

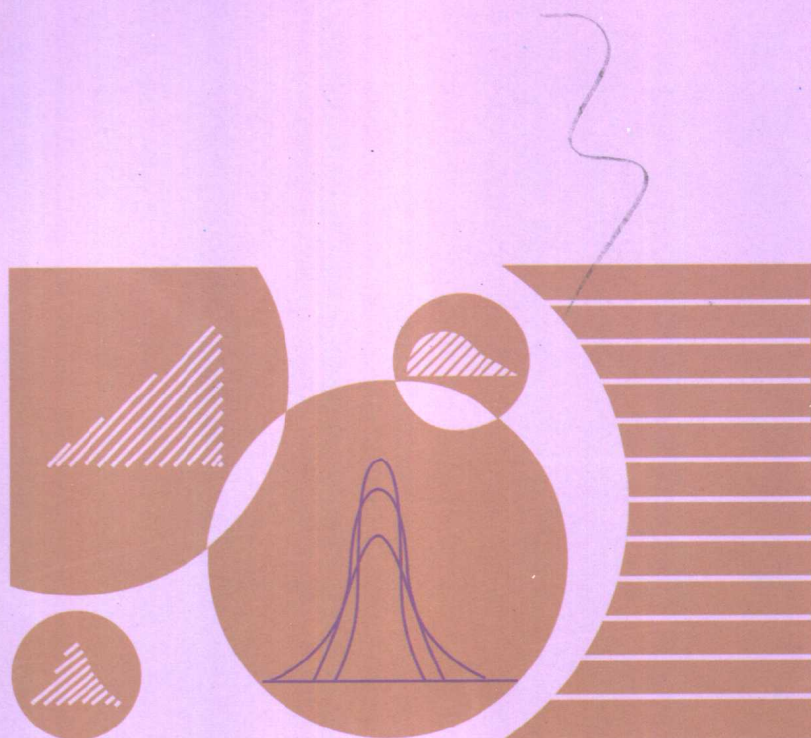
///

高等学校适用教材

误差理论与数据处理

(修订版)

梁晋文 陈林才 何 贡 编著



中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与数据处理/梁晋文,陈林才,何贡编著. 2版(修订本). —北京:中国计量出版社, 2001.9

高等学校适用教材

ISBN 7-5026-1512-1

I. 误… II. ①梁…②陈…③何… III. ①误差理论—高等学校—教材 ②数据处理—高等学校—教材 IV. 0241.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 044226 号

内 容 提 要

本书是由 1989 年版的《误差理论与数据处理》修订而成。原版是根据原“高等工业学校互换性与技术测量教材编审小组”拟订的大纲编写的,经“高等工业学校互换性与测量技术基础课程教学指导小组”同意,作为高等工业学校机械类各专业或仪器仪表专业试用教材。

本书共分 10 章,内容包括:计量学概述和误差的基本概念;等精度测量的随机误差;系统误差;粗大误差;非等精度测量;误差的合成与分配;测量结果的质量评定;最小二乘法 and 组合测量;实验结果的处理和经验公式;随机过程及其数据处理基础等。

本教材亦可供机械制造和仪器仪表制造的工程技术人员及计量、检验人员参考。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话(010)64275360

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm × 1092 mm 16 开本 印张 11 字数 261 千字

2001 年 8 月第 2 版 2001 年 8 月第 11 次印刷

*

印数 35 001—40 000 定价:18.00 元

前 言

科学技术的发展与实验测量密切相关。在进行实验测量时,产生误差是不可避免的。因此,必须借助于误差理论,研究、估计和判断测量的数据和结果是否精确可靠,并采取正确的数据处理方法,以提高测量结果的精确程度。误差理论是我们认识客观规律的有力工具,是工程学科学生应该掌握的基础知识。

本教材是根据原“高等工业学校互换性与技术测量教材编审小组”拟定的大纲,主要为适应机械类专业 30~40 学时的教学需要,并考虑到工厂企业有关技术人员的需求而编写的。经“高等工业学校互换性与测量技术基础课程教学指导小组”同意,作为高等工业学校试用教材于 1989 年正式出版。

本书出版以来,先后共印刷 10 次。这次修订,内容有所增删。原第二章删除了实际应用很少的 § 2—4“简单运算误差”,余下内容并入第一章;由于计算机应用的普及,第九章删去了原 § 9—6 几种数据处理的计算机程序与实例;原第十一章“概率与矩阵的基础知识”,是为当时社会上未学习过概率论和线性代数的读者阅读本书一至九章而准备的,这次修订决定全部删去。

