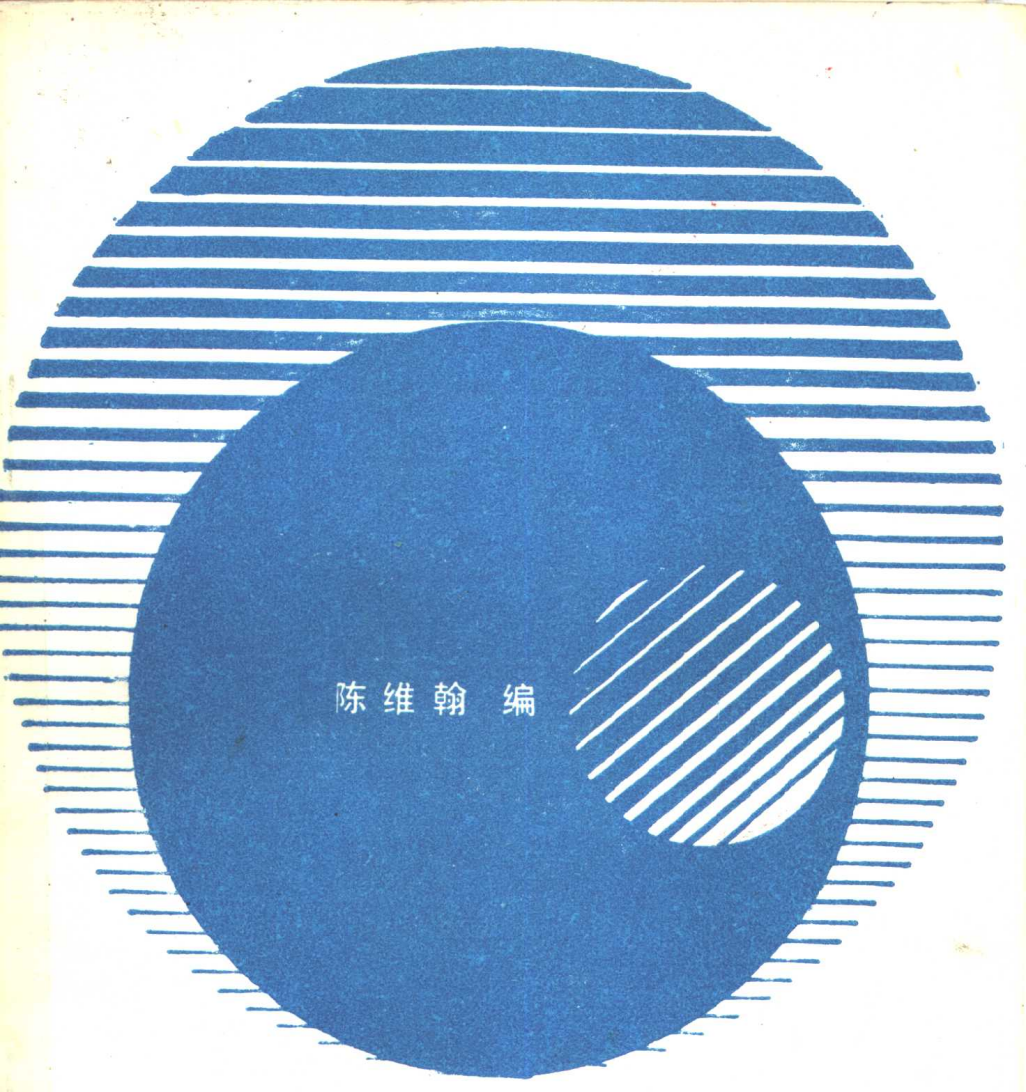




陈维翰 编

XIANXING GUANXI JIQI YINGYONG
线性关系及其应用

重庆大学出版社

0151
7.1

线性关系及其应用

陈维翰 编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书对散见于大学数学各分支的线性关系进行分析、概括，阐明线性关系的特点、性质、表现形式和有关计算，然后介绍把各种复杂的数量关系线性化的方法和技巧，最后以深入浅出的例子说明线性化方法在微分方程和计算数学上的应用。

