高等院校选用教材（工科类）

大学物理学

华南理工大学

邓法金　主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书是工科大学生的物理学教材，主要包括力学、热学、机械振动与机械波、光学基础、电磁学和近代物理学基础六篇. 其中第六篇包括狭义相对论、广义相对论简介、波粒二象性、原子的量子理论. 本书练习有特色、题量较大，包括概念思考题、课堂讨论题、基本习题、小论文练习等. 着重培养学生解决问题的能力.

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学/邓法金主编. －北京：科学出版社，2001. 2
高等院校选用教材（工科类）
ISBN 7-03-008869-7

Ⅰ. 大… Ⅱ. 邓… Ⅲ. 物理学-高等学校-教材 Ⅳ. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 51970 号

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2001 年 2 月第 一 版　　开本：710×1000　1/16
2001 年 2 月第一次印刷　　印张：47 1/2
印数：1—5 000　　字数：862 000

定价：49.00 元

前　言

步入21世纪，对大学生应加强能力与素质的培养，能力培养应贯穿在各个教学环节中，为此，我们编写了大学物理系列教材．系列教材之一《大学物理学》、系列教材之二《大学物理解题指导》、系列教材之三《大学物理教学科研论文汇编》*．

《大学物理学》这门课程，是培养和提高学生科学素质、科学思维方法和科学研究能力的重要基础课．而学生主要是通过做练习来达到如上目标的，故本书特别注意对练习的编写．本书的练习分两大部分．第一部分概念题，分：1．思考题；2．选择、填空题；3．课堂讨论题．第二部分习题，分：1．基本题；2．提高题；3．小论文写作练习题．以上题目均经精选，且每道题由《大学物理解题指导》一书作出提示和启发性的解答．

为了响应21世纪光子产业的兴起，本书在光学部分增添了信息光学基础的内容；为了适应信息时代的需求，在热学部分加强了熵概念的学习；为了便于教、利于学，本书的编写力求做到简明扼要．

在现有的讲授时数（120学时）内，授课内容宜作如下的安排：第一学期，力学、热学、振动与波、光学、相对论；第二学期，电磁学、近代物理．实践表明，如上安排是切实可行的．

参加本书编写的有（按授课顺序排名）：李绍新（力学、热学）、叶英模（力学、小论文选题）、罗仁俊（振动与波、光学）、汪红翎（电磁学）、李仁英（近代物理）、邓法金（练习）、王晓伍（参加了部分思考题的选编）．

编　者

2000年11月于广州华南理工大学

---

* 本书主要目的是：1．激发学生学习物理的兴趣；2．克服教学难点；3．介绍与大学物理内容相关的新科技．为了保证该书的高质量，将面向各兄弟院校征选最优秀的论文成书（该书尚处在选编阶段）．

第一篇　经典力学

物换星移，日月如梭．宇宙中万物都在不停地变化着，运动着．在各种形态的物质运动中，最简单最普遍的一种形式是物体位置的变动．**宏观物体之间（或物体内各部分之间）相对位置的变化称为机械运动**．

力学研究的是机械运动．经典力学研究的是在弱引力场中宏观物体的低速运动．经典力学包含运动学、动力学和静力学．运动学是描写物体的运动量随时间的变化关系，动力学则研究物体运动状态的改变与物体间相互作用的内在联系，静力学研究物体在相互作用下的平衡问题．

经典力学成为一门科学理论是从 17 世纪伽利略应用科学推理方法开始，经牛顿等人进行完善．它曾被尊为最完美、最普遍的理论．但在 20 世纪初，人们发现了经典力学的局限性，在高速运动领域创立了**相对论力学**，在微观领域创建了**量子力学**．即便如此，这丝毫没有减弱经典力学的重要性，在许多技术领域（如土木建筑、机械制造、交通等），甚至在一些高新科技领域（如航空航天），经典力学仍保持着充沛的活力而起着基础理论的作用．