考虑到测量不确定度的重要性及其概念与应用的日趋成熟,这次特增编了这方面的内容。

近年来,动态测量误差及其数据处理的研究与应用发展很快,内容也较多。经再三考虑,我们决定暂不增编这方面的内容。原因之一是这本教材主要是供 30~40 学时教学使用,现有内容已难于全部讲授,故不宜增大篇幅,增添新的内容;再则学习这些内容要求学生具备更多的预备知识(如信号分析与处理及相关的数学知识等),否则教学上将有很大难度。有的院校是将这方面新的内容另外开设选修课或讲座,这不失为一较好办法。

本书的其他章节,也作了全面审改,包括名词术语的规范统一和局部内容及文字的修改。

本书一至七章是最基本的内容,宜用较多学时讲透。第八、九两章是本书前七章的综合、扩展与总结,也是数据处理的基础,但内容较多,不必全部在课堂上讲授。建议对第八章只讲线性最小二乘法,至于非线性函数和组合测量的最小二乘法以及正态分布公式的证明等,可简略或不讲。对于第九章,建议只讲一元线性最小二乘法求经验公式和周期性经验公式。在课堂上不讲的内容并非不重要,作为科技工作者,应掌握这些基础知识。这些内容可留给学生自学。学生掌握最基本的原理后,一旦遇到这些问题再自学,不会感到困难。

第十章可根据不同专业的要求选讲。

本书初版由清华大学梁晋文教授、天津大学陈林才教授和河北工业大学何贡教授合作编写。由于梁晋文教授年事已高,修订版工作主要由何贡教授和陈林才教授共同完成。

初版主审天津大学蔡其恕教授曾对本书逐章仔细审阅,并提出许多宝贵的修改意见,对提高教材质量起了重要作用。蔡老前些年在 90 周岁时不幸病逝。我们谨对他表示深切谢意和怀念。

在编写本教材过程中,曾得到课程教学指导小组成员的帮助;得到中国计量出版社的支持;天津大学罗南星教授及当时的博士研究生刁红彦同志曾协助整编;北京理工大学林洪桦教授对第十章提出许多很好的意见。对这些帮助,我们在此表示衷心的感谢。

限于我们的水平,书中缺点错误在所难免,殷切希望读者批评指正。

编著者

2001 年 4 月

目 录

第一章 计量学概述和误差的基本概念	(1)
§ 1—1 计量学的内容与作用	(1)
一、计量学的内容	(1)
二、计量学的作用	(1)
§ 1—2 关于测量的一些概念	(2)
一、测量	(2)
二、测量结果	(2)
三、测量方法	(2)
§ 1—3 单位制与基准(标准)	(3)
一、单位制	(3)
二、计量基准(标准)	(4)
§ 1—4 误差的概念	(4)
一、误差的含义	(4)
二、误差的类型	(4)
三、误差的表示方法	(5)
四、精密性、正确性、精确性(准确度)	(6)
五、测量误差的来源	(6)
六、研究误差的目的	(7)
§ 1—5 有效数字与数值运算	(7)
一、近似值概念	(7)
二、有效数字和有效位数	(8)
三、数据运算规则	(9)
第二章 等精度测量的随机误差	(10)
§ 2—1 正态分布的特征	(10)
§ 2—2 随机误差的数字特征	(10)
一、算术平均值	(11)
二、标准差(或标准偏差)	(12)
三、用残差计算标准差的估计值	(12)
四、算术平均值的标准差及其估计值	(15)
§ 2—3 随机误差的正态分布曲线	(18)
一、经验分布曲线	(18)
二、正态分布曲线	(19)
三、正态分布密度函数的概率积分	(21)

§ 2—4 单次测量的精度指标	(23)
§ 2—5 多次重复测量结果的精度指标	(26)
一、算术平均值的分布	(26)
二、算术平均值的精度指标	(29)
§ 2—6 几种常用的非正态分布	(31)
一、评定非正态分布随机误差的方法	(31)
二、几种重要的非正态分布	(32)
§ 2—7 高斯误差定律	(41)
第三章 系统误差	(44)
§ 3—1 基本概念	(44)
一、系统误差的类别	(44)
二、系统误差对测量结果的影响	(45)
§ 3—2 系统误差的发现方法	(45)
一、定值系统误差的发现方法	(46)
二、变值系统误差的发现方法	(48)
§ 3—3 系统误差的减小和消除	(51)
一、从误差根源上消除系统误差	(51)
二、在测量过程中消除系统误差的常用方法	(53)
第四章 粗大误差	(57)
§ 4—1 粗大误差的概念	(57)
§ 4—2 粗大误差的剔除准则和应用举例	(57)
一、粗大误差的剔除准则	(57)
二、应用举例	(60)
第五章 非等精度测量	(62)
§ 5—1 概述	(62)
§ 5—2 “权”的概念和加权平均值	(62)
§ 5—3 “权”和精度参数的关系	(63)
§ 5—4 加权平均值 $\bar{x}_p$ 的精度参数 $\sigma_{\bar{x}_p}$	(64)
一、单位权的标准差 σ_u	(64)
二、加权平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}_p}$	(65)
第六章 误差的合成与分配	(67)
§ 6—1 误差的传递	(67)
§ 6—2 系统误差的合成	(67)
§ 6—3 随机误差的合成	(69)
一、基本计算公式	(69)
二、随机误差合成中的置信概率	(71)
§ 6—4 误差合成原理的实际应用	(73)
一、间接测量的误差合成	(73)
二、分析确定最有利的测量条件	(73)

