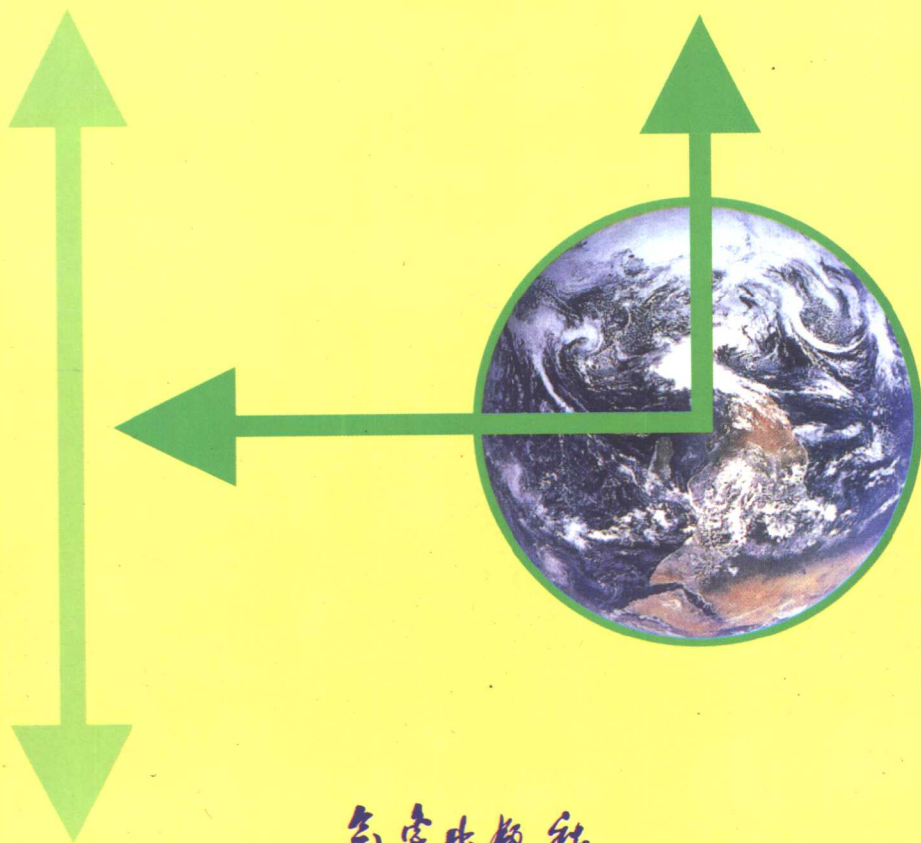


子波气候诊断技术的研究

林振山 邓自旺 著



气象出版社

国家“九五”攻关重中之重项目

国家教育部跨世纪优秀人才基金 联合资助

国家留学回国人员科研基金

子波气候诊断技术的研究

林振山 邓自旺 著

气象出版社

内 容 简 介

本书是作者参加国家“九五”攻关重中之重项目“我国短期气候预测系统的研究”、国家教育部跨世纪优秀人才基金和留学回国人员科研基金的有关项目研究工作的部分成果。书中详细介绍了作者自 1992 年以来所开发的子波气候诊断新技术及其应用方法,既有有关应用多类子波的 Fortran 语言程序、C 语言程序、Math card 和 Matlab 高级语言程序,又有大量结合国家有关重大科研课题的实例。这些技术、方法不仅在国内外处于较为领先的地位,而且使用方便、经济,具有广阔的应用前景。

本书论述深刻透彻,方法严谨,力求做到深入浅出,易于掌握应用,适合于大气科学类高等院校师生及从事气候诊断和预测的科研、业务人员阅读,也适合于从事各类资料分析、诊断的水文、地震、地质等有关专业的科研和业务人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