特别值得指出的是，近几十年来，经典力学的世界观受到了来自内部的巨大冲击，那就是**混沌运动**问题．混沌是在决定性动力学系统中出现的一种貌似随机的运动．在某些非线性系统中，系统对初值的依赖极端敏感．两次只是初值有微小差别的混沌运动，它们的差别随时间推移越来越大，混沌运动具有某种程度的不可预测性．本教材将在适当的地方介绍混沌运动．

本篇主要讲述经典力学的基础，主要包括质点（质点系）力学、刚体力学．本篇讲述顺序与传统教材有较大改变，传统力学教材是以牛顿三定律为核心展开，并把质量和力作为动力学中最基本的概念，从而导出有关的守恒定律，这基本是遵循历史发展的顺序依次讲授．然而从现代物理的高度来看，动量、能量、角动量的概念比力的概念要基本得多．本教材将以动量守恒、能量守恒、角动量守恒等为核心展开，突出三大守恒定律的地位和作用．

第一章　质点运动学

运动在日常生活中处处可见.古诗"千里江陵一日还"中的"千里",是路程(距离)的概念,"一日"是时间的概念,全句意思是激流飞舟,是速度的概念.至于"飞流直下三千尺"是否含有加速度的概念就不得而知了.下面我们对描写运动的物理量进行严格的定义.

§1-1　质点　参考系和坐标系　时间

在物理学中,为了突出研究对象或物理过程的主要性质,忽略一些次要因素,经常引入一些**理想模型**或理想过程代替实际的物体或物理过程.**质点**就是一个理想化的模型.如果在研究物体的过程中,物体的形状、大小可以不考虑,我们就可以把该物体看作是具有一定质量的点——质点.

一个物体运动总是相对于其它选定的参考物体而言的,**这些作为研究物体运动时所参照的物体(或物体系)称为参考系**.例如,研究交通车辆的运动,选用固定在地面上的一些物体(如车站、路碑)作为参考系,我们称为**地面参考系**.在物理实验中,如选用固定于实验室的物体作为参考系,则称其为**实验室参考系**.

运动是物质的根本属性,但物体的运动在不同的参考系中会表现为不同的形式.例如,在以均匀速度运动的火车车厢的天花板上悬挂一个小球,将悬线剪断,火车上的乘客看到小球沿直线自由下落,但月台上的人却看到小球作平抛运动.这是因为乘客选火车为参考系而月台上的人选用地面参考系.这种现象称为运动的相对性.因而,我们描写物体运动时,必须标明所用的参考系.

为了定量地描写物体相对于参考系的位置,还需要在参考系上建立固定的**坐标系**,最常用的坐标系是**直角坐标系**.为了分析问题方便起见,还可采用**球坐标系**、**极坐标系**、**自然坐标系**等.

日常生活中的时间有两种意义,一是指某一瞬间,**即时刻**,用 t 表示,二是指一段**时间间隔**,用 Δt 表示,或者用该时间间隔终点时刻 t_2 与初点时刻 t_1 之差 t_2-t_1 来表示.

§1-2　位置矢量　位移　速度

一、位置矢量

位置矢量是定量描写质点某一时刻所在空间位置的物理量. 任意时刻 t, 质点 P 的位置可用直角坐标(x,y,z)来确定. 显然, x、y、z 是时间 t 的函数, 即

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1-1}$$

这样的一组函数称为质点的**运动学方程(标量式)**或**运动函数**.

质点 P 的位置也可以用矢量更清楚简洁地表示出来. 我们从原点向 P 点作一有向线段$\overrightarrow{OP}$, 并记作为矢量 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}$ 称为质点 P 的**位置矢量**, 简称**位矢**. 质点运动时, 它的位矢是随时间变化的, 即 $\boldsymbol{r}$ 也是 t 的函数.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-2}$$

上式称为质点的**运动学方程(矢量式)**.

