有不少这方面的教科书和专著陆续出版。本书就是最近出版的一本这类教科书。本书版本较新，内容比较详实全面，既侧重理论分析，又对实验技术有足够的阐述，所引材料部分地反应了这一学科的新进展，其中某些可供借鉴。现将其译成中文，以供我国高等院校有关专业师生和实验应力分析工作者参考。

这里特别指出两点。脆性涂层法可直接用于实物。其使用简单，数据容易处理，对于检验和改进工业产品设计是一种很有效的手段。但是从现状来看，我国在这方面似还显得薄弱。就译者所知，在现有的书刊资料中，以本书所讲解的脆性涂层法最为详尽。这对我国实验工作者开发和推广应用自己的脆性涂料或许会有些帮助。另外，在目前电阻应变片、测量和记录仪器的规格品种日益增多的情况下，如何根据测试需要和可能，选用适当的应变片和二次仪表，以达到预期的灵敏度和精确度，是一个很重要的问题。本书花了相当大量的篇幅，讨论了应变片和二次仪表的合理选择、应变片线路与二次仪表之间的匹配及其整体灵敏度，为妥善解决上述问题提供了依据。在光学方法上面，本书当然也有一些特点，这里就不再一一指出了。

书中引述的一些实验器材，大多数是欧美国家的产品。特别是一些材料和元件，往往采用商名，译文中大都未予译出，以存其原貌，有些则加注说明其具体内容。这样做也许更有利于我国读者了解国外情况。

实验应力分析的力学方法一篇中未包括全息照相光弹性和激光散斑法，不能不说是本书的一个缺陷。然而考虑到这只是一部教科书，并且任何作者都不能不受到本人专长和经验的限制，对此也就不必苛求了。

“他山之石，可以攻玉”。如果这部中译本能对我国实验应力分析的学科发展有所裨益，对我国同行们的工作有所启发，译者将感到莫大的欣慰。由于社会制度不同，书中观点可能存在一些问题，望读者注意。受译者水平所限，译文中难免有不妥和错误之处，敬希读者批评指正。

在译稿的最后审定过程中，黄杰藩同志曾给予大力协助，帮助改正了一些不妥之处，谨此深致谢意。

译者

1983年11月

AG 60 / 13

原 序

本书是为刚刚开始学习实验应力分析的高年级大学生或研究生编写的。书中的材料分为四个独立的篇章：

第一篇 弹性理论基础，三章

第二篇 脆性涂层法，一章

第三篇 应变测量，六章

第四篇 光学方法，六章

书中每一篇基本都是独立的，这样就使导师在安排课程内容方面可以有很大的灵活性。例如，采用第一篇中的两章和第三篇的全部内容，可以开出一门两三个学分的应变计课。把第一、四两篇组合起来，可以成为一门三到四学分的详尽的光弹性和云纹课。从所有四篇各选一些章节编排起来，可以扩大对实验应力分析领域的接触面。把这里的主要内容全部详细讲完，再加上一些脆性涂层、应变计、光弹性和云纹方面的实验室学习，需要六到八学分的课时。

本教材的主要特点在于，它向学生完整地介绍了实验方法的全貌。讲述的理论深浅适度，是为了解实验应力分析及其所用的脆性涂层、应变计、光弹性和云纹这四种主要方法所必需的。虽然主要侧重点放在实验应力分析理论方面，但对四种主要方法各自的重要实验技术也都做了足够详细的说明，以便学生在一开始从事实验室工作时就对实验步骤有扎实的了解。在每章末尾都设计了一些练习，目的在于巩固和扩充讲述的内容并说明其用途。

书中未包括实验室实习，原因在于实验室工作与现成的设备和器材、导师和学生的兴趣以及当时当地所关心的工业问题等地区条件有极为密切的关系。作者相信，要想根据兴趣、设备、器材和可用的课时排定实验室实习，以补足课程的这部分重要内容，还是导师最有资格。

