公理学、元数学与哲学

张 家 龙 著

上 海 人 民 出 版 社

责任编辑　　刘鸿钧
封面装帧　　许明耀

公理学、元数学与哲学

张家龙著

上海人民出版社出版
（上海绍兴路54号）

新华书店上海发行所发行　上海颛桥印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张4.125　字数79,000
1983年3月第1版　1983年3月第1次印刷
印数 1 18,000

书号 2074·412　　定价（六）0.34元

目　　录

第 1 章

公理学的发展

1.1 概　述

所谓公理学，是指公理方法或公理系统。什么叫公理方法或公理系统呢？我们知道，每一科学理论包括一组概念和一组真的命题。当对某一概念的涵义有疑问时，我们就通过另外一些概念来定义它。同样，当对某一命题的真实性有疑问时，我们就从其它一些已知为真的命题根据演绎推理的规则把它推演出来，这就是所谓的证明。在一个理论中，是不是一切概念都要下定义，一切命题都要进行证明呢？显然不是！否则，定义和证明就没有出发点，就会发生“恶性循环”。在一个理论中，我们总要选出少数不定义的概念和不证的命题作为出发点。这些不定义的概念，称为初始概念；由初始概念下定义的概念，称为被定义概念。不证的命题，称为初始命题或公理；从公理推演出来的命题，称为定理。公理方法就是从初

始概念和公理出发，然后从它们定义其它一切概念以及推演出其它一切定理的演绎方法。由初始概念、公理、定义、推理规则、定理等所构成的演绎体系，称为公理系统。因此，公理方法和公理系统是属于同一系列的概念，公理系统只不过是应用公理方法的结果。我们在使用公理学这一概念时，兼指公理方法和公理系统。

公理学所研究的对象、性质和关系，称为它的“论域”，这些对象、性质和关系由初始概念来表示。例如，欧几里得几何，只需要取“点”、“直线”、“平面”、“在…之上”、“在…之间”、“叠合”作为初始概念就够了，前三个概念所表示的三类对象和后三个概念所表示的三种关系就是这种几何的论域。按照“一个公理系统只有一个论域”的观点建立起来的公理学，称为实质公理学。具体地说，实质公理学的论域必须先于公理而具体给定，并且是唯一的，然后引入初始概念以表示该论域中的东西，建立公理以刻画这些东西的根本特点，借助演绎推理来证明该论域中的真理。这种公理学是对经验知识的系统整理，公理一般具有自明性。欧几里得几何、皮亚诺自然数算术和牛顿力学都是实质公理学。与实质公理学相区别，形式公理学不预先给定任何论域，初始概念在引入公理之先是不加定义的，公理可以看成是初始概念的定义(称为“隐定义”)，对初始概念经过不同的解释，一个形式公理系统可以有许多论域。例如，大家熟知的布尔代数(逻辑代数)的公理系统就是形式公理系统，它的论域在一种解释下是类，在另一种解释下是命题，也可以解释为电路上的接点。

从公元前三世纪欧几里得的《几何原本》到1899年希尔伯特的《几何基础》，经历了大约两千三百年。这是一个从实质公理学发展成为形式公理学的过程。在形式公理学发展的基础上，希尔伯特建立了以形式系统为研究对象的元数学，把公理学的研究推进到一个崭新的阶段。在1931年以后，哥德尔等人发展了元数学，得到了关于形式系统的内在局限性的一些重要成果，使公理学和元数学获得空前的发展。

本章从历史的角度论述公理学发展的几个阶段和元数学的建立。

1.2 第一阶段—实质公理学：《几何原本》

公理方法是从数学（主要是几何学）和逻辑学的发展中产生的。

数学发展史告诉我们，“数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。”①在几千年前，人们在进行简单交易、计算田地面积时，在陶器上画几何图案、在布上织花格、记时等方面就已经开始应用数学。语言中的一些词汇也生动地说明了数学起源于实践。例如，角的概念是从观察到人的大小腿（股）或上下臂之间形成的角而产生的，在英文中直角三角形的两边叫两臂，在中文中