质点运动学方程的标量式(1-1)与矢量式(1-2)是等价的. 根据空间几何的知识, 位矢可以用它在坐标轴上的分量表示. 以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示 x、y、z 轴方向上的单位矢量(见图 1-1), 则可以把 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

这样位矢的大小(即 $\boldsymbol{r}$ 的模)为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1-4}$$

位矢与各坐标轴 x、y、z 的夹角 α、β、γ 表示位矢的方向, 它可用余弦函

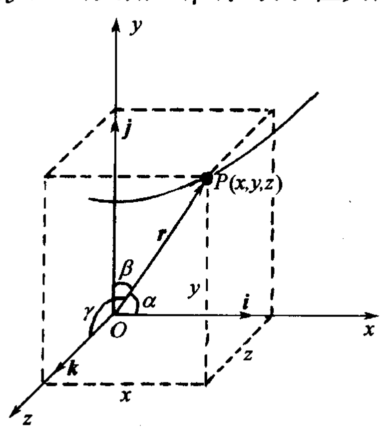

图 1-1　位置矢量

数确定：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \cos\beta = \frac{y}{r},\quad \cos\gamma = \frac{z}{r} \tag{1-5}$$

质点在空间连续经过的各点连成的曲线称为质点运动的轨迹．表示质点运动轨迹的方程称为**轨迹方程**．如果质点限制在 xy 平面内运动，在方程(1-1)式中消去参数 t，得到 y 与 x 的函数，即

$$y = y(x) \tag{1-6}$$

这就是质点的轨迹方程．

二、位移

质点在一段时间内的位矢的增量(我们规定**增量是末量减去初量**)称为它在该段时间内的**位移**，它也是一个矢量．如图 1-2 所示，时刻 t 时，质点位于 A 点，其位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，在 $t+\Delta t$ 时刻，质点位于 B 点，其位矢为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$，则质点在 Δt 时间内的位移用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示，即

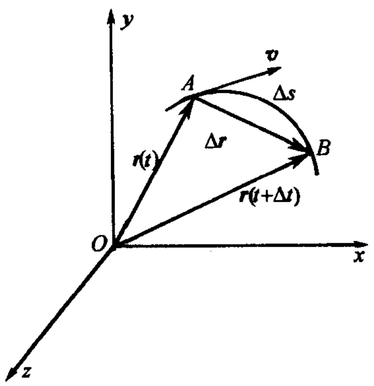

图 1-2　位移与速度

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \tag{1-7}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 是由 A 点指向 B 点的矢量，在直角坐标系中

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= x(t+\Delta t) - x(t) \\ \Delta y &= y(t+\Delta t) - y(t) \\ \Delta z &= z(t+\Delta t) - z(t) \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

位移的大小(即位移的模)为 $|\Delta\boldsymbol{r}|$，在图(1-2)中为 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的长度 $\overline{AB}$．

三、速度

质点位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与时间间隔 Δt 的比值称为质点在这段时间内的**平均速度**，以 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-10}$$

平均速度 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 也是矢量，它的方向就是位移的方向．

当 $\Delta t \to 0$ 时，(1-10)式的极限值，称为质点在时刻 t(A 点)的**瞬时速度**，简称**速度**，用 $\boldsymbol{v}$ 表示，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

即速度是位矢对时间的导数.速度是矢量,其方向就是 Δt 趋近于零时 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向,在图(1-2)中,$\boldsymbol{v}$ 的方向即为质点运动轨迹在 A 点的切线方向.速度的大小称为速率①,用 v 表示,则

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \tag{1-12}$$

用 Δs 表示质点在 Δt 时间内经过的路程,即图(1-2)中 AB 弧长.当 Δt 趋于零时,$|\Delta \boldsymbol{r}|$ 和 Δs 趋于相同,因而

$$v = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-13}$$

即质点的速率等于质点所走过的路程对时间的变化率.

将(1-3)式代入(1-11)式,由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为常矢量,可得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1-14}$$

式中 v_x、v_y、v_z 分别称为速度在 x、y、z 轴方向的分量,它们都是代数量,且

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1-15}$$

这样,$\boldsymbol{v}$ 的大小(即速率 v)可表示为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1-16}$$

在国际单位制(SI 制)中,速度的单位是米/秒(m/s).

