线性泛函分析入门

关　肇　直
张　恭　庆　著
冯　德　兴

上海科学技术出版社

线性泛函分析入门

关肇直　张恭庆　冯德兴　著

上海科学技术出版社

线性泛函分析入门

关肇直　张恭庆　冯德兴　著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 8.875　字数 219,000

1979 年 9 月第 1 版　1979 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—50,000

书号：13119·771　　定价：1.00 元

序

泛函分析是研究无穷维线性空间上的泛函数与算子的理论的一门分析数学．无穷维线性空间是描述具无穷多自由度的物理系统的数学工具．因此，泛函分析是定量地研究诸如连续介质力学、电磁场理论等一类具无穷多自由度的物理系统的有力工具．泛函分析的基本概念建立于本世纪初直到二十年代，而作为数学中一门独立的学科则是形成于三十年代．如果在四十至五十年代它足够成熟，成为内容丰富的一门数学学科，那么它在工程技术上的应用却是在最近十几年才成为广泛而有效的．在国外，有些技术科学的考博士学位的研究生要通过泛函分析的考试，而且有些技术科学的期刊里发表的论文经常使用泛函分析的术语、符号以及方法．这些情况已经使泛函分析不再是仅仅专业的纯数学工作者的兴趣，而已成为许多从事技术科学的研究者所渴望了解的一门数学学科．在数学内部，它也渗透到数学中众多其他的分支中，特别是逼近论、偏微分方程理论、概率论、数值分析、最优化理论等等之中．

为此，出版一本适合多方面科学研究工作者需要的泛函分析入门书，就成为很迫切的事情了．

本书取材针对多方面对泛函分析的需要．因而突出无界线性算子、正规能解算子的部分，而且也着重介绍了成为多种应用数学分支常用的凸分析．在内积空间的直交基那一部分中，介绍了现时多种技术科学使用得很多的 Walsh 函数．本书不假定读者已有关于实变函数的知识．相反，我们用距离空间完备化引进勒贝格积分的概念，建立了 (B) 型空间 $L^p(p\geqslant1)$，这对于泛函分析入门已是够用的了．这样就免除学泛函

分析必须先学实变函数论的要求，使读者只要有微积分学与线性代数的基本训练就能学习本书.

纯数学的书习惯上用建立在公理系统上的演绎体系表现. 如讲授者再照本宣科，只能使学习的人惊叹体系的严谨，而不懂得体系怎样形成. 近年来好几位同志都致力于数学书的写法上的改革，例如江泽涵同志的《不动点类理论》，吴文俊同志的《可剖形在欧氏空间中的实现问题》中的附录“印刷电路与集成电路中的布线问题”. 这里我们尽可能地从一些问题提炼出泛函分析中的基本概念. 在讨论一些基本概念所蕴涵的基本属性时，先说明要解决什么问题，在问题的分析当中逐步为了需要引进一些条件，最后分析完结，定理的叙述也成为必然的，证明也就有了. 这样或能帮助初学者理解提出一个定义或一个定理的必然性. 马克思说:“当然，在形式上，叙述方法必须与研究方法不同. 研究必须充分地占有材料，分析它的各种发展形式，探寻这些形式的内在联系. 只有这项工作完成以后，现实的运动才能适当地叙述出来. 这点一旦做到，材料的生命一旦观念地反映出来，呈现在我们面前的就好象是一个先验的结构了”（《资本论》第二版跋）. 我们希望帮助读者透过叙述方法了解到研究的过程.

作为线性泛函分析“入门”，这里避免追求完备而包括进来太多的材料. 因此这本书与我在二十年前写的《泛函分析讲义》很不相同. 比如 Hilbert 空间中自伴算子的谱理论、赋范环论、有序线性空间理论、非线性泛函分析等等，都将以专题性的小书另外写出. 在这里就一点也不涉及了.

我们感谢贵州大学祝开成同志和杭州大学吴绍平

同志在本书的写作过程中提供了宝贵意见．特别感谢吴绍平同志为本书写了第四章的§5．我们还感谢中国科学院数学研究所控制理论研究室的李凤翎、殷景欣、魏敬勤、刘智敏、王进才和周大融等同志帮助誊写书稿。

关 肇 直

1978年8月25日于北京

关于记号的说明

本书采用的记号大体上与国际上近年来流行的记号相符. 特别这里广泛采用了集论的符号: 属于 $\in$, 包含 $\supset$, 交 $\cap$, 并 $\cup$, 集 A 的补 A^C, 等等. 这里还经常采用数理逻辑中的记号: 蕴涵 $\Rightarrow$、等价 $\Leftrightarrow$ (“必须且只须”)、量词 $\forall$ (所有的、一切的)与 $\exists$ (存在, 有一个) 等等. 至于泛函分析本身的符号, 一般在引进时都加以说明, 这里不提了. 请参看著者之一所著的《拓扑空间概论》.