本书以线性关系这个主题沟通了各个数学分支，可以加深读者对线性关系本质的认识，提高读者阅读数学书的分析综合能力。

线性关系及其应用

陈维翰 编

责任编辑 陈晓阳

重庆大学出版社出版发行
新华书店经销
重庆建专印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：5.125 字数：111千

1989年7月第1版

1989年7月第1次印刷

印数：1—5000

标准书号：ISBN 7-5624-0214-0 定价：1.06元
0·32

目 录

第 1 章 线性关系..... (1)

§1 线性函数..... (1)

一元线性函数—线性函数的特征性质—线性齐次函数的其它几种充分条件—一般线性函数的充分条件—多元线性函数

§2 线性空间中的线性关系..... (13)

线性空间—线性相关与线性无关—线性相关的几何意义—线性空间的维数、基和同构—线性变换—线性变换的矩阵表示

§3 线性算子和线性泛函..... (36)

算子与泛函—线性算子与线性泛函—希尔伯特空间—希尔伯特空间中向量的表示—希尔伯特空间中线性算子和线性泛函的表示

§4 线性方程组的解法..... (51)

适于笔算的高斯-约当消去法—高斯消去法—三对角系数阵方程组的解法—迭代法

第 2 章 线性关系的应用和线性化..... (68)

§1 在求解各类方程上的应用..... (68)

线性算子方程解的性质—迭加原理在解各

类线性方程上的应用—化线性非齐次方程
为线性齐次方程求解—用线性算子把各类
方程变得易于求解

§2 在数值计算上的应用…………… (109)

用微分代替增量求函数近似值—线性插值
和多重线性插值—利用线性组合改善收敛
条件—把微积分方程离散化—用线性组合
及线性方程组研究函数的最佳逼近

第1章 线性关系

§1 线性函数

1-1 一元线性函数

数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门自然科学。变量 x , y 之间最简单的数量关系,莫过于 $y=x$ 了,它刻画的是 x 和 y 之间的等量关系,稍微复杂一点的,是 $y=x+b$ 和 $y=kx$ 。前者是平移函数,表示变量 x 和 y 只相差一个常量, x 值只要加上(或减去)这个常数,我们就回到了 x 和 y 之间的等量关系。后者是正比例函数,表示变量 x 和 y 相差一个常数倍, x 值只要乘上(或除以)这个常数倍,就又回到 x 和 y 之间的等量关系,这个倍数 k 称为正比例系数或正比例因子。把这两种关系套起来,就得到一元线性函数。

定义 1-1-1: 函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 称为**一元线性函数**,若 $b=0$, 则函数 $y=kx$ 称为**一元线性齐次函数**。

初中时就知道, $y=kx+b$ 的图形在平面笛卡尔直角坐标系中为一条直线,所以把这种函数形象地称为“线性”函数。一元线性齐次函数就是前边讲的正比例函数,称为“齐次”,是因为函数关系式中,每项里变量出现的次数都整齐划一,均为一次。

线性函数含的参数少,涉及的运算简单,仅为加法和乘法,便于计算,是变量数学中最简单的函数;但另一方面,

许多复杂的函数都可以在一定范围和一定的精确度之下，近似地用线性函数来表示，所以，线性函数又是变量数学中最重要的函数。线性函数的简单，使它具有有一些有趣的性质。

性质 1-1-1: 线性函数的反函数仍为线性函数。

证明: 设线性函数为 $y=kx+b$ ，解出其反函数为 $x = \frac{1}{k}$

$\times (y-b) (k \neq 0)$ ，也是一个线性函数，即 $x = \frac{1}{k} y - \frac{b}{k}$ 。

性质 1-1-2: 线性函数的复合函数仍为线性函数。

证明: 设线性函数 $y=f(x)=kx+b$ ，另一个线性函数为 $z=g(y)=ly+c$ ，则复合函数

$$\begin{aligned} z &= g[f(x)] = l(kx+b) + c \\ &= lkx + lb + c \\ &= (lk)x + (lb+c) \end{aligned}$$