表 1-1 给出一些实际速率的数值

表 1-1　某些速率　(m/s)

光在真空中	$2.997\,924\,58 \times 10^8$
北京正负电子对撞机中的电子	99.999 998% 光速
原子中电子绕核运动	约 10^6
太阳绕银河系中心的运动	3.0×10^5
地球公转	3.0×10^4
人造地球卫星	7.9×10^3
现代歼击机(最大)	约 9×10^2
步枪子弹离开枪口时	约 7×10^2
地球赤道上一点自转速率	4.6×10^2

① 日常生活中,经常将速率称为速度.

空气分子热运动的平均速率(0℃)	4.5×10^{2}
空气中的声速(0℃)	3.3×10^{2}
机动赛车(最大)	1.0×10^{2}
猎豹	2.8×10
人百米跑世界纪录	1.205×10
大陆板块移动	约 10^{-9}

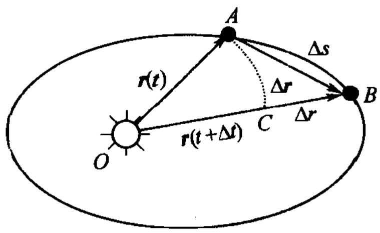

图 1-3　Δs、$|\Delta \boldsymbol{r}|$、Δr 的区别

必须指出，位移矢量 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 不能写成 Δr，我们定义 $\Delta r = r(t+\Delta t)-r(t)$，它是位矢的模的增量. 因而一般来讲，$v\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. 如图 1-3 所示，地球绕太阳作椭圆运动，$t$ 时刻位于 A 点，$t+\Delta t$ 时刻运动至 B 点，则 $\overset{\frown}{AB}$（上标表弧线）为路程 Δs，$\overline{AB}$（上标表直线）为位移大小，而以太阳为圆心，以 $|\boldsymbol{r}(t)|$ 为半径画圆弧交 OB 于 C 点，则 CB 为位矢模的增量 Δr. 在图(1-3)中，$\Delta s>|\Delta \boldsymbol{r}|>\Delta r$.

§1-3　加速度

一、加速度

当质点运动速度随时间改变时，我们用加速度描写速度的变化情况. 设时刻 t 和时刻 $t+\Delta t$ 的速度分别是 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$（图 1-4），速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$，则 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与这段时间间隔 Δt 的比值 $\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 称为**平均加速度**，记为 $\bar{\boldsymbol{a}}$，即

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}\qquad(1\text{-}17)$$

当 $\Delta t\to0$ 时，平均加速度的极限值称为 t 时刻（A 点）的**瞬时加速度**，简称**加速度**，以 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\qquad(1\text{-}18)$$

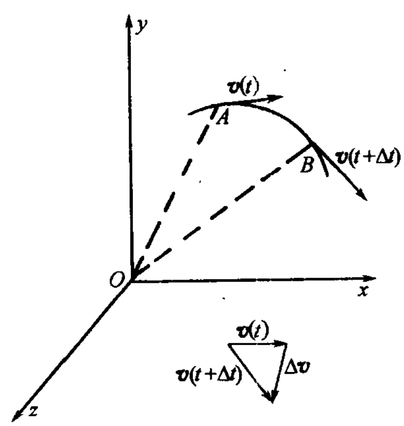

图 1-4　加速度矢量

由于加速度是速度对时间的变化率，因而速度的大小或方向的改变都有加速度. 利用(1-11)式，加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-19}$$

从上两式可以看出，加速度是速度对时间的一阶导数，也是位矢对时间的二阶导数.

由(1-18)式及(1-14)式可得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1-20}$$

$\boldsymbol{a}$ 可以用分量表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-21}$$

比较(1-20)和(1-21)两式，可得加速度 3 个分量表达式是

$$\begin{cases}a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\[2ex] a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\[2ex] a_z=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\end{cases} \tag{1-22}$$

加速度大小是

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1-23}$$

在国际单位制中，加速度单位是 米/秒^2(m/s^2)，表 1-2 给出了一些实际加速度的数值.