这本书第二版经过了大量的修订，反映了十三年来实验方法所发生的变化。在脆性涂层方面，加进了有关新型低毒不易燃涂料的内容。在应变计方面，本书内容的变化说明了当前箔式应变片的几乎取代一切的应用、动态记录仪器的突出改进和用于实验数据处理的新型数据采集系统。书中部分地包括了近十年来实验应力分析的光学方法所取得的显著进展。对光的性能那一章做了全面修订，以便把相干光的性态包括进去。关于云纹和光弹性贴片的内容已经分别扩充为完整的一章。尽管做了这些修订，因限于篇幅和出版费用，对有些重要论题如统计方法、全息照相、破坏理论、断裂力学和无损检验等就只好割爱了。

作者希望，在某些情况下，导师能通过自己的讲义或技术刊物中新发表的文章去介绍一下这些问题。虽然本书从任何意义上来说都谈不上是一部专著，但是其中却包括了为开设一门完备而实用的实验应力分析理论课所必需的大部分基本内容。

这里所介绍的是两位作者25年以来收集起来的材料。在伊利诺斯理工学院、康乃尔大学、衣阿华州立大学和马里兰大学，已经形成了实验应力分析、光弹性和光测力学这样几

门课程。上过这些课程的学生认为，这些材料是有趣而内容丰富的。论述中所用到的数学易于为高年级大学生所理解。采用了笛卡儿符号和矢量符号，以增进对场方程的了解。在选择所用的插图方面很花费了一番功夫。这些插图补充了文字叙述的不足，对于向学生介绍有关材料应当是大有帮助的。

工作在实验应力分析领域中的成百上千研究人员都对本书做出了贡献，在此谨致谢忱。本书只是对这个领域的技术现状做了一番总结，在许多辛勤的研究人员的共同努力下，这个领域仍在不断发展之中。我们特别应当感谢我们多年来的良师益友 A.J.Durreli 博士。我们还应当提到 M.M.Leven, D.Post, C.E.Taylor 和许多设备供应厂商，感谢他们为本书提供了精美的插图。普林斯顿大学的 Robert Mark 教授以及弗吉尼亚工学院和州立大学的 C.W.Smith 教授审阅了原稿，谨此一并致谢。

J.W.达 利

W.F.赖 利

符 号 表

a	光波振幅	f_0	材料应力条纹值
A	面积	F	力
b	狭缝宽度	F_{CB}	弯曲修正系数
B	磁场强度	F_{CR}	增强修正系数
B_L	侧边界	F_x, F_y, F_z	体力的笛卡儿坐标分量
c	相对应力-光性系数	F_r, F_θ, F_ϕ	体力的极坐标分量
c	真空中的光速	g	重力加速度
$c_1 c_2$	应力-光性系数	G	剪切弹性模量
C	电容	G	扭转弹簧常数
C	检流计常数	h	厚度
C_0	光弹性贴片灵敏度系数	i	电流密度
C_1	试件灵敏度系数	I	电流
C_ν	泊松比不匹配修正系数	I	光强
d	阻尼度	I	惯性矩
D	阻尼系数	I_0	出射光强
D	直径	I_0	应变片电流
D	体膨胀 ($\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$)	I_G	检流计电流
D_0	流体阻尼系数	I_i	入射光强
D_0	雾翳黑度	I_r	反射光强
e	电子电荷	I_1, I_2, I_3	第一、第二和第三应力不变量
E	电动势或电压	J	极惯性矩
E	曝光量、辐照量	J_1, J_2, J_3	第一、第二和第三应变不变量
E	光矢量的大小	k	介电常数
E	弹性模量	K	脆性涂层强度比
E	电位梯度	K	体积弹性模量
E'	脆性涂层或光弹性贴片的弹性模量	K	光弹性贴片的光学应变系数
E_s	反电动势	K	光源强度
E_0	照相胶片的曝光惰性	K_t	应变片的横向灵敏度系数
E'	试件的弹性模量	K_T	压缩常数
E'	标定梁的弹性模量	l	长度
f	透镜焦距	l_0	应变片标距
f	频率	L	长度
f_s	材料应变条纹值	\mathcal{L}	耗损因子
		M	放大率