仍为线性函数。

由数学归纳法，可知线性函数任意复合都仍得到线性函数。

1-2 线性函数的特征性质

在 $y=kx+b$ 表示的函数关系中， b 的作用并不重要，因为它只是改换起算点。在几何上，相当于函数表示的直线上下平移一下，真正刻画变量 x 和 y 之间相依关系的参数是 k ；从另一个角度来看，我们在考虑变量 x 和 y 之间的相依关系时，主要是考察自变量 x 的变化是如何引起因变量 y 变化的。即考虑自变量 x 得到一个改变量 Δx 时，因变量相应的改变量（即通常讲的函数 y 的增量） Δy 是多少。对于一元线性函数

$y=kx+b$, 当 x 获得改变量 (自变量增量) Δx 时, 相应的函数增量 $\Delta y=[k(x+\Delta x)+b]-(kx+b)=kx+k\Delta x+b-kx-b=k\Delta x$, 即 Δy 为 Δx 的线性齐次函数, 参数 b 在研究 Δy 时不起作用。综上所述, 可知对一元线性函数 $y=kx+b$ 的研究, 可集中于研究一元线性齐次函数 $y=kx$, 正比例系数 k 决定了线性函数的主要特征, 即 y 与 x , Δy 与 Δx 成正比例地变化。若进一步问: 线性齐次函数中 x 和 y 成正比例变化的原因又是什么呢? 我们可以回答: y 和 x 成正比例变化的原因是由于线性齐次函数具有可加性。

定义 1-2-1: 若对任意的 x_1 和 x_2 , 只要 x_1 和 x_2 , x_1+x_2 均在函数 $y=f(x)$ 的定义域内, 就有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 具有**可加性**。

性质 1-2-1: 一元线性齐次函数具有可加性。

证明: 设 $y=f(x)=kx$, 则 $f(x_1+x_2)=k(x_1+x_2)=kx_1+kx_2=f(x_1)+f(x_2)$, 所以 $y=kx$ 具有可加性。

设 $y=f(x)$ 为一元线性齐次函数, 则当自变量 x 扩大 k 倍成为 kx 时, 由 $f(x)$ 的可加性, 可知 $f(kx)=f[x+(k-1)x]=f(x)+f[(k-1)x]=f(x)+f[x+(k-2)x]=f(x)+f(x)+f[(k-2)x]=\dots=f(x)+f(x)+\dots+f(x)=kf(x)$, 即当 x 扩大 k 倍时, 对应的函数也从 $f(x)$ 变为 $f(kx)=kf(x)$, 扩大同样的倍数。因此, 一元线性齐次函数具有可加性是它“成正比例变化”的根本原因。这一点还可以从数学上更加严格地证明。

定理 1-2-1: 对于 x 和 y 的一切实数值满足可加性方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

的唯一连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) 是一元线性齐次函数

$f(x) = kx$, 其中 $k = f(1)$, 是任意常数。

证明: $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, 所以 $f(0) = 0$ 。又, $f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1) = 0$, 故有 $f(-1) = -f(1)$ 。

设 $x = p$, p 为正整数, 则 $f(p) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p\text{个}}) = pf(1)$ 。又设 $x = -p$, 则同样有 $f(-p) = pf(-1) = -pf(1)$ 。

设 $x = \frac{1}{n}$, n 为正整数, 则 $f(1) = f(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{个}})$
 $= nf\left(\frac{1}{n}\right)$, 故 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$ 。同样可得 $f(-1)$
 $= f\left(\underbrace{-\frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{n}}_{n\text{个}}\right) = nf\left(-\frac{1}{n}\right) = -f(1)$, 故
 $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}f(1)$ 。