① 恩格斯：«反杜林论»。«马克思恩格斯选集»第三卷，第77—78页。

直角三角形的一条直角边叫做股；一个具有三度的数学图形叫做体，在拉丁文中是 Corpus solidum，指可以触摸到的物体；"几何学"一词在希腊文中是指测地术。数学就是这样在实践的基础上向前发展的。

在第一个实质公理系统—欧几里得的《几何原本》之前的一段时期，即从公元前 600 年直到公元前 300 年的希腊古典时期，希腊人在社会实践（例如建筑、土地测量和航海等等）的推动下，数学已经取得了重要成果。《几何原本》就是这些成果的结晶。下面我们仅以几何学为例说明这一时期的成就。

爱奥尼亚学派的创始人泰勒斯（Thales，公元前 640 年左右到公元前 546 年左右）曾一度住在埃及进行商务活动，据说在埃及学了不少数学知识。相传他曾用一根已知长度的竿子，通过同时测量竿影和金字塔影之长，求出了金字塔的高度，并利用关于相似三角形的这一类知识计算过航船到海岸的距离。

毕达哥拉斯（Pythagoras）曾就学于泰勒斯，以后到埃及和巴比伦游历，并可能在那里学到一些数学。他所创立的学派活动于公元前 580 年左右至公元前 400 年左右。数学研究抽象概念，这种认识要归功于毕达哥拉斯学派。这一学派开创了把几何学作为证明的演绎科学来进行研究的方向。毕达哥拉斯学派的学者用归谬法证明了正方形的对角线跟其一边，即$\sqrt{2}$与 1 的不可公度，这个证明和现今对$\sqrt{2}$为无理数的证明相同。他们的最出名的成果是毕达哥拉斯定理本身，这是欧几里得几何的一个关键定理。人们认为我们所学的关于

三角形、平行线、多边形、圆、球和正多面体的一些定理也是毕达哥拉斯学派发现的。特别是他们知道三角形三内角之和是180°。关于相似形的一套理论，以及平面可为等边三角形、正方形和正六边形所填满这一事实，都属于毕达哥拉斯学派的研究成果。

著名的原子论哲学家德谟克利特(Democritus，约公元前460—370)，考察了许多数学问题。他写出了关于几何、数、连续的直线和立体的书。他的几何著作很可能是《几何原本》问世以前的重要著作。他发现了圆锥和棱锥的体积等于同底同高的圆柱和棱柱体积的三分之一，后来这一发现成为阿基米得拟定无穷小方法的出发点。

在古典时期，有好些数学结果是为解决三个著名的作图问题而得出的副产品。这三个作图题是：作一正方形使其与给定的圆等面积；给定立方体的一边，求作另一立方体之边，使后者体积两倍于前者体积；以及用尺规三等分任意角。智者派的希比阿(Hippias，生于公元前460年左右)借助于一种特殊的超越曲线(割圆曲线)找到了求解三等分角的问题，只是这种曲线本身也不能用尺规作出。据注释家普罗克洛(Proclus，公元五世纪)说，第一个编写《几何原本》的是公元前五世纪的开奥斯人希波克拉底(Hippocrates of Chios)，此本现已失传。希波克拉底在研究圆求方问题时发现，一个以曲线弧为边的月牙形面积等于一个直边图形的面积；或者说把曲边图形化成了直边图形。希波克拉底还搞出了另外三个月牙形的等积直边形。他还指出倍立方问题可化为在一线段与另

一双倍长的线段之间求两个比例中项的问题。智者派学者安蒂丰(Antiphon，公元前五世纪)在搞化圆为方问题时想起用边数不断增加的内接多边形来接近圆面积。另一个智者派学者布里逊(Bryson，约公元前 450 年)又用外切多边形来丰富这一思想。安蒂丰进一步提出把圆看作是无穷多边的正多边形。