目录

34832

第一章　距离线性空间

引　言

在本书序言中已经指出，在研究某些物理系统时，往往要用无穷多个参数来决定系统的状态. 例如当考察一个物体上的温度分布时，所关心的状态是整个物体上的温度分布 $\Theta(\vec{\tau})$，而 $\vec{\tau}$ 表示空间位置矢量. 这里 $\vec{\tau}$ 起着标号作用：每个位置有一定的温度值，系统的状态不是物体上个别位置的温度值，而是依赖于无穷多个参数值 $\vec{\tau}$ 的量 $\Theta(\vec{\tau})$. 又如在通信工程或控制工程中，系统的输入或输出（信号）都是时间 t 的函数 $x(t)$，$-\infty<t<+\infty$ 或 $0\leqslant t<+\infty$. $x(t)$ 正是依赖于取无穷多个值的参数 t 的量. 有时信号是经过采样取得的，即 $x(t_k)$，$k=0, 1, 2, \cdots$，$t_0<t_1<t_2<\cdots$. 这时参数是离散变化的. 依赖于连续变化的参数的量平常叫做函数；依赖于离散变化的参数的量平常叫做数列. 这就是说，用来表达具有无穷多个自由度的物理系统的状态的，就是函数或数列.

为了考察物理系统的变化，我们所关心的不是系统的某一个状态，而是状态的集合. 从数学上说，所考察的不仅是个别的函数或数列，象在初等数学分析中那样，而是函数的集或数列的集. 例如在通信工程中要考察信号的转换，从而要考察信号的集.

在这种函数的或数列的集中，还常引入代数运算. 例如当谈到温度分布时，可以考察两个温度分布的相加，这是指在各个位置的两个温度值相加. 把温度分布乘几倍，也是指各点处温度都乘上这个倍数. 因此在状态的集中至少应容许有加法和数乘法（即乘以数的运算）这两种运算，正象平常的（三维乃至线性代数中所

讲过的有穷维)矢量那样. 换句话说,函数(或数列)的集中首先应当引入线性空间的结构.

在处理实际问题中,物理系统的状态可以由观测决定,而观测所得的值总是近似的. 和初等数学分析一样,我们要求近似值能逼近实际的准确值到任意程度[1]. 这种"任意逼近"的概念反映在数学中就是一种极限的概念. 一个集,如果其中能够确切地规定"任意逼近"的概念,叫做拓扑空间. 这就是说,对于表现具无穷自由度的系统的状态的函数集或数列集,还要引进拓扑结构[2].

要使所引进来的线性空间结构与拓扑结构能很好地反映具无穷多个自由度的物理系统的属性,应注意线性空间结构与拓扑结构不是互相无关的. 如果两个状态的近似值相加(或一个状态的近似值乘上一个数)不再成为由两状态相加而得出的新状态的近似值(或这状态的某数倍的近似值),那末这些运算就不能反映客观现实了. 因此,我们要求两状态的近似值相加成为两状态相加之和的近似值,等等.

表达任意逼近的最简单的方式是通过一个距离函数,而一个变的状态叫做任意逼近一给定状态,是指表达这个变的状态的函数(或数列)和表达那个给定状态的函数(或数列)的距离趋于零. 这时,根据上面的分析,如果状态 x 与状态 y 之间的距离记作 $\rho(x, y)$,上面的要求表达如下:

1° 当 $\rho(x, x_0)\to 0$, $\rho(y, y_0)\to 0$ 时,必有

$$\rho(x+y, x_0+y_0)\to 0;$$

2° 当 $\rho(x,x_0)\to 0$ 时,而 α_0 是任意(实或复)数,且数 $\alpha\to\alpha_0$,那末

$$\rho(\alpha x, \alpha_0 x_0)\to 0.$$

这两个要求如上述是从实际要求提炼出来的,把代数的线性空间结构同拓扑结构有机地结合起来. 如果线性空间结构与拓扑结构

1) 详见关肇直:《高等数学教程》第一卷第一分册,1959年.

2) 关于拓扑结构的简单介绍,见本书附录.