三、分析和选择测量方法	(75)
四、测量误差的分配	(77)
§ 6—5 “相关”问题	(79)
一、“相关”的基本概念	(79)
二、相关系数的求法	(81)
第七章 测量结果的质量评定	(84)
§ 7—1 传统的精密测量数据处理步骤和测量结果的评定	(84)
一、数据处理步骤	(84)
二、存在的问题	(85)
§ 7—2 测量不确定度	(85)
一、发展过程简介	(85)
二、测量不确定度的定义	(86)
三、标准不确定度的评定	(86)
四、测量不确定度的合成	(89)
五、测量结果及其测量不确定度的表达	(89)
六、测量不确定度与极限测量误差的比较	(91)
§ 7—3 测量不确定度的评定和表示应用示例	(91)
第八章 最小二乘法和组合测量	(95)
§ 8—1 最小二乘法原理	(95)
§ 8—2 最小二乘法的基本运算	(97)
一、等精度测量线性函数的最小二乘法处理	(97)
二、非等精度测量线性函数的最小二乘法处理	(102)
三、非线性函数的最小二乘法处理	(103)
§ 8—3 最小二乘法处理的精度估计	(104)
一、直接测量结果的精度估计	(104)
二、待定值的精度估计	(105)
§ 8—4 组合测量结果的最小二乘法处理	(106)
第九章 实验结果的处理和经验公式	(112)
§ 9—1 回归分析与经验公式	(112)
§ 9—2 一元线性经验公式	(112)
一、求经验公式的方法	(112)
二、相关系数及其显著性检验	(117)
三、经验公式的回归精度	(118)
§ 9—3 一元非线性经验公式	(120)
一、经验公式类型的选择	(120)
二、用化曲线回归为直线回归的方法求经验公式	(125)
三、用插入法求经验公式	(127)
四、相关系数	(130)
§ 9—4 多元线性经验公式	(131)

第十章 随机过程及其数据处理基础..... (136)

§ 10—1 概述 (136)

§ 10—2 随机过程及其特征量 (136)

一、随机过程的基本概念 (136)

二、随机过程的特征量 (137)

§ 10—3 平稳随机过程 (142)

一、随机过程的平稳条件 (142)

二、平稳随机过程的自相关函数..... (143)

三、平稳随机过程的谱密度函数..... (145)

四、各态历经随机过程 (149)

五、非平稳过程的平稳化处理 (151)

§ 10—4 平稳过程的谱估计 (152)

一、间接按自相关函数求谱密度函数 (152)

二、直接按样本 $x(t)$ 的采样数据估计频谱 (153)

附录..... (163)

参考文献..... (167)

第一章 计量学概述和误差的基本概念

§ 1—1 计量学的内容与作用

一、计量学的内容

为实现测量单位的统一和被测量值准确可靠的一切活动,统称计量。计量学是一门研究测量、保证测量统一和准确的科学。计量学有时可简称计量,它涵盖有关测量的理论与实践的各个方面。研究内容包括计量单位及其基准与标准的建立、保存和使用;测量方法和计量器具;测量的准确度(精确度);观测者进行测量的能力;计量法制和管理等。主要工作内容是:

(1) 建立计量单位及其基准、标准,基准和标准的复制、保存和传递(指基尺、基准砝码、基准频率、时间、波长等)。

(2) 采取措施保证国家内部和国际间计量量值的统一性。

(3) 拟定测量方法,设计计量器具,以便实施测量。

(4) 分析和估计测量结果的不确定度,并设法减小误差,提高其准确度。

上述第(4)项内容是本书所要讨论的中心内容。

二、计量学的作用

对自然科学而言,特别在技术科学和工程中,信息收集的主要含义就是测量(取得观测和实验的数据)。测量过程本身就是一种实验。各种物理量都需经过测试和计量才能得出结果。许多物理定理的发现,物理常数的确定,都是通过精密计量测试得出的。如:半导体的发现,自由落体定理的确定等均是如此。