n	折射率	S_{sc}	半导体材料的应变灵敏度
n	整数	S	应变片对剪应变的灵敏度
n_0	无应力介质中的折射率	S_t	应变片对时间的灵敏度
n_1, n_2, n_3	沿主方向的折射率	S_l	应变片的横向应变灵敏度
n_1, n_2, n_3	主方向	S_T	应变片对温度的灵敏度
N	相对延迟的波长数	S	光弹性贴片的应变灵敏度
N	条纹级	S_{θ}	检流计灵敏度
N	校准值的数目	S_0	光弹性贴片的应力灵敏度
N	电荷载体的数目	t	时间
N	应变循环次数	T	周期
p	云纹栅的节距	T	温度
p	压力	T	扭矩
P	力, 作用力	T	透射系数
P	电能	T_n	合应力
P_l	电能密度	T_{nx}, T_{ny}, T_{nz}	合应力的笛卡儿坐标分量
P_w	应变片耗散的电能	T_x, T_y, T_z	面力的笛卡儿坐标分量
q	电阻比	u, v, w	位移的笛卡儿坐标分量
Q	光弹性材料的质量系数	u_r, u_θ, u_z	位移的极坐标分量
r	电阻率	V	电压
R	半径	V	体积
R	反射系数	w	宽度
R	电阻	x, y, z	笛卡儿坐标
R_b	镇流电阻	α	入射角
R_e	等效电阻	$\alpha, \beta, \theta, \phi$	角
R_o	应变片电阻	α	热膨胀系数
R_G	检流计电阻	α_p	偏振角
R_M	测量仪器的电阻	β	反射角
R_p	并联电阻	β	热膨胀系数
R_s	串联电阻	γ	折射角
R_x	外电阻	γ	剪应变分量
s	距离	γ	电阻温度系数
s_1, s_2	沿应力轨迹线的曲线坐标	γ_{θ}	极坐标中的剪应变分量
S	灵敏度指数	$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$	剪应变的笛卡儿坐标分量
S	标准偏差	$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$	
S_a	应变片的轴向应变灵敏度	$\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$	
S_A	材料的应变灵敏度	δ	位移
S_c	电路灵敏度	δ	线性位相差
S_{CG}	检流计电路灵敏度	Δ	相对位相差
S_g	应变片灵敏系数	Δ	相对延迟
S_{pb}	并联平衡电路灵敏度	ΔR_T	由温度引起的电阻改变量

ΔR_0	由应变引起的电阻改变量	ξ	波数
ϵ	正应变	π	压阻系数
ϵ_a	轴向应变	ρ	曲率半径
ϵ_0	核准应变	ρ	电阻率
ϵ_n	正应变分量	ρ	比电阻
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$	极坐标中的正应变分量	σ	正应力分量
ϵ_t	横向应变	σ_n	合应力的正应力分量
ϵ_0	在单向应力状态下脆性涂层的 阈值应变	$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	极坐标中的正应力分量
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$	笛卡儿坐标中的正应变分量	σ_{tc}	脆性涂层的极限压缩强度
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$	主正应变	σ_{tl}	脆性涂层的极限拉伸强度
ϵ_1', ϵ_2'	脆性涂层或光弹性贴片中的主 应变	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	笛卡儿坐标中的正应力分量
$\epsilon_1^i, \epsilon_2^i$	试件中的主应变	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	主应力
η	非线性项	σ_1^i, σ_2^i	脆性涂层或光弹性贴片中的主 应力
η_1, η_2	材料粘性	σ_1', σ_2'	试件中的主应力
θ	偏转角	σ_1^i, σ_2^i	次主应力
θ_0	检流计的稳态偏转角	σ^*	标定梁中的正应力
λ	拉梅常数	τ	剪应力分量
λ	波长	τ_n	合应力的剪应力分量
μ	电荷载体的迁移率	τ_{θ}	极坐标中的剪应力分量
μ	剪切模量	$\left. \begin{array}{l} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{array} \right\}$	笛卡儿坐标中的剪应力分量
ν	泊松比	ϕ	埃里应力函数
ν^*	脆性涂层或光弹性贴片的泊松 比	ω	圆频率
ν^S	试件的泊松比	Ω	体力函数
ν^0	标定梁的泊松比		