表 1-2　某些加速度值　(m/s^2)

超速离心机中的粒子的加速度	3×10^6
步枪子弹在枪膛中的加速度	约 5×10^5
使汽车撞坏(27m/s 撞到一般建筑物上)的加速度	约 1×10^3
使人发晕的加速度	约 7×10
地球表面的重力加速度	9.8
汽车急刹时的加速度	约 8
月球表面的重力加速度	1.7
由于地球自转赤道上一点的加速度	3.4×10^{-2}
地球公转的加速度	6×10^{-3}
太阳绕银河系中心转动的加速度	约 3×10^{-10}

例 1-1　已知质点在 xy 平面内运动，其运动方程是 $x=R\cos\omega t$，$y=$

$R\sin\omega t$. 式中 R、ω 均为正值常量. 求(1)质点的轨迹方程;(2)质点在任意时刻位矢、速度和加速度;(3)质点在 $t_1=0$ 到 $t_2=\frac{3\pi}{2\omega}$ 时间内的位移.

解 (1)由 x,y 表达式消去 t,得质点轨迹方程

$$x^2+y^2=R^2 \tag{a}$$

这是一个圆的方程(图 1-5)

(2)任意时刻质点位矢为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

任意时刻质点速度为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j} \tag{b}$$

速度大小为 $v=|\boldsymbol{v}|=R\omega$ 为常量,说明质点作匀速率圆周运动.

任意时刻质点加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i} - R\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j} \tag{c}$$

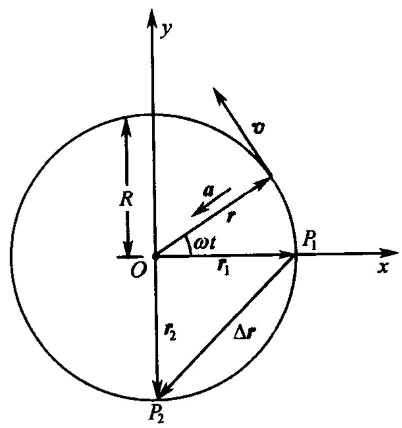

图 1-5 例 1-1 图

很容易得出 $\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}=0$,说明加速度 $\boldsymbol{a}$ 方向与 $\boldsymbol{r}$ 方向相反,且指向圆心. 速度 $\boldsymbol{v}$ 方向与 $\boldsymbol{r}$ 方向垂直.

(3)当 $t_1=0$ 时,$\boldsymbol{r}_1=R\boldsymbol{i}$;当 $t_2=\frac{3\pi}{2\omega}$ 时,$\boldsymbol{r}_2=-R\boldsymbol{j}$,可得位移

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = -R\boldsymbol{i} - R\boldsymbol{j} \tag{d}$$

在图 1-5 中,$\Delta\boldsymbol{r}$ 由 P_1 指向 P_2.

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小为 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{2}R$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 与 x 轴夹角 α 满足

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-R}{-R} = 1$$

由于 $\Delta y=-R<0$,$\Delta x=-R<0$,可得 $\alpha=\frac{5}{4}\pi$.

二、切向加速度与法向加速度

在质点的轨道已知的情况下,质点的位置可用从轨道曲线上某个选定的原点 O 算起的曲线长度 s 来表示,s 称路程. 如质点作平面曲线运动(图 1-6),其速度方向沿轨道切线方向. 轨道上任意一点 p 的切线 $\boldsymbol{\tau}$ 和法线 $\boldsymbol{n}$ 构成的坐标系称**自然坐标系**,这里 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$ **分别代表切线和法线方向的单位矢**

量，并且 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$ 方向随质点所在位置不同而改变.