通过计量可以进一步完善理论。如吴有训和康普顿研究了 X 射线频率和散射角的关系,通过对散射光角度改变及波长改变的测量,证实了以前理论分析的正确性,奠定了量子理论基础——光子能量守恒和冲量守恒定律。这类例子充分说明:计量测试在科学上和认识客观世界中的重要意义和作用。

对于技术科学,计量尤为重要,它是发展技术和工业的必要条件,计量与测试永远是促进其进步的重要因素。测量的精度和效率,决定着科学技术和工业的水平。

现代机械工业的发展是建立在标准化与互换性的基础之上的。互换性的先决条件是零、部件必须具有一定的精度,而精度取决于制造水平,并由计量水平来确定。精度要求、制造水平和计量水平,三者是相互促进又相互制约的,其中计量是精密加工的基础,没有计量就不可能保证产品的精度。

任何计量测试,都不可避免有误差。因此,必须研究、估计和判断计量结果是否可靠,给出正确的评定。对于计量结果的分析、研究、判断,必须采用经过长期实践积累所形成的误差理论,它是我们认识客观世界的有力工具。在科学领域内,某些重大的发现,是运用误差理论直

接对测量结果分析研究而发现的。例如:在对海王星的运动轨迹的观测中,由观测数据发现它有小的、不规则的运动,因此引起人们的注意。最后,导致冥王星的发现。又如:由空气中获取的氮气,测得其密度与用其他化学方法产生氮气所测得的密度有明显差异,从而导致了惰性气体氙气的发现。

在中国古代的隋、唐、元、明朝时期,曾有过许多科学家和学者对误差理论和数据处理进行了研究,并做出了巨大贡献。例如:目前在数据处理中常采用的平滑曲线等间距内插法,是隋朝的刘焯(544~610年)完成的;不等间距插值法,是唐朝的张遂(僧人,法号“一行”,683~727年)所创立的。他们建立这种算法的时间,要比牛顿早1 000年左右。

解放前,在历代反动政府的统治下,我国学者在这方面的贡献较少,即便有,也是在极端困难的条件下,或在国外利用外国的实验室研究出来的。如:原清华大学、北京大学的许宝禄教授关于概率论中的区间估计理论的完善(1941年);黄子卿教授测定出在三相点的水蒸气压力标准;由王大珩教授设计的被称为卜尔夫利西折射率测量仪等。

解放后,随着国民经济的发展,计量工作有了很大的进步。近年来,由于我国科学技术和工农业生产的飞速发展,计量科学和误差理论与数据处理的研究也获得喜人的成果。我们深信:随着改革开放的深入发展,我国的计量科学事业,必将取得更大的成绩。

§ 1—2 关于测量的一些概念

一、测 量

可以用数值来评价(表示)其物质特性(状态、运动等)的量,称之为物理量。如长度、温度、硬度、密度等。

测量是以确定被测对象的量值为目的的一组操作,即用实验方法,将物理量与作为单位量的某量值相比较,并求出其比值的过程。它可用下式表示:

$$L = qu \quad (1-1)$$

式中: L ——被测量值;

u ——测量单位;

q ——单位的数目(值),或称比值。

例如:量出某工件长 $L = 100 \text{ mm}$,其中长为 L ; mm 为其测量单位 u ; 100 为单位的数目 q (即长度 L 与长度单位 u 的比值)。

二、测量结果

由测量所得的赋予被测量的值叫做测量结果。显然,测量结果是由比值和测量单位两部分所组成。故测量结果多具有单位,如 $L(\text{长度}) = 100 \text{ mm}$,但也有某些物理量不含单位,如相对密度。完整确切地讲,测量结果还应包括测量不确定度,这在后边将要讲到。

三、测量方法

按测量结果获得的方法,或测量条件及测量结果的不同,测量方法可分为:直接测量与间接测量;直接比较测量与微差比较测量;等精度测量与非等精度测量;接触测量与非接触测量;

主动测量与被动测量;静态测量与动态测量等。而按实验数据的处理方式,测量方法主要是分为直接测量、间接测量与组合测量三类,现分述如下。

1. 直接测量

无需对待测的量与其它实测的量进行某种函数关系的计算,而直接得到被测量值的测量,称为直接测量。如用游标卡尺测量轴径;用立式光学计测量圆柱塞规直径对于作为标准尺寸的量块中心长度的偏差值,都属直接测量。