满足要求1°与2°，我们就说这两种结构是相容的．这两要求使得我们所关心的函数空间或数列空间的研究不单纯是线性代数和一般拓扑学的拼凑，而是在这两者的基础上形成的新学科，即泛函分析的基本部分．

本章就是介绍这种赋距离的线性空间的理论．

§1 距离空间的基本属性

1.1 距离的概念

引言中曾指出，在研究一些物理系统时，常常需要在这些系统的状态之间给出距离量度，以便确切地规定出"任意逼近"的概念．如果把系统的状态看做一个空间中的点，距离就是表达两点之间远近的一个数．直观地说，要使这个数确实反映出距离概念的本质，它应该至少具有下列一些属性：

1° 任意一点到它自己的距离等于零；两不同点之间的距离大于零．

2° 从 x 到 y 的距离与从 y 到 x 的距离相等．

3° 由两点之间直线段为最短引伸出来的三角形不等式，即三角形两边之和大于第三边．

由此引伸出距离的确切定义．

定义1 设 $\mathfrak{X}$ 是一个不空的集．$\mathfrak{X}$ 叫做距离空间，是指在 $\mathfrak{X}$ 中定义一个双变量的实值函数 $\rho(x, y)$：$\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{R}^1$，满足下列条件：对于任意 $x, y, z\in\mathfrak{X}$，有

1° $\rho(x, y)\geqslant 0$,

$\rho(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$;

2° $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;

3° $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$.

满足条件1°、2°、3°的函数 $\rho(\cdot, \cdot)$：$\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{R}_+$ 叫做 $\mathfrak{X}$ 上的距离．

【例1】 实数集 $\mathfrak{R}$ 或复数集 $\mathscr{C}$ 按距离

$$\rho(x, y)=|x-y|$$

是距离空间．这里 $|\cdot|$ 表示绝对值．

【例2】 区间 $[a, b]$ 上的连续（实或复值）函数的全体 $C[a, b]$ 形成距离空间，只要取距离为

$$\rho(x, y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|.$$

设 $\mathfrak{X}$ 是距离空间，$\rho(x, y)$ 是其中的距离．设 $\mathfrak{X}_1$ 是 $\mathfrak{X}$ 的一个子集．当把 $\rho(x, y)$ 限制在 $\mathfrak{X}_1\times\mathfrak{X}_1$ 上时，$\mathfrak{X}_1$ 也是一个距离空间，叫做 $\mathfrak{X}$ 的子空间．

1.2 收敛

引进距离的主要目的在于刻画"任意逼近"的概念．直观上说，动的点 x 无限逼近固定点 x_0，是指距离 $\rho(x, x_0)$ 趋近于 0．为此，引进

定义 2 距离空间 $\mathfrak{X}$ 中的点列 (x_n) 叫做收敛于 x_0，或称点列 (x_n) 以点 x_0 为极限，是指

$$\rho(x_n, x_0)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

这时我们写成

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0 \text{ 或 } x_n\to x_0 \quad (n\to\infty).$$

距离空间中点列的收敛有初等数学分析中所讨论的那种收敛所具有的一些属性．特别有

定理 1 在距离空间 $\mathfrak{X}$ 中，每个点列至多收敛于一点．如果点列 (x_n) 收敛于 x_0，它的每个子列也收敛于 x_0．

证 设点列 (x_n) 既收敛于 x_0，又收敛于 y_0，那末对于任意 $\varepsilon>0$，必有自然数 n_1 和 n_2，使

$$n\geqslant n_1\Rightarrow\rho(x_n, x_0)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$n \geqslant n_2 \Rightarrow \rho(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$n \geqslant \max(n_1, n_2)$$
$$\Rightarrow \rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ 既然是任意的,只能有 $\rho(x_0, y_0) = 0$ 从而 $x_0 = y_0$.

设 (x_n) 收敛于 x_0, 而 (x_{n_k}) 是 (x_n) 的子列. 那末对于任意 $\varepsilon > 0$, 必有一正整数 n_0, 使

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

特别,由于 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, 当 $n_{k_0} > n_0$ 时, 那末 $n_k > n_{k_0} > n_0$, 只要 $k > k_0$, 从而

$$k > k_0 \Rightarrow \rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon,$$

这就证明了 $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$.

很明显, 在一个给定集上可以定义出种种的距离. 例如当 $\rho(x, y)$ 是 $\mathfrak{X}$ 上的距离时,那末

$$\rho'(x, y) \triangleq \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

也是一个距离. 事实上, 定义 1 的前两个属性都是显然的. 至于属性 3°, 只须注意

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - \frac{1}{1+\alpha}$$

是 $\alpha > 0$ 的递增函数,并且对于 $a > 0$, $b > 0$, 有

$$\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

我们已经指出,引进距离,主要关心的不在于距离这个函数本身,而在于它所规定的收敛. 自然要问,定义在同一集上的两个距离所规定的收敛有什么关系呢? 如果它们定义出相同的收敛, 我们就应该认为这两个距离并没有本质差别. 为此,我们提出:

定义 3 集 $\mathfrak{X}$ 上两个距离 $\rho_1(\cdot, \cdot)$ 与 $\rho_2(\cdot, \cdot)$ 叫做等价的，是指它们在 $\mathfrak{X}$ 上确定出相同的收敛，即

$$\rho_1(x_n, x_0)\to 0 \Leftrightarrow \rho_2(x_n, x_0)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

【例 1】 在 $\mathfrak{R}$ 或 $\mathscr{C}$ 中取距离 $\rho(x, y)=|x-y|$，所定义的收敛就是平常数列的收敛.