著名哲学家柏拉图（Plato，公元前 427—347）于公元前 387 年左右在雅典成立学园，它在好多方面象现代的大学。在柏拉图学园中，数学这门学科占有重要地位。柏拉图学派把数学当作进入哲学的阶梯，他们非常重视演绎证明。

柏拉图学派研究了棱柱、棱锥、圆柱和圆锥；并且他们知道正多面体最多只有五种。他们的最重要的发现是圆锥曲线。此外，他们还对不可公度量进行了研究，指出怎样用希比阿的割圆曲线来化圆为方。

古典时期最大的数学家欧多克斯(Eudoxus，公元前 408 左右—355)，曾加入过柏拉图学派。他在数学上的第一个大贡献是关于比例的新理论，他在处理不可公度比时，建立了以公理为依据的演绎法。他首先应用了穷竭法，这是确定曲边形面积和曲面体体积的有力方法，是微积分的第一步。欧多克斯用这种方法证明了两个圆面积之比等于其半径平方之比，两球体积之比等于其半径立方之比，棱锥体积是同底同高棱柱体积的三分之一，以及圆锥体积是其相应的圆柱体积的三分之一。

古典时期的最后一位数学家奥托尼克（Autolycus，生活

于公元前310年前后)，在《论运动的球》一书中研究了球面几何。这本书的形式是很有意义的，图上的点是用字母来代表的，命题是按逻辑次序排列的，每个命题先作一般性的陈述，然后再重复，但重复陈述时明确参照附图，到最后给出证明。

在希腊几何学发展的同时，希腊哲学家们为了辩论的实际需要，发展了论辩术。据记载，埃利亚学派的芝诺(公元前五世纪)是论辩术的发明者，他使用归谬法，通过假定存在多推出荒谬结论来为巴门尼德的一元论作辩护。苏格拉底（公元前469年--公元前399年）的问答法也使用了类似芝诺的方法，所不同的是，苏格拉底从假设出发推出的结论并不一定是自相矛盾的，有时可以单纯是假的。柏拉图的《对话录》详尽论述了论辩的方法，诸如归谬法、包含有反驳的论证方法、寻找定义的方法，等等。他在对话的过程中阐明了许多逻辑原理，如矛盾律等。

伟大的学者亚里士多德在《分析篇》中总结、概括了几何学与逻辑学的丰富资料，在历史上第一次对公理方法作了论述。

从现代的观点来看，《分析篇》是关于演绎证明的理论。《前分析篇》的核心是论述如何进行演绎证明的问题。亚里士多德在这里系统地研究了三段论，研究了通过这种推理形式从前提推出结论的逻辑规则。他提出了还原学说，主要使用换位法、归谬法和对当关系，把他的十四个式中的后十二个式还原为第一格AAA和EAE两个式。因此，三段论第一格AAA与EAE就成为三段论整个体系的公理，而整个三段论

体系就成为一个公理系统。

《后分析篇》主要是研究按照演绎证明建立起来的学科本身的逻辑结构与逻辑要求的问题。按照亚里士多德的观点，演绎证明的科学（他指的是数学），是关于某一个确定的领域的全部真命题，这些命题可以区分为两类：一类是基本命题，即公理和公设，公理是一切科学所公有的真理，而公设则只是为某一门科学所接受的第一性原理，他把逻辑原理（如矛盾律、排中律、等量加减等量后结果相等的公理等）都列为公理；另一类是从基本命题推出的命题，即定理。与此相应，在命题中所使用的全部概念也区分为两类，一类是基本概念，另一类是从基本概念派生出来的概念，也就是运用定义由基本概念直接或间接加以规定的概念。总起来看，亚里士多德关于演绎证明的逻辑结构可以简要地表示如下：

$$\text{公理或公设}\xrightarrow{\text{通过逻辑证明}}\text{定理}$$

$$\text{基本概念}\xrightarrow{\text{通过定义}}\text{派生概念}$$

根据这个逻辑结构，亚里士多德提出了两个逻辑要求。第一，公理必须是明显的，因而是无需加以证明的；公设无须是自明的，其是否真实应受所推出结果的检验，但它仍是不加证明而被采用的命题；基本概念必须是直接可以理解的，因而无需加以定义。第二，由公理证明定理时，必须遵守逻辑规律与逻辑规则；同样，通过基本概念以直接或间接方式对派生概念下定义时，必须遵守下定义的逻辑规则。

