# 分析力学解题指导

沙永海 编著

黑龙江科学技术出版社

# 分析力学解题指导

沙永海　编著

黑龙江科学技术出版社

一九八六年·哈尔滨

责 任 编 辑：翟明秋

封 面 设 计：张洪冰

**分析力学解题指[illegible]**

沙永海 编著

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区建设街 35 号)

黑龙江新华印刷厂附属厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092 毫米 32 开本 11.625 印张 238 千字

1986 年 8 月第 1 版 1986 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—4000册

书号：13217·154　　定价：2.20元

# 前　言

分析力学是从能量的观点出发，应用数学中的分析法来研究系统力学问题的一门科学。分析力学的研究方法与牛顿力学相比，在提高分析问题能力，开扩科学视野和活跃思维等方面都有更大的优越性。为了帮助初学者更好地掌握分析力学解题的基本方法和解题规律，特编写此书。

本书各章包括内容提要，解题方法步骤，注意事项及例题、习题。在例题和习题中汇集了三十多所高等院校招收硕士研究生有关分析力学的试题。对所选例题作了指导性的分析和解答，大多数例题都给出了多种解法，以便帮助读者提高分析问题和解决问题的能力。

本书读者对象，主要是高等院校学生、研究生和力学教师，也可供工程技术人员参考。

本书错误和不足之处，敬希广大读者批评指正。

沙永海

# 目　　录

# 第一章　基本概念

## § 1—1　内容提要

一、约束　广义坐标　自由度

几何约束和可积分的运动约束统称为完整约束。不可积分的运动约束称为非完整约束。受完整约束的系统称为完整系统。受非完整约束的系统称为非完整系统。

广义坐标　确定系统位置的一组独立变数称为广义坐标。

自由度　系统坐标的独立变分数称为自由度数。其数学表达式为

$$n = 3N - (\text{约束数})$$

如是平面系统，表达式为

$$n = 2N - (\text{约束数})$$

式中 $N$ 为系统中质点的个数。

完整系统　广义坐标数 = 坐标独立变分数 = 自由度数 = $3N - l$

非完整系统　广义坐标数 = $3N - l$

坐标独立变分数 = 自由度数 = $3N - (l + g)$

式中 $l$ 为完整约束方程个数；$g$ 为非完整约束方程个数。

单自由质点有三个自由度，定轴转动刚体有一个自由

度，平面运动刚体有三个自由度，定点转动刚体有三个自由度，一般运动刚体有六个自由度。

二、变换方程

反映两种坐标系之间关系的变换方程，在分析力学的研究中起着桥梁作用。常用的是将直角坐标 $x_i$，$y_i$，$z_i$ 转换成广义坐标 $q_1$，$q_2$，…，$q_n$ 的变换方程。即

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_i(q_1, \cdots, q_n, t) \\
y_i &= y_i(q_1, \cdots, q_n, t) \\
z_i &= z_i(q_1, \cdots, q_n, t) \\
&(i = 1, 2, \cdots, N)
\end{aligned}
$$

## § 1—2 解题要点

1. 分析约束、列写约束方程，选广义坐标、确定自由度，这是分析力学解题的前提。

约束方程是根据约束条件应用几何学和运动学的知识建立起来的。系统的广义坐标数是根据系统质点的个数和完整约束方程个数来确定的。即由 $N$ 个质点组成的系统，受到 $l$ 个完整约束，它的全部 $3N$ 个直角坐标中，只有 $n=3N-l$ 个是相互独立的，而其余的 $l$ 个都可以通过完整约束方程表示为独立坐标的函数。这就是说，要确定系统的位置，只要 $n$ 个独立的坐标就够了。这 $n$ 个独立的坐标就是系统的广义坐标。自由度要根据系统质点个数和约束方程（包括完整约束方程和非完整约束方程）个数来确定。

2. 列写的约束方程应是彼此独立的。多写约束方程会减少广义坐标数或自由度数，少写约束方程会增加广义坐标数

或自由度数，从而使运动微分方程减少或增加，故得不到系统运动的正确解。

3.要善于把文字叙述的约束条件转化为数学方程式。例如给出一个刚体的纯滚动条件，就要用速度合成定理，求出接触点速度，再令其等于零，便得运动约束方程（见例1—4）。

4.判断运动约束是完整约束还是非完整约束，要把约束方程写成标准形式

$$f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=0$$

再根据左端是否满足某个函数的恰当微分条件来判断。如不是某个函数的全微分便是非完整约束。

5.广义坐标的选取并不是唯一的。但对于一个确定的系统来说广义坐标数却是一定的。选取不同的广义坐标，运动微分方程的形式则不同，选得合适，可使运动微分方程简单，易于求解。