【例 2】 在 $C[a, b]$ 中，如果距离定义成

$$\rho(x, y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|,$$

那末由它规定的收敛乃是函数列在区间 $[a, b]$ 上的一致收敛.

【例 3】 设 $\mathfrak{R}^n$ 表示由 n 个实数的有序组

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

所形成的集. 在 $\mathfrak{R}^n$ 上定义距离

$$\rho(x, y)=\max_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k|,$$

那末由这距离在 $\mathfrak{R}^n$ 上定义的收敛乃是"按坐标"收敛，即如果 $x^{(k)}=(x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$，$x^{(0)}=(x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$，那末 $x^{(k)}\to x^{(0)}$ $(k\to\infty)$ 是指

$$x_l^{(k)}\to x_l^{(0)} \quad (k\to\infty),\ l=1, 2, \cdots, n.$$

如果在 $\mathfrak{R}^n$ 上定义

$$\rho_1(x, y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2},$$

那末，由这距离在 $\mathfrak{R}^n$ 上定义的收敛乃是"按欧几里得距离"收敛. 由于显然有

$$\rho(x, y)\leqslant\rho_1(x, y)\leqslant\sqrt{n}\,\rho(x, y), \quad \forall x, y\in\mathfrak{R}^n,$$

所以 $\rho(x, y)$ 与 $\rho_1(x, y)$ 是等价的距离[1].

【例 4】 今举一个空间上有两相互不等价的距离的例. 在 $C[a, b]$ 上定义

$$\rho_1(x, y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt;$$

1) 实际上不难证明，在有穷维线性空间上任意两距离等价，即在它上唯一地确定了能与线性空间结构相容的拓扑结构.

它所规定的收敛乃是函数列在区间 $[a, b]$ 上的“平均收敛”. 显然与例 2 中所定义的距离 $\rho(x, y)=\max\limits_{a<t<b}|x(t)-y(t)|$ 相比, 有

$$\rho_1(x, y)\leqslant(b-a)\rho(x, y).$$

所以函数列 $\{x_n(t)\}$ 如果按 $\rho(x, y)$ 收敛, 它也要按 $\rho_1(x, y)$ 收敛; 但函数列

$$x_n(t)=\begin{cases}\dfrac{b+(n-1)a-nt}{b-a}, & a\leqslant t\leqslant a+\dfrac{b-a}{n};\\ 0, & a+\dfrac{b-a}{n}<t\leqslant b;\end{cases}$$

$x_n(\cdot)$ 按距离 $\rho_1(x, y)$ 收敛于恒等于 0 的函数:

$$\rho_1(x_n, 0)=\frac{b-a}{2n}\to 0,$$

但它按距离 $\rho(x, y)$ 却不收敛于 0:

$$\rho(x_n, 0)=1.$$

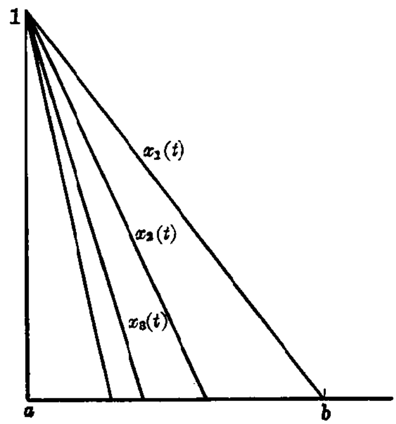

图 1.1

1.3 开集与闭集

在一距离空间 $\mathfrak{X}$ 中, 点集

(1) $$S(x_0; r)=\{x\in\mathfrak{X}\,|\,\rho(x, x_0)<r\}$$

叫做以点 x_0 为中心, 以 r 为半径的开球. 这里 r 是正数. 如把(1)中的 $<$ 换成 $\leqslant$, 相应的点集叫做闭球, 记成 $\overline{S}(x_0; r)$.

$$\Sigma(x_0; r)=\{x\in\mathfrak{X}\,|\,\rho(x, x_0)=r\}$$

叫做以 x_0 为中心, 半径为 r 的球面.

定义 4 设 M 是距离空间 $\mathfrak{X}$ 中的子集. 点 $x\in\mathfrak{X}$ 叫做集 M 的内点, 是指有一以 x 为中心的开球 $S(x; \varepsilon)\subset M$. M 的所有内点的全体叫做 M 的内部, 记作 $\mathring{M}$ (或 $\operatorname{Int} M$). 如果 M 的一切点都是它自己的内点, 即 $M=\mathring{M}$, 那末 M 叫做开集.

【例 1】 在 $\mathfrak{R}^1$ 中, 开区间 (a, b) 是开集. 事实上, 如果 $a<x$