由上所说，亚里士多德奠定了公理方法的基础。但是，他

在逻辑中并没有系统地应用公理方法，他对逻辑只作了某种程度的公理化。他的真正成就是把逻辑尽量接近于作为典范的数学，并在当时可能的范围内赋予逻辑以数学的形式。在数学发展史上，第一次系统地应用公理方法是欧几里得的《几何原本》。

《几何原本》中材料的主要来源一般都能查到。欧几里得曾在柏拉图学园学习，他的大部分材料无疑得自柏拉图学派。据注释家普罗克洛说，欧几里得把欧多克斯的许多定理收入《几何原本》中，完善了柏拉图派学者关于正多面体最多只有五种的定理，并对前人只有不严格证明的结果作出无懈可击的论证。欧几里得陈述证明的形式，在上述奥托尼克的《论运动的球》一书里已可看出。他采用了亚里士多德把公理和公设区别开来的说法，采纳了亚里士多德的一些定义、公理和定理，等等。尽管欧几里得从前人书里取用了许多材料，但他不失为大数学家，从《几何原本》的逻辑次序来看，对公理的选择，把定理排列起来以及一些定理的证明，都是欧几里得作出的，著名的平行公设也是他提出的。总之，《几何原本》一书把亚里士多德初步总结出来的公理方法应用于数学，特别是几何学，整理、总结和发展了希腊古典时期的大量数学知识，在数学发展史上树立了一座不朽的丰碑。这本书标志着公理学的产生，是实质公理学的典范。