## §1—3 解题分析

**例1—1** 如图1—1所示。系统在铅垂平面内运动，杆$OC$与铅垂线的夹角$\varphi=\varphi(t)$已知。试写出系统的约束方程、广义坐标，自由度和变换方程。

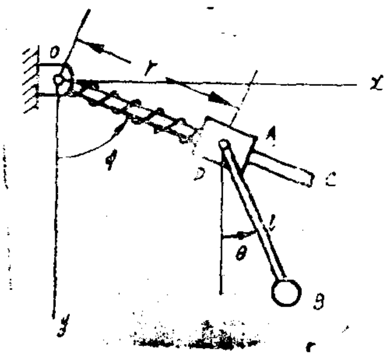

图 1—1

**解** 确定系统的自由度，可以采取两种方法：一根据系统的构成，观察分析系统中各个刚体或质点间的相对运动类

型，来判断系统的自由度。

这是一个完整系统，它由做定轴转动的 $OC$ 杆、相对于 $OC$ 杆平动的滑块 $A$ 和相对于滑块 $A$ 做定轴转动的摆 $DB$ 三个刚体组成。杆 $OC$ 的位置由 $\varphi=\varphi(t)$ 确定，是已知的。滑块 $A$ 相对 $OC$ 杆的位置由 $r$ 可以确定，摆 $DB$ 相对于滑块 $A$ 的位置由角 $\theta$ 可以确定，所以该系统有两个广义坐标，亦即有两个自由度。

二、找出能确定系统位置的几个代表点及其之间的约束关系，来判断自由度。

滑块 $A$ 上的点 $D$ 坐标 $(x_1,y_1)$ 和摆球 $B$ 的坐标 $(x_2,y_2)$ 确定之后，系统的位置就随之确定了。这四个坐标必须满足两个约束方程

$$x_1=y_1\operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2 \tag{2}$$

则系统的独立坐标数，即广义坐标数为

$$n=2\times2-2=2$$

又坐标 $x_1,y_1,x_2,y_2$ 的变分 $\delta x_1,\delta y_1,\delta x_2,\delta y_2$ 必须满足下列两个方程，即(1)(2)两式的变分为

$$\delta x_1=\delta y_1\operatorname{tg}\varphi$$

$$(x_2-x_1)(\delta x_2-\delta x_1)+(y_2-y_1)(\delta y_2-\delta y_1)=0$$

则四个变分中只有两个是独立的，即坐标的独立变分数为二，故自由度为二。

从上述结果可知，完整系统的独立坐标数（广义坐标数）、坐标的独立变分数（自由度数）都是二。

我们可以选 $(x_1,x_2)$ 或 $(x_1,y_2)$ 为广义坐标，也可以另

外选两个彼此独立的变量($r$, $\theta$)为广义坐标。则直角坐标与广义坐标($r,\theta$)间的变换方程为

$$x_1 = r\sin\varphi \qquad x_2 = r\sin\varphi + l\sin\theta$$

$$y_1 = r\cos\varphi \qquad y_2 = r\cos\varphi + l\cos\theta$$

系统广义坐标($r$, $\theta$)选定后，完整约束方程 (1) (2) 恒得到满足。即把变换方程代入(1)(2)中自然成立。

**例 1—2** 图1—2为四连杆机构。$AB=l_1$，$BC=l_2$，$CD=l_3$，$DA=l_4$。试确定系统的自由度。

**解** 机构中铰链$B$和$C$的坐标$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$确定之后，系统的位置就可以确定。这四个坐标满足下列三个约束方程

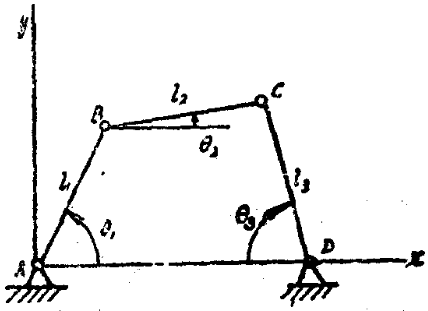


图 1—2

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

$$(l_4 - x_2)^2 + y_2^2 = l_3^2$$

则这四个坐标中只有一个是独立的，可以选其中任一个做为广义坐标。

还可以选$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$来确定系统的位置，但这三个坐标须满足两个约束方程