北林图 A00038309

387111

5

目 录

原序	(1)
符号表	(3)
第一篇 弹性理论基础	(1)
第一章 应力	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 定义	(1)
1.3 一点上的应力	(3)
1.4 应力平衡方程	(4)
1.5 应力变换定律	(5)
1.6 主应力	(7)
1.7 最大剪应力	(9)
1.8 二维应力状态	(10)
1.9 对应于主坐标系的应力	(12)
1.10 特殊的应力状态	(12)
第二章 应变和应力-应变关系	(17)
2.1 引言	(17)
2.2 位移和应变的定义	(17)
2.3 应变变换方程	(21)
2.4 主应变	(24)
2.5 相容性	(25)
2.6 根据应变场计算位移场的例题	(26)
2.7 体膨胀	(27)
2.8 应力应变关系	(28)
2.9 二维应力状态下的应变变换方程和应力-应变关系	(31)
第三章 基本方程和平面弹性理论	(36)
3.1 问题的阐述	(36)
3.2 场方程	(37)
3.3 平面弹性问题	(38)
3.4 平面应变方法	(39)
3.5 平面应力	(40)
3.6 埃里应力函数	(41)
3.7 笛卡儿坐标系中的埃里应力函数	(43)
3.8 例题	(44)
3.9 极坐标中的二维问题	(46)
3.10 把方程 $\nabla^4\phi = 0$ 变换到极坐标中去	(47)

3.11	用埃里应力函数表示的极坐标应力分量	(48)
3.12	极坐标中埃里应力函数的形式	(49)
3.13	圆筒受内压和外压作用时的应力和位移	(51)
3.14	受单向拉伸载荷作用的有圆孔无限薄板中的应力分布	(53)
第二篇 脆性涂层法		(61)
第四章 脆性涂层法的原理		(61)
4.1	引言	(61)
4.2	涂层应力	(62)
4.3	破坏理论	(64)
4.4	脆性涂层裂纹图	(66)
4.5	裂纹的探查	(69)
4.6	陶瓷基脆性涂料	(71)
4.7	松脂基脆性涂料	(73)
4.8	脆性涂层分析的试验步骤	(76)
4.9	标定步骤	(78)
4.10	脆性涂层数据的分析	(81)
第三篇 应变测量方法和有关的测试设备		(87)
第五章 应变测量介绍		(87)
5.1	应变的定义及其与实验测定的关系	(87)
5.2	应变计系统的性能	(89)
5.3	应变计的类型	(90)
5.4	应变分析的云纹法	(100)
5.5	应变分析的格栅法	(101)
第六章 电阻应变片		(105)
6.1	引言	(105)
6.2	金属合金的应变灵敏度	(105)
6.3	应变片的构造	(108)
6.4	应变片的粘合剂和粘贴方法	(111)
6.5	应变片灵敏度和应变片灵敏系数	(116)
6.6	箔式应变片的性能特点	(119)
6.7	环境影响	(129)
第七章 半导体应变片		(143)
7.1	引言	(143)
7.2	半导体的压阻性能	(144)
7.3	半导体应变片的性能特点	(147)
7.4	现有半导体应变片可达到的性能	(150)
第八章 应变片电路		(152)
8.1	引言	(152)
8.2	电位计及其在应变测量中的应用	(152)
8.3	惠斯登电桥	(159)
8.4	恒流电路	(169)