再设 $x = \frac{m}{n}$, m 和 n 为正整数, 则 $f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$ 。设 $x = -\frac{m}{n}$, 则 $f\left(-\frac{m}{n}\right) = mf\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{m}{n}f(1)$ 。由此得出结论: 对于 x 所取的一切有理数值, 均有 $f(x) = f(1)x$ 。设 x_0 为 x 所取的任一无理数值, 则由实数的连续性和完备性, 存在一个以 x_0 为极限的有理数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 由于已证出 $f(x_n) = f(1)x_n$, 两边取极限,

得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(1)x_0$$

而已知函数 $f(x)$ 是连续的，上式可化为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x_0) = f(1)x_0$$

这样，对任一实数 x ，均有 $f(x) = f(1)x$ ，令 $f(1) = k$ ，即为 $f(x) = kx$ ，所以 $f(x)$ 是一元线性齐次函数。

性质1-2-1说明可加性是一元线性齐次函数的必要条件，定理1-2-1说明可加性是连续函数成为一元线性齐次函数的充分条件。所以可加性是连续函数成为一元线性齐次函数的充分必要条件，是**一元线性齐次函数的特征性质**。由于对一元线性非齐次函数的研究可通过讨论增量，化为对一元线性齐次函数的研究，我们也可以说可加性是线性函数的特征性质，线性函数的各种优点均来源于此。而别的函数则不具备这个美妙的性质。例如，一般说来 $\lg(x+y) \neq \lg x + \lg y$ ， $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ， $\sin(x+y) \neq \sin x + \sin y$ ，所以对数函数 $\lg x$ ，幂函数 $\sqrt{x}$ 和正弦函数 $\sin x$ 等都不具有可加性，要计算它们的函数值，就困难多了。

1-3 线性齐次函数的其它几种充分条件

在定理1-2-1的证明中，假定 $f(x)$ 是连续函数，去掉这一条是不行的，但可把它换为其它类似的假定，这样，就得到另外几个线性齐次函数的充分条件。

定理 1-3-1：对于 x 和 y 的一切值均满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

的单调函数 $f(x)$ 是一元线性齐次函数。

证明：由定理 1-2-1 的证明可知，对一切有理数 x ，有 $f(x) = kx$ ，这里 $k = f(1)$ 。以下不妨设 $f(x)$ 是单调增函数（对单调减函数的证明完全一样），这时上式中的 $k > 0$ 。

现在设 x_0 为任一无理数，由实数系的性质，必存在一个以 x_0 为极限的单调增加有理数列 $\{x_n\}$ 。由于 $f(x)$ 是单调增函数，故 $kx_n = f(x_n) < f(x_0)$ ，取极限，得 $kx_0 \leq f(x_0)$ 。

以下用反证法证明 $f(x_0) = kx_0$ 。因为若结论不成立，则 $f(x_0) > kx_0$ ，可取大于 x_0 有理数 x'_0 ，使 $f(x_0) > kx'_0 > kx_0$ ，这样就有 $f(x_0) > f(x'_0)$ ，这与 $f(x)$ 是单调增加函数的假设矛盾，故必有 $f(x_0) = kx_0$ ，由此证得 $f(x) = kx$ 。

定理 1-3-2：对于 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

并且在无论如何小的区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中为有界的函数 $f(x)$ ，是一元线性齐次函数。

证明：先证明 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续。

在已知方程中，令 $x = y = 0$ ，得 $f(0) = 2f(0)$ ，故 $f(0) = 0$ 。

根据假设，存在区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ，当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时， $|f(x)| < M$ 。因此对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$ ，有正整数 N 存在，使 $\frac{M}{N} < \varepsilon_1$ 。

今取 $\delta = \frac{\varepsilon_1}{N}$ ，则当 $|x| < \delta = \frac{\varepsilon_1}{N}$ 且 $|Nx| = N|x| < \varepsilon_1$ 时。有

$$M \geq |f(Nx)| = |f(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{N\text{个}})| = N|f(x)|$$