《几何原本》共十三卷，内容包括直边形和圆的性质、比例论、相似形、数论、不可公度量的分类、立体几何和穷竭法等。

下面我们看一看《几何原本》的定义和公理。

第一卷开始就列出了书中第一部分所用概念的23个定义，其中最重要的有：

1. 点是没有部分的那种东西。

2. 线是没有宽度的长度。

线这个字指曲线。

3. 一线的两端是点。

这定义明确指出一线或一曲线总是有限长度的。《几何原本》里没有伸展到无穷远的一根曲线。

4. 直线是同其中各点看齐的线。

与定义3的精神一致，欧几里得的直线是我们所说的线段。

5. 面是只有长度和宽度的那种东西。

6. 面的边缘是线。

所以面也是有界的图形。

7. 平面是与其上直线看齐的那种面。

15. 圆是包含在一(曲)线里的那种平面图形，使其从其内某一点连到该线的所有直线都彼此相等。

16. 于是那个点便叫圆的中心(简称圆心)。

17. 圆的一直径是通过圆心且两端终于圆周的任一直线，而且这样的直线也把圆平分。

23. 平行直线是这样的一些直线，它们在同一平面内，而且往两个方向无限延长后在两个方向上都不会相交。

公设(只应用于几何)如下：

1. 从任一点到任一点作直线〔是可能的〕。

2. 把有限直线不断循直线延长〔是可能的〕。

3. 以任一点为中心和任一距离〔为半径〕作一圆〔是可能的〕。

4. 所有直角彼此相等。

5. (平行公设)若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

公理有：

1. 跟同一件东西相等的一些东西，它们彼此也是相等的。

2. 等量加等量，总量仍相等。

3. 等量减等量，余量仍相等。

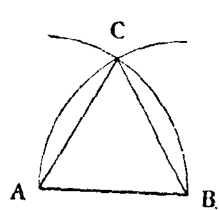
4. 彼此重合的东西是相等的。

5. 整体大于部分。

下面我们举几个定理：

命题 1. 在给定直线上作一等边三角形。

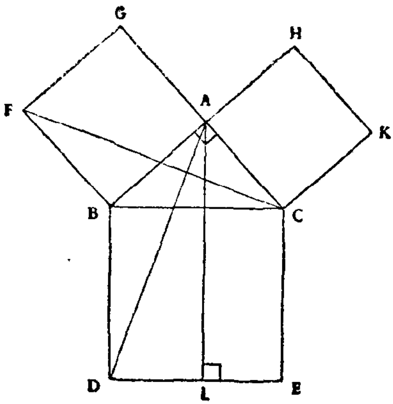
以 A 为中心，以 AB 为半径作圆。以 B 为中心，以 BA 为半径作圆。设 C 是一个交点，ΔABC 便是所求的三角形。



命题 4. 若两个三角形的两边和夹角对应相等，它们就全等。

证法是把一个三角形放到另一个三角形上，指明它们必然重合。

命题 47. 直角三角形斜边上的正方形等于两直角边上的两个正方形之和。



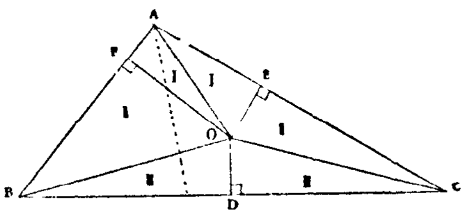
这就是毕达哥拉斯定理(勾股定理)。证明是用面积来做的。我们证出$\triangle ABD \cong \triangle FBC$,矩形$BL=2\triangle ABD$,正方形$GB=2\triangle FBC$。于是矩形 $BL=$正方形GB。同样有矩形$CL=$正方形AK。

这定理又告诉我们怎样作一正方形使其面积为所给两正方形之和,即求x使$x^2=a^2+b^2$。这是几何代数法的一例。

《几何原本》共推导出467个定理,这里不一一赘述。它是一部内容丰富的数学书,千百年来为人们所使用,对人们掌握数学知识,了解公理方法,起了巨大的作用。但是,《几何原本》还很不成熟,其中存在许多严重缺点。第一是用了重合法(这是根据公理4的一个方法)来证全等(例如命题4)。这个方法有两点值得怀疑:一是用了运动的概念,而这是没有逻辑根据的;二是默认图形从一处移动到另一处时所有性质保持不变,要假定移动图形而不致改变其性质,那就要对物理空间假定很多的条件。第二是定义不够恰当。开头关于点、线、面的定义没有明确的数学含义,其实这些概念应当是不定义的初始概念。有些定义,例如定义17应用了没有加以定义的概念"圆周"。有些概念的定义含糊不清,如第五卷比例论中的

一些定义。第三是引用了从未提出而且无疑并未发觉的假定。例如，在命题1的证明里假定了两圆有一公共点。每个圆是一个点集，很可能两圆彼此相交而在假定的点或所谓交点（一个或两个）处没有两圆的公共点。第四是证明不够严格。有些证明搞错了，需要纠正；有些地方需要给出新的证明。有些证明只用特例或所给数据（图形）的特定位置证明一般性的定理，这也需要重新证明。

《几何原本》的缺点集中到一点，就是没有能够区分感性直观与科学抽象，对感性直观过分依赖，因而缺乏数学的严格性。这里我们可以举一个例子：



〔命题〕每一三角形都是等腰的。

〔证明〕 设△ABC是任一三角形。作角BAC的平分角线，并作BC边的垂直平分线。如果这两条线平行，则角BAC的平分角线垂直于BC，因此这个三角形是等腰三角形。如果这两条线不平行，交于O点，则由O分别作AB和AC的垂线，垂足分别为F和E。由此可得：标号为I的两个三角形全等，$OF=OE$。标号为III的两个三角形也全等，$OB=OC$。因此，标号为II的两个三角形全等，$FB=EC$。又据标号为I