8·5 应变片电路的标定	(174)
8·6 导线、开关和滑环的影响	(176)
8·7 电噪声	(180)
8·8 传感器应用	(181)
第九章 记录仪器	(190)
9·1 引言	(190)
9·2 静态记录和数据记录	(190)
9·3 甚低频的动态记录	(195)
9·4 中频的动态记录	(197)
9·5 高频的动态记录	(210)
9·6 甚高频的动态记录	(212)
9·7 遥测系统	(214)
第十章 应变片数据分析	(222)
10·1 引言	(222)
10·2 三元件直角应变花	(224)
10·3 三角形应变花	(226)
10·4 横向应变效应的修正	(228)
10·5 应力计	(229)
10·6 平面剪切应变片	(231)
第四篇 应力分析的光学方法	(235)
第十一章 光学基本原理	(235)
11·1 光的本质	(235)
11·2 光的波动理论	(236)
11·3 反射和折射	(243)
11·4 透镜和反射镜成像	(246)
11·5 光的衍射和干涉	(250)
11·6 光学仪器：偏振光弹仪	(252)
11·7 光学测量仪器：干涉仪	(259)
第十二章 云纹法	(264)
12·1 引言	(264)
12·2 云纹条纹形成的机制	(264)
12·3 云纹条纹分析的几何方法	(267)
12·4 云纹条纹分析的位移场方法	(270)
12·5 面外位移测量	(273)
12·6 面外斜率的测量	(274)
12·7 云纹条纹的细化和倍增	(275)
12·8 实验工艺和技术	(279)
第十三章 光弹性理论	(283)
13·1 引言	(283)
13·2 暂时双折射	(283)
13·3 应力-光性定律	(284)
13·4 用相对延迟表示的应力-光性定律	(285)

13·5 受应力模型在平面偏振光弹仪中的效应	(287)
13·6 受应力模型在圆偏振光弹仪中的效应 (暗场, A型排列)	(291)
13·7 受应力模型在圆偏振光弹仪中的效应 (亮场, B型排列)	(295)
13·8 受应力模型在圆偏振光弹仪中的效应 [检偏镜在任意位置, 塔代(Tardy)补偿法]	(296)
13·9 光弹性照相	(298)
13·10 用照相方法使条纹倍增	(301)
13·11 用部分反射镜使条纹变细	(304)
13·12 用部分反射镜使条纹倍增	(306)
第十四章 二维光弹性	(312)
14·1 引言	(312)
14·2 等差线条纹图	(312)
14·3 等倾线条纹图	(315)
14·4 补偿技术	(317)
14·5 标定方法	(319)
14·6 应力分离方法	(320)
14·7 模型到原型的应力换算	(328)
14·8 二维光弹性材料	(330)
14·9 常用光弹性材料的性能	(336)
第十五章 三维光弹性	(342)
15·1 引言	(342)
15·2 锁定模型中的变形	(342)
15·3 三维光弹性材料	(347)
15·4 三维光弹性模型的加工、粘合和切片	(350)
15·5 模型切片和所得条纹图案的解算	(351)
15·6 有效应力	(356)
15·7 三维剪应力差法	(358)
15·8 冻结应力方法的应用	(360)
15·9 散光法	(364)
第十六章 双折射贴片	(373)
16·1 引言	(373)
16·2 贴片应力和应变	(374)
16·3 贴片灵敏度	(375)
16·4 贴片材料	(376)
16·5 贴片的应用	(377)
16·6 贴片厚度的影响	(379)
16·7 贴片中条纹级数的测定	(386)
16·8 应力分离方法	(388)
常用单位换算表	(393)
国际单位制	(394)

第一篇 弹性理论基础

第一章 应 力

1.1 引 言

一名实验应力分析工作者必须透彻地了解应力、应变以及联系应力和应变的定律。因此，本书第一篇专门讨论弹性理论的基本概念。第一章论述外载荷和体力在物体内所引起的应力；第二章处理载荷在物体中所产生的变形和应变以及应力与应变之间的关系；第三章包括弹性理论中的平面问题，这个问题之所以重要，是因为在实验应力分析课程的第一部分中，有一大部分都是处理二维问题。本章还论述了用应力函数解平面问题的方法。在学完课本第一篇的内容之后，学生应该对应力和应变有一个坚实的理解，并且能用埃里（Airy）应力函数方法求解弹性理论中某些比较基本的二维问题。

1.2 定 义

作用于物体而产生应力的外力有两种类型。第一种力作用在物体表面上，因而就叫做面力。当一个物体与另一个物体接触时，一般就引起面力；第二种力作用在物体的体元上，所以叫做体力。体力通常是由离心力、重力或其他力场产生的。最常见的体力是重力，几乎在所有的情况下都程度不同地有体力存在。但是对许多实际应用来说，它们和存在的面力相比是非常小的，可以忽略不计而不致引起严重的误差。为完备起见，在下面的分析中还是考虑了体力。