故

$$|f(x)| \leq \frac{M}{N} < \varepsilon,$$

此即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

其次证 $f(x)$ 在任意点 x_0 的连续性。

前已证得, 对任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 有 $\delta_1 = \min\left(\frac{\varepsilon_1}{N}, \frac{\varepsilon}{N}\right)$ 存

在, 当 $|x| < \delta$ 时, 使 $|f(x)| < \varepsilon_1$ 。故当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x - x_0 + x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x - x_0) + f(x_0) - f(x_0)| \\ &= |f(x - x_0)| < \varepsilon_1 \end{aligned}$$

此即 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续。

今设 x 为正有理数 $\frac{n}{m}$, 则 $mf\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right)$
 $= f(n) = nf(1)$, 由此得

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1) \quad \text{即 } f(x) = f(1)x$$

同理, 当 x 为负有理数 $-\frac{n}{m}$ 时, 可得 $f\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}f(-1)$
 $= -\frac{n}{m}f(1)$, 即 $f(x) = f(1)x$ 。

对于任意实数 x , 可取有理序列 $\{x_n\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$,

则

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(1)x_n] = f(1)x$$

此即说明 $f(x)$ 是一元线性齐次函数。

1-4 一般线性函数的充分条件

由微积分学, 可知一般 (非齐次) 线性函数 $y=kx+b$ 的导数 $y'=k$ 是常数。导数在几何上表示图象切线与横坐标轴正向夹角的正切值, 导数为常数, 说明 $y=kx+b$ 的图象与横坐标轴的夹角处处相等, 从而是一根直线。又由于 $y'=k$, 所以 $y''=0$ 。反过来, 也可用一、二阶导数的值来作为判别线性函数的充分条件。

定理 1-4-1: 若 $y'=k$ (常数), 则函数 $y=f(x)$ 为线性函数。

证明: 把 $y'=f'(x)=k$ 对自变量 x 从 0 到 x 作定积分, 得 $\int_0^x y'(x) dx = \int_0^x f'(x) dx = f(x) - f(0) = kx$, 所以 $y=f(x)=kx+f(0)$, 是一元线性函数。

定理 1-4-2: 若函数 $y=f(x)$ 的二阶导数为 0, 则 $f(x)$ 为一元线性函数。

证明: 因为 $f''(x)=0$, 所以 $\int_0^x f''(x) dx = f'(x) - f'(0) = 0$, 即 $f'(x)=f'(0)$, 再积分, $\int_0^x f'(x) dx = \int_0^x f'(0) dx$, 即 $f(x)-f(0)=f'(0)x$, 所以 $y=f(x)=f'(0)x+f(0)$, 为一元线性函数。

在进行数值计算时, 常用函数的差分来代替微分, 同样也可以用差分来描述使函数成为线性函数的充分条件。为此, 先给出差分的概念。

定义 1-4-1: 称 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ 为函数 $f(x)$ 在 x 处的一阶差分, 称 $\Delta^2 f(x)=\Delta[\Delta f(x)]$ 为函数 $f(x)$ 在 x 处的二阶差分。

易见二阶差分 $\Delta^2 f(x) = \Delta [\Delta f(x)] = \Delta [f(x+\Delta x) - f(x)] = [f(x+\Delta x+\Delta x) - f(x+\Delta x)] - [f(x+\Delta x) - f(x)] = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$.

定理 1-4-3: 若函数 $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) 连续, 且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0$$

则此函数是一元线性函数, 即 $f(x) = kx + b$.