$$l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 = l_4$$

$$l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 = l_3\sin\theta_3$$

则三个坐标中也只有一个是独立的，可以选其中任一个做为广义坐标。

四个坐标变分（即虚位移）：$\delta x_1$，$\delta y_1$，$\delta x_2$，$\delta y_2$ 必须满足三个虚位移间的约束方程

$$x_1\delta x_1 + y_1\delta y_1 = 0$$

$$(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) = 0$$

$$-(l_4 - x_2)\delta x_2 + y_2\delta y_2 = 0$$

所以坐标 $x_1, y_1, x_2, y_2$ 的独立变分数只有一个，故四连杆机构自由度为一。

**例 1—3** 如图 1—3 所示。一球铰 $C$ 联结的二刚体 $A$、$B$ 在空间运动。试确定其自由度。

**解** 二刚体 $A$、$B$ 如无球铰 $C$ 相联，则各需用六个独立坐标才能确定二刚体的位置。如刚体 $A$ 用六个坐标确定其位置后，刚体 $B$ 相对刚体 $A$ 绕 $C$ 点只能做定点转动，故刚体 $B$ 相对刚体 $A$ 的位置只用三个独立坐标就可确定。因此该系统在空间的运动须用九个独立坐标才能确定。即广义坐标数为九，这是一个完整系统，故自由度为九。

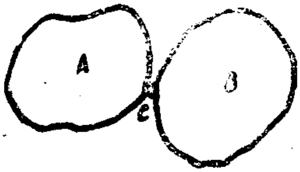

图 1—3

**例 1—4** 如图 1—4 所示，半径为 $R$ 的均质圆球，在粗糙水平面上作纯滚动。试确定系统的广义坐标和自由度。

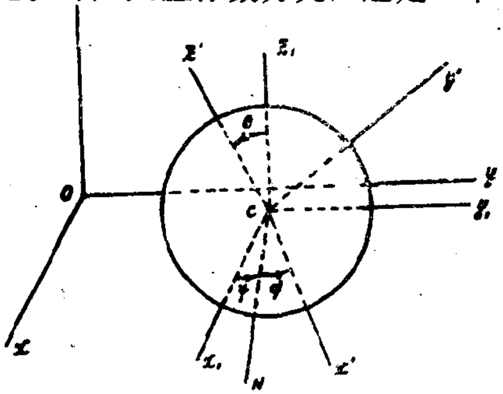

图 1—4

**解** 自由运动刚体有六个自由度。因圆球在水平面上运动，质心 $C$ 的坐标 $Z=R=$ 常数，这是一个完整约

束方程，所以球的位置可以用五个变数确定，选质心的坐标 $x, y$ 和能确定相对质心运动的三个欧拉角 $\psi$, $\theta$, $\varphi$ 为广义坐标。

圆球在水平面上作纯滚动，它与平面的接触点 $p$ 的速度为零。由此可得非完整约束方程。设 $\vec{v}_c$ 为球心的速度矢量，$\vec{\omega}$ 为球的角速度矢量，$\vec{r}$ 为接触点 $p$ 到 $C$ 的矢径，$\vec{v}_p$ 为接触点 $p$ 的速度矢量，由速度合成定理得

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1}$$

此式中各矢量在相对惯性坐标系 $oxyz$ 平动的坐标系 $Cx_1y_1z_1$ 上的表达式为

$$\begin{aligned}
&v_p = 0\\
&\vec{v}_c = \dot{x}\vec{i}_1 + \dot{y}\vec{j}_1\\
&\vec{\omega} = \omega_{x1}\vec{i}_1 + \omega_{y1}\vec{j}_1 + \omega_{z1}\vec{k}_1\\
&\quad = (\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi)\vec{i}_1\\
&\qquad + (-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta + \dot{\theta}\sin\psi)\vec{j}_1 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\vec{k}_1\\
&\vec{r} = -R\vec{k}_1\\
&\vec{\omega}\times\vec{r} = -R\omega_{y1}\vec{i}_1 + R\omega_{x1}\vec{j}_1
\end{aligned}$$

则由(1)，得

$$\dot{x} + R(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi) = 0 \tag{2}$$

$$\dot{y} + R(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi) = 0 \tag{3}$$

方程(2)，(3)是不可积分的。这是两个线性齐次定常的非完整约束方程。

六个坐标变分 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta\psi, \delta\theta, \delta\varphi$ 必须满足三个方程

$$\delta z = 0$$

$$\delta x + R(\delta\varphi\cos\psi\sin\theta - \delta\theta\sin\psi) = 0$$

$$\delta y + R(\delta\varphi \sin\psi \sin\theta + \delta\theta \cos\psi) = 0$$

所以系统自由度为三。

## 习 题 一

1—1. 分别用柱坐标 $r, \varphi, z$ 和球坐标 $r, \varphi, \theta$ 及其导数表示自由质点的速度和加速度。

1—2. 如图 1—5 所示。一直杆以匀角速度 $\omega$ 绕铅垂轴转动，杆与铅垂线夹角 $\theta$ 为定值，杆上有一小球可沿杆滑动。写出小球在直角坐标中的约束方程。如以小球相对杆与铅垂线交点 O 的距离 $r$ 为广义坐标，试写出小球的直角坐标与广义坐标的变换方程。