现在考虑一个任意的内表面或外表面，它可以是平面或曲面，如图1.1所示。在这曲面上任意一点 P 的邻域取一个微小面元 ΔA ，其上作用着一个力系，图中的矢量 $\Delta \vec{F}_n$ 代表这力系的合力。应当注意，合力矢量 $\Delta \vec{F}_n$ 的作用线不一定和面元 ΔA 的外法线 n 重合。若将合力 $\Delta \vec{F}_n$ 除以面积增量 ΔA ，就得到作用在该面积上的平均应力。在极限情况下，当 ΔA 趋向于零，就得到一个量 \vec{T}_n ，它定义为作用在点 P 的合应力。这个极限过程可用下面的方程来说明

$$\vec{T}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A} \quad (1.1)$$

如图1.2所示，合应力 \vec{T}_n 的作用线和合力 $\Delta \vec{F}_n$ 的作用线重合。务必注意，一点的合应力 \vec{T}_n 既是点 P 在物体中位置的函数，又是通过该点的平面方位的函数。平面的方位由它的外法线 n 来标志。在受任意载荷系统作用的物体中，任一点 P 的合应力 \vec{T}_n 的大小和方向随所考虑平面的方位而变化。

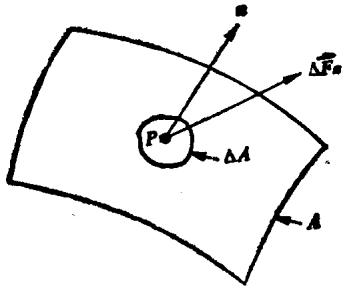


图 1.1 一个任意面（可以是内部的也可以是外部的）和作用在面元 ΔA 上所有力的合力

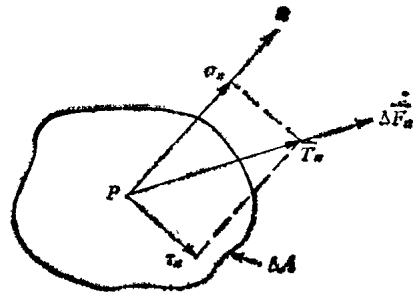


图 1.2 合应力 \vec{T}_n 分解成法向和切向分量 σ_n 和 τ_n 。

如图1.2所示，可以将 \vec{T}_n 分解成两个分量：一个分量是 σ_n ，它垂直于该面，称为法向合应力或正应力；另一个分量是 τ_n ，称为切向合应力或剪应力。

从合应力还可以得到任意笛卡儿坐标系中的应力分量。首先考虑一个面，它的外法线沿 z 的正方向，见图1.3。若将与该面相应的合应力 \vec{T}_n 分解为沿 x 、 y 和 z 轴的分量，就得到笛卡儿坐标应力分量 τ_{xz} 、 τ_{yz} 和 σ_{zz} 。因为分量 τ_{xz} 和 τ_{yz} 作用于所考虑面的切向，所以是切向应力。分量 σ_{zz} 作用于该面的法向，是为法向应力。

如果对外法线沿 x 和 y 正方向的面采取同样做法，则可分别得到另外两组笛卡儿坐标应力分量 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 σ_{xx} 和 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 σ_{yy} 。对应于外法线的三种选取方法，有三组不同的笛卡儿坐标分量，它们可归纳成如下的阵列

σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}	外法线平行于 x 轴
τ_{yx}	σ_{yy}	τ_{yz}	外法线平行于 y 轴
τ_{zx}	τ_{zy}	σ_{zz}	外法线平行于 z 轴