2. 间接测量

与直接测量不同,待测量 y 需先通过测量与其有某种函数关系的其他测量值 x (或 n 个测量值 $x_1, x_2, \dots, x_n$), 然后通过其函数关系:

$$y = f(x)$$

或

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

计算得出待测量 y , 这种测量称为间接测量。

如用弦长弓高法测量圆弧或轴的直径 D (图 1—1), 先测量一定的弦长 s 和相应的弓高 h , 再按下式计算出直径 D :

$$D = \frac{s^2}{4h} + h \quad (1-2)$$

3. 组合测量

如有若干个待求量 $y_1, y_2, \dots, y_t$, 把这些待求量用不同方式组合起来进行测量, 并把测得值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 与待求量之间的函数关系列成方程组, 即

$$\left. \begin{aligned} f_1(y_1, y_2, \dots, y_t) - x_1 &= 0 \\ f_2(y_1, y_2, \dots, y_t) - x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(y_1, y_2, \dots, y_t) - x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

方程式的数量 n 要大于待求量的个数 t , 然后用最小二乘法求出各待求量的数值, 即为组合测量 (详见第八章)。

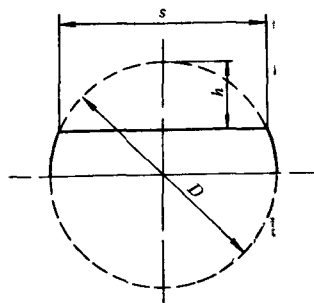


图 1—1

§ 1—3 单位制与基准(标准)

一、单 位 制

一般由一个数乘以测量单位所表示的特定量的大小, 称为量值 (如 5 m, 12 kg, 20 ℃ 等)。在科学的所有领域或某一领域中, 一组彼此间存在确定关系的基本量和相应导出量的组合, 称为量制。如计量测试中的几何量、力学量、电学量、…等等, 都有自己的量制。

为给定量制按给定规则确定的一组基本单位和导出单位, 称为单位制。我国采用的国际单位制 (SI) 是由国际计量大会采用和推荐的在全世界广泛应用的单位制。国际单位制单位由米 (长度)、千克 (质量)、秒 (时间)、安 [培] (电流)、开 [尔文] (热力学温度)、摩 [尔] (物质的量)、坎 [德拉] (发光强度) 等 7 个基本单位和弧度 (平面角)、球面度 (立体角) 两个辅助单位以及它们的导出单位组成。

二、计量基准(标准)

为了定义、实现、保存或复现量的单位或一个或多个量值,用作参考的实物量具、测量仪器、参考物质或测量系统,称为计量基准(标准),它包括实物基准(如“千克”原器)和自然基准(如“米”定义是光在真空中于 $1/299\,792\,458\text{ s}$ 时间间隔内所行进的距离)。

国际计量基准是经国际协议承认的测量基准,在国际上作为对有关量的其他测量基(标)准定值的依据。

国家计量基准是经国家决定承认的测量基准,在一个国家内作为对有关量的其他测量基(标)准定值的依据。

用于日常校准或核查实物量具测量仪器或参考物质的测量标准,称为工作标准。工作标准还可根据需要,按不同的准确度分等分级。其准确度低于计量基准。

计量基准(标准)对保证全国和国际上的量值统一起着极为重要的作用。

术语计量基准与标准,使用中有时也无严格区分,在我国颁布的计量技术规范 JJF1001—1998《通用计量术语及定义》中,已将计量基准、标准和测量标准作为同义词对待。一般情况下优先称标准。

§ 1—4 误差的概念

零件的加工和测量,以及所用的加工机床、测量仪器本身,都不可避免地存在误差,没有误差的加工和测量是不存在的。有些参数的计算及测量数据的处理,同样含有误差。误差和计量测试有密切关系,任何计量测试都有误差存在,而各种量值的大小,又都要通过计量测试才能给出。因此,下面着重讨论测量误差。

一、误差的含义

误差是评定精度的尺度,误差愈小表示精度愈高。在测量中,由误差表示测得值与真值之差。

若令测量误差为 δ ,测量值为 x ,真值为 x_0 ,则有

$$\delta = x - x_0 \quad (1-4)$$

或

$$x_0 = x - \delta$$

真值 x_0 是客观存在的,但在实际应用时,一般是不知道和无法确定的。在统计学上,当测量的次数 n 非常大时(趋于无穷大),测得值的算术平均值(数学期望)才接近于真值。故常以测量次数足够大时的测得值的算术平均值,近似代替真值(详见第二章);实用中还常用量值精度足够高的实物近似代替真值,这些都称之为约定真值。