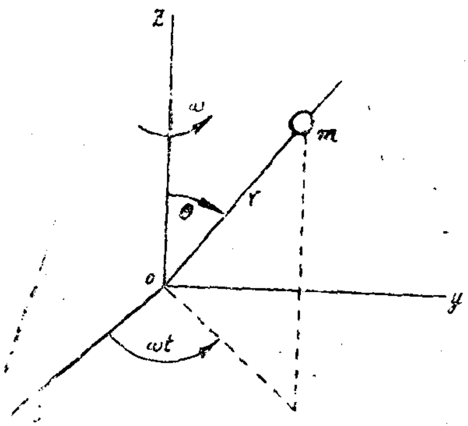


图 1—5

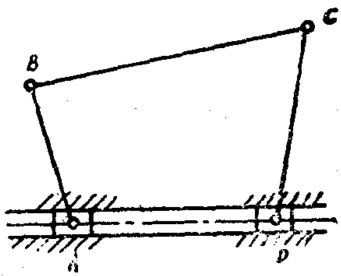


图 1—6

1—3. 试求图 1—6 所示平面三连杆机构 $ABCD$ 的自由度数。其中 $A$ 和 $D$ 可沿直线 $Ox$ 移动。

（答：3 个自由度）。

1—4. 试求图 1—7 所示用铰链连接起来的 $m$ 个杠组成

的开口平面杆系的自由度。

（答：$n=m+2$）。

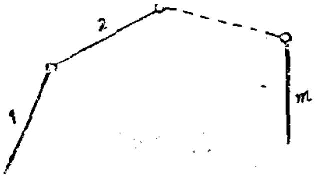


图 1—7

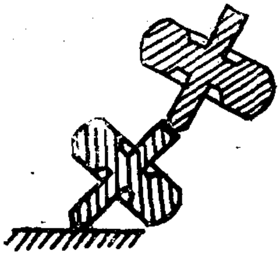

图 1—8

1—5. 如图 1—8 所示，系统由两个叠放在一起的陀螺组成，试求其自由度数。下面的陀螺支点固定不动。

（答：6 个自由度）。

1—6. 如图 1—9 所示。船舶在静水面上运动，可近似看作刚体的平面运动。运动过程中，质心的速度始终沿着点 $A,B$ 连线方向，$AB=l$，如以船首和船尾 $A,B$ 的坐标 $x_A$，$y_A$，$x_B$，$y_B$ 确定船舶的位置，试写出约束方程，并确定广义坐标数和自由度数。

（答：广义坐标数为 3，自由度数为2）。

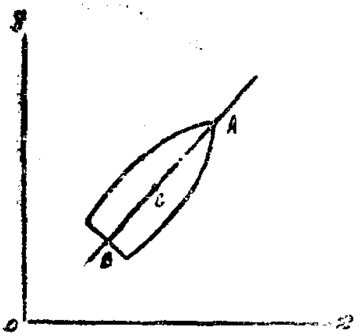


图 1—9

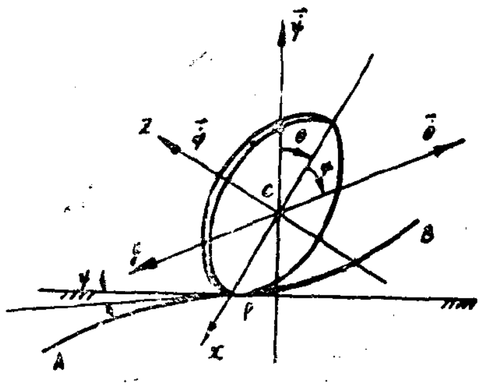


图 1—10

1—7. 如图1—10所示。半径为 $R$ 的圆盘，沿着水平粗糙地面上的 $AB$ 曲线做无滑动地滚动，试求系统的约束方程。

（答：$v_{cx}=0 \quad v_{cy}+R(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\sin\theta)=0$）。

（$v_{cz}+R\dot{\theta}=0$）

# 第二章　虚功原理

## § 2—1　内　容　提　要

一、虚功原理的形式

矢量形式

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0$$

标量形式

$$\sum_{i=1}^{N}F_i\cdot\delta s_i\cdot\cos\alpha_i=0$$

投影形式

$$\sum_{i=1}^{N}(F_{ix}\delta x_i+F_{iy}\delta y_i+F_{iz}\delta z_i)=0$$

广义坐标形式

$$\sum_{j=1}^{n}Q_j\delta q_j=0\qquad 或Q_j=0$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

主动力为有势力时的形式

$$\delta V=0$$

式中 $V=V(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_N,y_N,z_N)$

或 $\dfrac{\partial V}{\partial q_j}=0\quad(j=1,2,\cdots,n)$