从这个阵列清楚地看到，存在九个笛卡儿应力分量。这些分量可按图1.4所示，排列在小立方体元的几个面上。对立方体各个面上的应力分量所采用的符号规定如下：如定义立

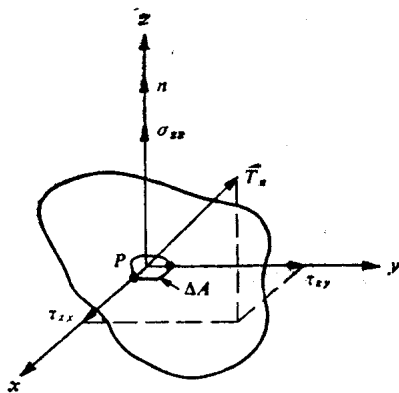


图 1.3 合应力 \vec{T}_n 分解成三个笛卡儿坐标应力分量 τ_{xz} 、 τ_{yz} 和 σ_{zz}

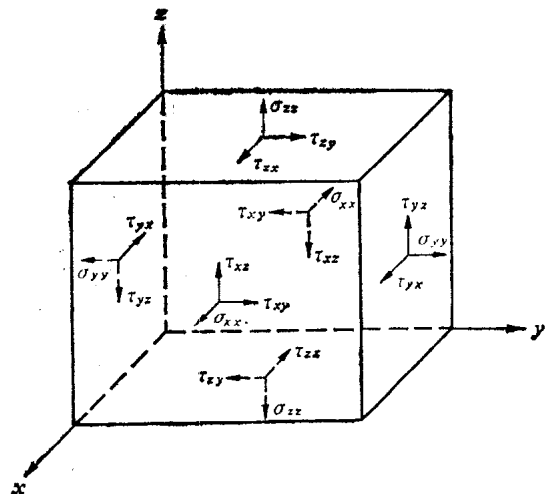


图 1.4 作用在小立方体元表面上的笛卡儿坐标应力分量

*原书误为 T_n 。一译注

方体表面的外法线沿 x , y 或 z 的正方向, 则相应的法向应力分量和切向应力分量也沿 x , y 或 z 的正方向, 若外法线沿 x , y 或 z 的负方向, 则法向应力和切向应力分量也沿 x , y 或 z 的负方向。至于下标规定则是, 第一个下标表示应力分量作用平面的外法线, 第二个下标给出应力作用的方向。最后, 正的法向应力表示拉伸, 负的代表压缩。

1.3 一点上的应力

在物体内的某个给定点上, 合应力 \vec{T}_n 的大小和方向与通过该点的平面方位有关。由于过每一个点可以有无限多个平面, 因而在每一点可以用来表示该点合力的合应力矢量也有无限多个。但是容易证明, 这些合应力矢量中每个矢量的大小和方向, 都可以由作用在这个点的九个笛卡儿应力分量来确定, 这一点由图1.5所示单元四面体的平衡可以看出。在图1.5中, 作用于四面体各个面上的应力是以它们的平均值表示的。平均值用应力符号项上加一个“~”号来表示。要使四面体保持平衡, 必须满足下列条件。首先考虑 x 方向的平衡:

$$\tilde{T}_{nx}A - \tilde{\sigma}_{xx}A\cos(n, x) - \tilde{\tau}_{yx}A\cos(n, y) - \tilde{\tau}_{zx}A\cos(n, z) + \tilde{F}_x \frac{1}{3} hA = 0$$

其中 h = 四面体的高度,

A = 四面体底面面积,

\tilde{F}_x = x 方向的平均体力集度,

\tilde{T}_{nx} = x 方向的合应力分量。

而 $A\cos(n, x)$, $A\cos(n, y)$, $A\cos(n, z)$ 是面积 A 分别在 yz , xz 和 xy 平面上的投影。

令 $h \rightarrow 0$, 再从表达式的每一项中消去公因子 A , 可以看到体力项等于零, 平均应力变为 P 点的精确应力, 前面的表达式变为

$$\tilde{T}_{nx} = \sigma_{xx}\cos(n, x) + \tau_{yx}\cos(n, y) + \tau_{zx}\cos(n, z)$$

考虑 y 和 z 方向的平衡, 可以得到两个类似的表达式:

$$\tilde{T}_{ny} = \tau_{xy}\cos(n, x) + \sigma_{yy}\cos(n, y) + \tau_{zy}\cos(n, z) \quad (1.2b)$$

$$\tilde{T}_{nz} = \tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) + \sigma_{zz}\cos(n, z) \quad (1.2c)$$