二、误差的类型

按误差的性质和特点,误差可分为随机误差、系统误差和粗大误差三类。

1. 随机误差

在同一测量条件下,多次重复测量同一量值时,测量误差的绝对值和正负符号以不可预知的方式变化,这种误差叫做随机误差。例如千分表测杆与套管导轨在测量时因有间隙和摩擦

引起的示值不稳定的误差。

在我国新制订的国家计量技术规范 JJF1001—1998《通用计量术语及定义》中,参照并采用了 1993 年几个国际权威组织提出的新的随机误差定量定义;随机误差($\delta_{\text{随机}}$)是测量结果 x_i 与在重复条件下,对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值 $\bar{x}$ 之差。即

$$\delta_{\text{随机}} = x_i - \bar{x} \quad (1-5)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} (n \rightarrow \infty) \quad (1-6)$$

由于重复测量实际上只能进行有限次,所以实用中的随机误差只是一近似的估计值。

当测量次数足够多时,就整体而言,随机误差服从一定的统计分布规律(详见第二章)。

2. 系统误差

在同一测量条件下,多次重复测量同一量值时,测量误差的绝对值和正负符号都保持不变,或在测量条件改变时按一定规律变化的误差,叫做系统误差。前者为定值系统误差,后者为变值系统误差。

如用零位没有对准的游标卡尺或千分尺测量尺寸,将有零位系统误差。

在我国新制订的国家计量技术规范(JJF1001—1998《通用计量术语及定义》)中,系统误差 $\delta_{\text{系统}}$ 的定量定义是:在重复性条件下,对同一被测量进行无限多次测量所得结果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ($n \rightarrow \infty$) 的平均值 $\bar{x}$ 与被测量的真值 x_0 之差。即

$$\delta_{\text{系统}} = \bar{x} - x_0 \quad (1-7)$$

式中 $\bar{x}$ 按式(1-6)计算。

由于定义中的测量是在重复性条件下进行的,测量条件不改变,故 $\delta_{\text{系统}}$ 是定值系统误差。

由于重复测量实际上只能进行有限次,另外,测量的真值也只能用约定真值代替,所以实际中的系统误差也只是一近似的估计值。

3. 粗大误差

这类误差的发生,是由于测量者的疏忽大意,或因环境条件的突然变化而引起的,误差值一般比较显著。对确认含有粗大误差的测量数据,应予以剔除(详见第四章)。

三、误差的表示方法

误差可用绝对误差和相对误差两种基本方式来表示。

1. 绝对误差

绝对误差就是前面讲的某量值的测得值与真值(或约定真值)之差,一般所说的误差,就是绝对误差。

由于实际测得值可能大于或小于被测量值的真值,故绝对误差可以为正值或负值。它与误差的绝对值不同,后者是不考虑正负号的绝对值。

2. 相对误差

相对误差 ϵ 是绝对误差 δ 与被测量的真值 x_0 的比值,一般用百分比(%)表示。由于测得值 x 与真值很接近,故也可近似地用绝对误差与测得值之比作为相对误差。即

$$\text{相对误差 } \epsilon = \frac{\delta}{x_0} \approx \frac{\delta}{x}$$

在测量工作中,主要是用绝对误差来表示测量误差。相对误差常用来表示具有多挡示值

范围的仪表的测量精度,还可用来比较不同量值的测量精度。

实际测量中有这样一种规律,即被测量值越大(特小的难于测量的量值除外),其测量误差也越大(对用同一计量器具和相同的测量方法及条件而言)。所以用绝对误差来比较两个相差较大的和(或)用不同测量方法测得的量值的测量精度,就显得不合理,这时宜用相对误差来比较。

如用某种方法测得一尺寸的结果 $L_1 = 100 \text{ mm}$, 误差 δ_1 为 $\pm 0.01 \text{ mm}$, 而用另一种方法测得另一尺寸 $L_2 = 20 \text{ mm}$, 误差 δ_2 为 $\pm 0.005 \text{ mm}$ (这里误差值的正负号表示误差的范围, 详见第二章)。

用相对误差来比较两者的测量精度:

$$\epsilon_1 = \frac{\pm 0.01}{100} = \pm 0.01 \%$$

$$\epsilon_2 = \frac{\pm 0.005}{20} = \pm 0.025 \%$$

$\epsilon_1 < \epsilon_2$, 故知测量尺寸 L_1 的精度比 L_2 高。如用绝对误差来比较, 就会得出相反的不正确结论。

四、精密度、正确度、精确度(准确度)

测得值与真值的接近程度,称为精度。它可分为:

1. 精密度

表示实验(测量)结果中的随机误差的大小程度,即在一定的条件下,进行多次重复实验(测量)时,所得实验(测量)结果彼此之间符合的程度,它通常是用随机误差(见第二章)来表示。一个实验的随机误差小,则其精密度高。