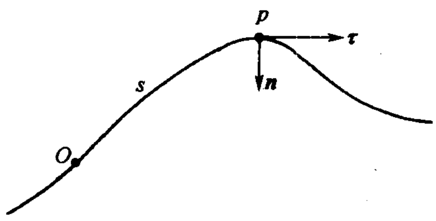

图 1-6　自然坐标系

自然坐标系中质点的速度可写为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau} \qquad (1\text{-}24)$$

这里 v 是质点速率，且 $v\geqslant 0$，这样质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \qquad (1\text{-}25)$$

上式右边第一项的大小为速率随时间的变化率，方向沿切线方向，称为**切向加速度**，以 $\boldsymbol{a}_\tau$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau} \qquad (1\text{-}26)$$

(1-25)右边第二项，是切线方向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 随时间的变化率与速率的乘积. 我们设质点在 p 点作半径为 ρ 的圆周运动(由于曲线是由一系列不同半径的小圆弧组成的，因而对一般曲线运动，总可以看成是一系列不同半径的圆周运动)，在 p 点切向单位矢量是 $\boldsymbol{\tau}_1$，在 p' 点切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}_2$，则 $\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_2-\boldsymbol{\tau}_1$. 如图 1-7，由于 $|\boldsymbol{\tau}|=1$，$\Delta\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{\tau}_1$、$\boldsymbol{\tau}_2$ 组成一个等腰三角形. $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的大小 $|\Delta\boldsymbol{\tau}|=|\boldsymbol{\tau}\Delta\theta|=\Delta\theta$，当 p' 趋近于 p 点时，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的方向趋近于与 $\boldsymbol{\tau}_1$ 垂直，即为 $\boldsymbol{n}$ 的方向，因而 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\mathrm{d}\theta\boldsymbol{n}=\frac{\mathrm{d}s}{\rho}\boldsymbol{n}$. 代入(1-25)式中右边第二项，得

$$v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}s\boldsymbol{n}}{\rho\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \qquad (1\text{-}27)$$

上式表明，(1-25)式中右边第二项大小为 $\frac{v^2}{\rho}$，方向为法线方向，故称为**法向加速度**，用 $\boldsymbol{a}_n$ 表示.

这样，在自然坐标系中，加速度 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} \qquad (1\text{-}28)$$

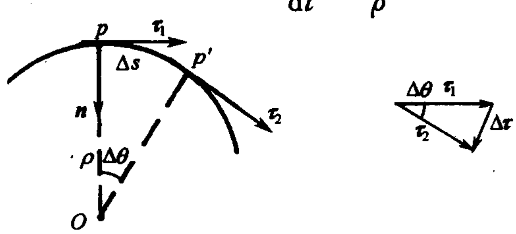

图 1-7

切向加速度的大小$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$反映速率随时间的变化率，是一代数量. 法向加速度值$\frac{v^2}{\rho}\geqslant 0$，反映了速度方向随时间的变化率. $\frac{v^2}{\rho}=0$ 发生在质点速率 $v=0$ 或 $\rho=\infty$（直线运动）的情况下.

这样，加速度的大小可表示为

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{1-29}$$

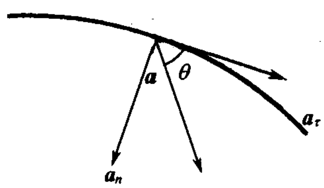

图 1-8　加速度方向

加速度方向与切向的夹角 θ 满足（图 1-8）

$$\tan\theta=\frac{a_n}{a_\tau} \tag{1.30}$$

例 1-2　汽车在半径 $R=300$ m 的轨道上加速运动，其加速过程中路程与时间的关系是 $s=5t^2-0.1t^3$(m)，求 $t=1$ s 时，汽车的加速度大小.