一旦用(1.2)式确定了某一特定平面上合应力的三个分量之后, 即可用以下表达式定出合应力 \vec{T}_n 。

$$\vec{T}_n = \sqrt{T_{nx}^2 + T_{ny}^2 + T_{nz}^2}$$

合应力 \vec{T}_n 作用线的三个方向余弦为:

$$\cos(T_n, x) = \frac{T_{nx}}{|\vec{T}_n|} \quad \cos(T_n, y) = \frac{T_{ny}}{|\vec{T}_n|} \quad \cos(T_n, z) = \frac{T_{nz}}{|\vec{T}_n|}$$

作用在所考虑平面上的正应力 σ_n 和剪应力 τ_n 可由下面的表达式得到,

$$\sigma_n = |\vec{T}_n| \cos(T_n, n) \quad \text{和} \quad \tau_n = |\vec{T}_n| \sin(T_n, n)$$

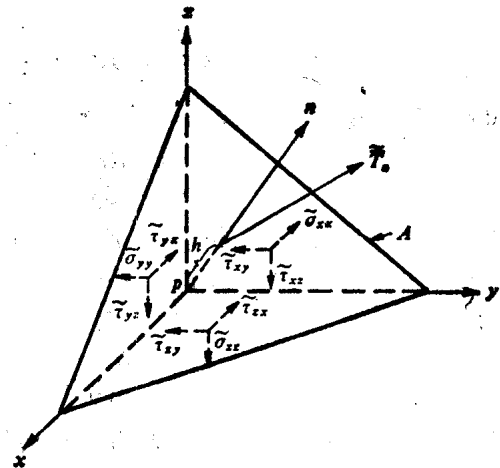


图 1.5 P 点处的一个四面体单元和作用在它四个面上的平均应力

合应力矢量 \vec{T}_n 和平面法线 \vec{n} 之间的夹角可用熟知的关系式来确定:

$$\cos(T_n, n) = \cos(T_n, x)\cos(n, x) + \cos(T_n, y)\cos(n, y) + \cos(T_n, z)\cos(n, z)$$

还应注意: 将 T_{nx} 、 T_{ny} 和 T_{nz} 投影到所考虑平面的法线上, 可确定正应力 σ_n 。即

$$\sigma_n = T_{nx}\cos(n, x) + T_{ny}\cos(n, y) + T_{nz}\cos(n, z)$$

一旦确定了 σ_n 之后, τ_n 就很容易求了, 因为

$$\tau_n = \sqrt{T_n^2 - \sigma_n^2}$$

1.4 应力平衡方程

当一个物体受到一个一般的体力和面力系作用时, 物体各内各处即产生不同大小和方向的应力。这些应力的分布必须能使物体保持整体平衡, 而且物体中的每个单元也必须保持平衡。这一节讨论体元的平衡。在图1.6所示的体元上, 共画出了沿 x 方向作用的应力和体力分量。沿 y 和 z 方向也存在和作用着类似的一些分量。图中给出的是一个体元表面上的平均应力, 假定这个体元是非常小的。对沿 x 方向的各个力求和, 有

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx - \sigma_{xx}) dydz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx}) dx dz \\ & + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx}) dx dy + F_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

除以 $dx dy dz$, 得

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (1.3a)$$

考虑 y 和 z 方向的力和应力的分量, 用类似的方式, 可以建立

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (1.3c)$$

式中 F_x , F_y , F_z , 分别是 x , y 和 z 方向的体力集度 (单位为 lb/in^3 或 N/m^3)

方程 (1.3) 就是熟知的应力平衡方程, 任何用理论或实验方法得到的应力分布都必须满足这个方程组。在推导这些方程时, 只用到六个平衡条件中的三个。利用其余三个条件, 还可以在各个应力之间建立一些补充关系式。

考虑图1.7所示的单元。在单元上只画了能产生绕 y 轴的力矩的那些应力分量。因坐标系的原点选在单元的形心处, 故正应力分量和体力不产生任何力矩。

对绕 y 轴的力矩求和, 给出下面的表达式

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \frac{dz}{2} + \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy \frac{dz}{2} \\ & - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

经化简变为

$$\tau_{xz} dx dy dz - \tau_{zx} dx dy dz = 0$$

因此

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (1.4a)$$