2. 正确度

表示实验(测量)结果中的系统误差的大小程度,即在规定的条件下,在实验(测量)中,所有系统误差的综合。一个实验的系统误差小,则其正确度高。

3. 精确度(准确度)

精确度是实验(测量)结果中,系统误差与随机误差的综合,即精密正确的程度。它表示实验(测量)结果与真值的一致程度。精确度反映了实验(测量)的各类误差的综合。如一个实验的系统误差和随机误差都很小,则其精确度高。

图 1—2 所示的打靶结果,子弹着靶点有三种情况:图(a)为系统误差和随机误差都大,即正确度,精密度都低;图(b)为系统误差大,随机误差小,即正确度低,精密度高;图(c)为系统误差和随机误差都小,即精确度高。

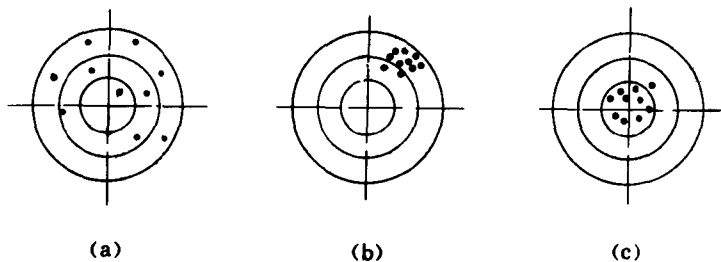


图 1—2

五、测量误差的来源

测量误差的来源是多方面的,主要可归纳为:

1. 标准器具的误差

作为在测量中提供标准量的标准器具,如光波波长、标准线纹尺、量块、砝码、标准电阻等,它们本身所体现的量值,不可避免地含有一定的误差(一般误差值相对较小)。

2. 测量装置的误差

测量装置误差包括计量器具的原理误差、制造装调误差;被测件在测量仪器上安置时的定位误差;附件误差;以及接触测量中测量力与测量力变化引起的误差等。

3. 方法误差

由于测量方法的不完善所引起的误差。如采用近似的计算方法,用钢卷尺测出大尺寸轴的圆周长 s ,然后由公式 $d = s/\pi$ 计算出轴的直径 d 所引起的误差;又如采用触针法测量工件的表面粗糙度时,由于触头的圆角半径引起的误差等。

4. 测量者的误差

由于测量者的固有习惯、分辨能力的限制、工作疲劳引起的视觉器官生理变化、精神因素引起的一时疏忽等原因所引起的误差。如瞄准误差与读数误差。

5. 客观环境引起的误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起标准器、测量装置和被测件本身的变化所造成的误差。这些环境因素有:温度、湿度、气压、振动、照明、电磁场等,其中以温度尤为重要。

六、研究误差的目的

在计量测试领域,研究误差有着极为重要的意义,其目的在于:

(1) 分析误差的性质和产生的原因,并采取相应的措施,以便从根源上消除误差,或将误差减小到最低限度。

(2) 正确计算和处理各种测量数据,尽可能提高测量结果的精确度。正确表达测量结果,以适应各方面的需求和交流。

(3) 合理地安排测量过程,正确地设计或选用计量器具和测量方法,以求在满足测量精度要求的前提下,提高测量效率,降低测量成本。

§ 1—5 有效数字与数值运算

一、近似值概念

物理量大多是由观测所确定,因而不可避免会含有误差。即测得值是一代表真值的近似值。误差值同样也是近似的。测量某被测量所得到的近似值往往是设计工作的根据,是实际工程工作的基础。

在运用近似算法进行计算时,所得结果亦为近似值,通常在保证能达到所要求的近似程

度的前提下,应使计算工作合理简化,即一方面应避免盲目追求不切实际、没有必要的精确计算,致使计算工作繁重,既浪费人力又耗费时间;另一方面又要保证达到要求的精确程度,不能图省事,以致造成错误。

在计算机应用日益普遍的情况下,近似值及运算数字的选取应多加注意,周密分析,以使计算程序简化,计算效率提高,近似程度合理、可靠。

二、有效数字和有效位数

任何测量数据,都含有测量误差。多取数据的位数,并不能减小测量误差,相反,会使计算复杂,并给人造成误解。因此,测量数据的位数,应与其测量误差相适应。

例如用分度值为 0.01 mm 的外径千分尺测得一尺寸为 74.986 mm(最后一位“6”是估读的),已知该千分尺的测量误差范围为 ± 0.005 mm,即尺寸的真值应在 74.981~74.991 mm 之间。显然小数点后第二位已不准确(可能是 8 或 9),再后一位就更不准确了。因此统一规定,一个正确有效的测量数据,只允许最后一位不准确。