解　把汽车看成质点，任意时刻其速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=(10t-0.3t^2)(\mathrm{m/s})$$

其切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(10-0.6t)(\mathrm{m/s^2})$$

因而加速度为

$$\boldsymbol{a}=\left[(10-0.6t)\boldsymbol{\tau}+\frac{(10t-0.3t^2)^2}{R}\boldsymbol{n}\right](\mathrm{m/s^2})$$

当 $t=1$ s 时

$$\boldsymbol{a}=(9.4\boldsymbol{\tau}+0.314\boldsymbol{n})(\mathrm{m/s^2})$$

其大小为

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=9.41(\mathrm{m/s^2})$$

三、圆周运动中的角量和线量

圆周运动是一般曲线运动的特例，其特点是曲线上各处曲率半径相同. 如图 1-9 所示，设质点作圆周运动的半径为 R，以 θ 表示从 Ox 开始转动的角度，θ 称为**角位置**，θ 角对应的弧长

$$s=\theta R$$

根据(1-13)式,质点的速率(称为线速度)为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

式中$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$称质点运动的**角速度**①,用 ω 表示. 在国际单位制中单位是弧度/秒或1/秒(rad/s 或 1/s). 这样

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-31}$$

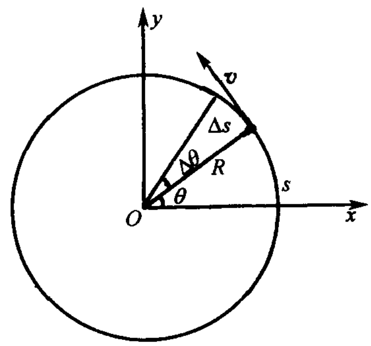

图 1-9　角量与线量

这样,质点的线速度 v 与角速度的关系是:

$$v=R\omega \tag{1-32}$$

质点角速度对时间变化率称**角加速度**,用 β 表示,即

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-33}$$

在国际单位制中,角加速度的单位是弧度/秒^2 或 1/秒^2(rad/s^2 或 1/s^2),角加速度也是一个矢量,其方向为角速度增量的方向.

这样,质点作圆周运动时切向加速度和法向加速度分别为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\omega)=R\beta \tag{1-34}$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \tag{1-35}$$

容易推出,对角加速度为常量,可以得出

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\omega_0+\beta t\\ \theta&=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2\\ \omega^2&=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)\end{aligned}\right\} \tag{1-36}$$

式中,ω_0、θ_0 分别表示 $t=0$ 时的角速度和角位置.

---

① 理论证明,角速度也是一个矢量. 其方向垂直于质点转动所在的平面,由右手螺旋决定. 让右手握着转动轴,四指与质点运动方向一致,则大拇指表示角速度的方向. 在图(1-9)中,角速度方向垂直纸面向外. 如果质点顺时针旋转,则角速度方向垂直纸面向内. 由于角速度只有两个方向,向外或向内,因而可当作标量处理. 若取图 1-9 向外为转轴正向,则 ω 向外为正,向内为负.

§1-4 质点运动学中两类基本问题

运动学要解决两类基本问题，一类是已知质点的运动方程，求质点任意时刻的速度和加速度；另一类是已知质点的加速度和初值条件（即 t 为某个值时质点的速度和位置），求质点在任意时刻的速度和运动学方程. 前者使用的数学手段是求导，后者则需要积分. 即

$$\boldsymbol{r} \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{v} \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{a}$$

一、第一类基本问题

例 1-3 如图1-10，在离水平高度为 h 的岸边，绞车以匀速率 v_0 收绳拉船，求船离岸边 x 远处的速度.

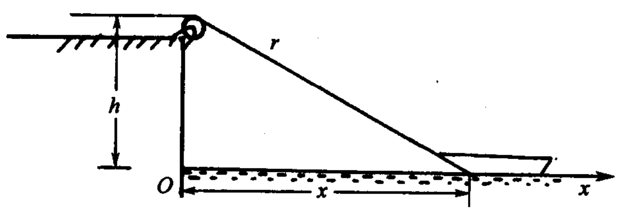

图 1-10

解 建立坐标系 Ox，由图 1-10 可知绳长 r 与 x 的关系是

$$x=(r^2-h^2)^{1/2}$$

故船速为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{r}{\sqrt{r^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

由于绳随时间变短，且绳长对时间变化率$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$的大小为$v_0$，所以$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v_0$，于是有

$$v_x=-\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0$$

式中负号表示船速度方向与 x 轴方向相反. 或者写成

$$\boldsymbol{v}=-\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0\boldsymbol{i}$$

进一步我们可以求出船的加速度 $a_x = -\dfrac{v_0^2 h^2}{x^3}$（请读者证明）.