证明: 因为 $\Delta^2 f(x) = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$, 由 $\Delta^2 f(x) \equiv 0$, 得出

$$f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

设 n 为正整数, 则

$$\begin{aligned} f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) &= f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{n-2}{n}\right) - f\left(\frac{n-3}{n}\right) \\ &= \dots = f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned} f(1) &= f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right] \\ &= f\left(\frac{n-2}{n}\right) + 2 \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right] \\ &= \dots = f\left(\frac{1}{n}\right) + (n-1) \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right] \end{aligned}$$

$$=f(0)+n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right]$$

故知

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)+\frac{1}{n}[f(1)-f(0)]$$

设 $\frac{m}{n}$ 为正有理数, 则

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(0)+m\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right]$$

$$=f(0)+\frac{m}{n}[f(1)-f(0)]$$

$$\text{又由 } f\left(\frac{m}{n}\right)-f(0)=f(0)-f\left(-\frac{m}{n}\right)$$

得出

$$f\left(-\frac{m}{n}\right)=f(0)+\left[f(0)-f\left(\frac{m}{n}\right)\right]$$

$$=f(0)-\frac{m}{n}[f(1)-f(0)]$$

故当 x 为有理数时, $f(x)=f(0)+x[f(1)-f(0)]$ 。若令 $f(1)-f(0)=k$, $f(0)=b$, 则当 x 为有理数时, $f(x)=kx+b$, 为 x 的一元线性函数。以下可仿照定理1-2-1的证明, 利用 $f(x)$ 的连续性和实数系的性质, 证明 x 为无理数时也有 $f(x)=kx+b$, 从而最后证出结论。

1-5 多元线性函数

定义 1-5-1: 称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=k_1x_1+k_2x_2+\dots+k_nx_n+b$ 为 n 个自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 **n 元线性函数**。这里

$k_1, k_2, \dots, k_n$ 和 b 均为实常数, 且 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 不全为 0, 若 $b=0$, 则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$ 为 n 个自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 元线性齐次函数。

若自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别得到一个增量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, 由此引起的 n 元线性函数的增量

$$\begin{aligned} & \Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ & \quad - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= k_1(x_1 + \Delta x_1) + k_2(x_2 + \Delta x_2) + \dots + k_n(x_n + \Delta x_n) \\ & \quad + b - [k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n + b] \\ &= k_1\Delta x_1 + k_2\Delta x_2 + \dots + k_n\Delta x_n \end{aligned}$$

恰为以增量 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ 为自变量的线性齐次函数。由于线性齐次函数如此重要, 更由于它具有很多良好的性质, 下面我们主要讨论线性齐次函数。对于非齐次的线性函数, 可以通过研究其增量, 化为线性齐次函数。

首先注意到, n 个自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的线性齐次函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$ 相当于 n 个分别以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为自变量的一元线性齐次函数 $f(x_1) = k_1x_1, f(x_2) = k_2x_2, \dots, f(x_n) = k_nx_n$ 之和, 由此可得出:

性质 1-5-1 (比例性): 假定只让某一自变量 x_i 取得增量 Δx_i , 而使其余的自变量保持不变, 这样引起的线性齐次函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的增量

$$\begin{aligned} & \Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) \\ & \quad - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= k_i\Delta x_i \end{aligned}$$

与 x_i 的增量 Δx_i 成正比例。

也就是说, 若把自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 看作是影响函数值 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的独立因素, 则每一个独立因素作用的结果, 都与它们的大小成正比例。

性质 1-5-2 (无关性): 假定所有自变量都得到某个增量, 这样算出的 n 元线性齐次函数的增量, 等于单独改变每一个自变量所得到的增量之和, 即:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= [f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \\ &\quad + [f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)] + \dots \\ &\quad + [f(x_1, x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)]\end{aligned}$$

也就是说, 若把自变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 看作影响函数值 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的独立因素, 则各因素作用的总效果等于每一个因素单独作用的效果之和, 各因素之间互不干扰。

性质 1-5-3 (齐次性): 若 λ 为任意实常数, 则

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

而所有这些性质的要害是:

性质 1-5-4 (可加性): $f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

仿照定理1-2-1所用的办法, 不难由性质1-5-4推出性质1-5-3, 但书写形式比较繁琐, 这里就不作了。