一个数据,从第一个非“0”的数字开始,到(包括)最后一位唯一不准确的数字为止,都是有效数字,有效数字的位数,叫做有效位数。有效位数后面的数字,即多余的位数,应按数据修约的国家标准(GB 8107—1987)的规定,作修约处理。修约就是修整约简的意思。

一个近似数有 n 个有效数字,也叫这个近似数有 n 个数位。如 3.141 6, 2.117 3, 280.00, 均为 5 位有效数字;0.001 34, 134, 1.34 均为 3 位有效数字。

在判断有效数字时,要特别注意“0”这个数字,它可以是有效数字,也可以不是有效数字,如 0.001 34 的前面 3 个 0 均不是有效数字,因为这 3 个 0 与 0.001 34 的精确度无关,只与测量单位有关。又如 280.00 的后面 3 个 0,却均为有效数字,因为这 3 个 0 与 280.00 的精确度有关。若设此两数均是采用“四舍五入”法截取所得,对于 0.001 34,其误差的绝对值为 0.000 005,若去掉此近似数前面的 3 个 0,则可写成 134×10^{-5} ,其误差的绝对值为 0.5×10^{-5} ,与精确度无关,而对于 280.00,其误差的绝对值为 0.005,若去掉此近似数后面的 3 个 0,则可写成 28×10 ,其误差的绝对值为 $0.5 \times 10 = 5 \neq 0.005$,即与精确度有关。因此,对待近似数时,不可象对待准确数那样,随便去掉小数点部分右边的 0,或在小数点部分右边加上 0,因为这样做的结果,虽不会改变这个数的大小,却改变了它的精确度。

数据修约简单地说是采用“四舍五入”的方法,具体规定如下:

(1) 拟舍弃的数字最左一位小于 5 时舍去。如 34.945 修约成 3 位则为 34.9(拟舍弃的数字为 45,最左一位为 4)。

(2) 拟舍弃的数字最左一位大小 5 时(包括等于 5 而其还有非“0”的数字)则进 1,即保留的末位数再加 1。如 34.965 修约成 3 位则为 35.0(不能写成 35)。

(3) 拟舍弃的数字最左一位恰好等于 5(其后没有数字或皆为“0”),则看“5”前面的数字:为奇数时去 5 进 1,为偶数时去 5 不进,即使数据的末位数总是偶数。如 573.5 及 74 650 两数,都修约成 3 位则分别为 574 和 746×10^2 。

工程上对近似数右边带有若干个“0”的数字,常写成 $a \times 10^n$ 形式($1 \leq a < 10$),这时有效位数由 a 确定,如 2.40×10^3 和 2.4×10^3 分别表示为有 3 位和 2 位有效数字,二者的精度是不同的。

三、数据运算规则

数据的运算误差有大有小,符号有正有负,因而在运算过程中,就必然要相互抵消一部分。在实际运算中,为了保证最后结果有尽可能高的精度,应遵循下述规则:

(1) 多个近似数(不超过 10 个)作加、减运算时,小数位数较多的近似数,只需比小数位数最少的近似数多保留一位。而计算结果的小数位数,应与小数位数最少的那个近似数相同。例如:

$$\begin{aligned} & 1\,425.4 + 343.1 + 11.243 + 9.742\,7 \\ & \approx 1\,425.4 + 343.1 + 11.24 + 9.74 \\ & = 1\,789.48 \approx 1\,789.5 \end{aligned}$$

(2) 若参加运算的各数属同一数量级,且第一位数的大小相差较大时,为避免第一位数小的那个数的相对误差过大,可将其有效位数多保留一位。

(3) 两个近似数作乘、除运算时,有效位数较多的近似数,比有效位数少的多保留一位,计算结果应保留与有效位数少的那个相同的有效位数。例如:

$$3.142 \times 2.4 \approx 3.14 \times 2.4 = 7.536 \approx 7.5$$

(4) 在近似数作乘方或开方运算时,计算结果的有效位数与原来近似数(被乘方或开方数)的有效位数相同。乘方与开方实质上是乘、除运算,故这实际上是采用乘、除运算规则。

(5) 在三角函数的运算中,函数值的位数应随角度误差的减小而增多,当角度误差为 $10''$, $1''$, $0.1''$ 及 $0.01''$ 时,对应的函数值位数应为 5, 6, 7 及 8 位。

(6) 作对数运算时, n 位有效数字的数据应该用 n 位或 $(n+1)$ 位对数表。

(7) 如运算所得的数据还要进行再运算,则该数据的有效位数可比应截取的位数暂时多保留一位数字。

(8) 表示误差范围的参数,如测量不确定度、标准差等(均见后述),其有效位数一般为一位,最多为两位。