注意，本题中船的位置 x 是时间的隐函数，但这并不妨碍我们求它的速度.

下面讨论第二类基本问题.

二、匀加速运动 抛体运动

如果质点加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向都不随时间改变，我们称为**匀加速运动**. 设 $t=0$ 时，质点速度为 $\boldsymbol{v}_0$，位矢为 $\boldsymbol{r}_0$，由于 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$，积分可得

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t$$

即

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t \tag{1-37}$$

又由于 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$，则

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \int_0^t (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t)\mathrm{d}t$$

即

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \tag{1-38}$$

例 1-4 抛体运动. 如图(1-11)，设 $t=0$ 时，以速度 $\boldsymbol{v}_0$、仰角 θ（速度方向与水平方向夹角）抛出一物体，忽略空气阻力及风的作用，物体将在由速度方向和铅垂线所确定的平面内运动，它在各个时刻的加速度都是重力加速度 g，求质点运动方程.

解 建立如图(1-11)所示坐标系，则质点加速度

$$\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$$

这是一个匀加速运动，且 $t=0$ 时，$\boldsymbol{v}_0 = v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + v_0\sin\theta\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}_0 = 0$，由(1-37)式和(1-38)式，得

$$\boldsymbol{v} = v_0\cos\theta\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta - gt)\boldsymbol{j} \tag{1-39}$$

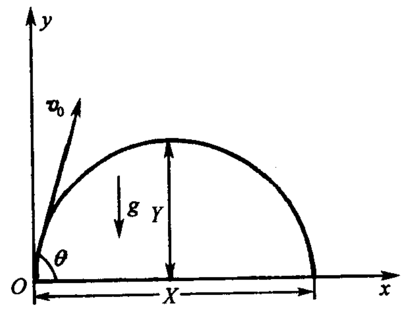

图 1-11 抛体运动

$$\boldsymbol{r} = v_0\cos\theta t\boldsymbol{i} + (v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2)\boldsymbol{j} \tag{1-40}$$

即

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta t \\ y = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1-41}$$

这样,我们可以求出抛体的轨道方程

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\theta} \tag{1-42}$$

这是一条通过原点的二次曲线,这也是数学中称该曲线为抛物线的原因.进一步,我们可以求出质点飞行的最大高度(该点 y 方向速度 v_y 为零)为

$$Y = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \tag{1-43}$$

质点落到与抛出点同样高度所通过的水平距离(该点 $y=0$)称为射程 X,则

$$X = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \tag{1-44}$$

上式表明,当初速度大小一定时,在仰角 θ 等于 45°的情况下射程最大.

应当指出,由于空气阻力等因素的影响,实际物体在空中飞行的规律与上述公式有较大差别.例如以 550 m/s 初速沿 45°仰角射出的子弹,按上述公式计算,射程在 30 km,但实际射程不过 8 km 多一些.至于足球、排球在空中飞行,由于球的旋转,空气的作用还可能使它的轨道发生侧向弯曲.

三、直线运动

质点作直线运动,我们只需用位矢、速度、加速度在 x 轴方向的分量 x、v_x、a_x 来描写,并略去下标 x.即用 x、v、a 描写其运动.**这里 x、v、a 都是代数量**,且 $v=\frac{dx}{dt}$,$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$.设初始条件为:$t=0$ 时,$v=v_0$,$x=x_0$.下面我们分别对不同情况进行讨论

1. $a=a(t)$,即加速度 a 是时间 t 的函数.由 $a(t)=\frac{dv}{dt}$,得 $dv = a(t)dt$,积分得

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a(t)dt \tag{1-45}$$

2. $a=a(v)$,即加速度 a 是速度 v 的函数,由 $a(v)=\frac{dv}{dt}$,分离变量,有