子波气候诊断技术的研究/林振山,邓自旺著. - 北京:气象出版社,1999.10
ISBN 7-5029-2811-1

I. 子… II. ①林… ②邓 III. 子波分析-应用-气候-诊断
IV. P46

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 61231 号

子波气候诊断技术的研究

林振山 邓自旺 著

责任编辑:陶国庆 终审:纪乃晋

封面设计:陈振博 责任技编:谷 青 责任校对:谷 青

气象出版社 出版

(北京海淀白石桥路 46 号 邮政编码:100081)

北京昌平环球印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所发行 全国各地新华书店经销

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:5.75 字数:148 千字

1999 年 10 月第一版 1999 年 10 月第一次印刷

印数:1~1500 定价:11.00 元

前 言

气候诊断和气候预测是大气科学的一个重要分支,是为国民经济及国防建设服务的重要项目。建国以来,我国遭受到许多严重的气候灾害:1954 年长江流域发生了近百年未遇的特大洪水;1959~1961 年的严重干旱;1963 年、1975 年北方大暴雨成灾;1976 年的夏季冷害、1991 年苏、皖等地的特大洪涝;1998 年长江全流域水灾及嫩江流域有记录以来的特大水灾。这些灾害给人民的生命财产带来了巨大灾难。显然,若能对(短期)气候趋势作出正确的诊断和超前预报,势必造福人类。

自 1822 年 Fourier 提出了热传导的分析理论以来,Fourier 分析(变换)一直被认为是最完美的数学理论(对称)而被广泛应用于物理学、光学、大气科学等领域,并发展成为频谱诊断技术。尽管 Fourier 变换只把所研究的资料不按时间而按频率重新排列,从表面上看来似乎不增加什么新东西,实际上正因按频率排列,使我们得以把各物理量随时间变化作为波动处理,研究其能量的周期分布。此外,大部分的大气(气候)现象在理论上表现出依赖于频率的形式。因此,Fourier 变换的意义极为明显,且具有如下的优点:

①谱表示更直接地与所研究的对象联系起来,如各种不同尺度的大气湍流分布,提供了一个时间域或空间域中区分不同尺度的途径;

②谱分析用到了整个记录的形态,从而获得较多的信息,如不同频率的振幅、位相、相干性等。

但另一方面,如果信号的功率谱是宽带谱,则 Fourier 变换只能告诉我们尺度的范围,而无法告诉我们信号的结构以及信号里所蕴含的大小不同尺度的串级过程,即 Fourier 变换在时空域中没有任何分辨率。此外,若信号具有奇异性,则 Fourier 变换亦无法解决有关信号奇异性的位置。为解决上述问题,数学家们花了整

整一百多年的时间,子波分析才应运而生。

子波变换起源于 1980 年法国科学家 Morlet 在地震数据的分析中。小波变换基于仿射群的不变性,即平移和伸缩的不变性,从而允许把一个信号分解为时间和频率(空间和尺度)的贡献。1986 年, Meyer 惊奇地发现了一个从正则小波建立的正交基。之后, Meyer 与他的学生 Lemarie 合作把它扩展到了 n 维的情况。1987 年, Meyer 和 Mallat 引入了多分辨分析的概率,从而给出了建立正交小波基的一般方法,并实现了快速小波算法。从那时以来,人们又发现了上百个其它的正交小波基。

子波变换特别适合于分析函数的局部可缩性,并发现它的奇异性和刻划奇异性的可能特征。小波变换对于信号处理是十分有用的,特别是对于获取一复杂信号的调整规律。从理论意义讲,传统上使用 Fourier 变换(分析)的地方,都可以用子波分析取而代之。此外,子波分析较 Fourier 分析具有以下优点:

①子波分析在时域和频域上同时具有良好的局部性质;

②它能将信号或图像等分解成交织在一起的多尺度成分,并对各种不同尺度(层次)成分采用相应粗细的时域或空域取同样步长,从而能够不断地聚焦到所研究对象的任意微小细节;

③具有数学意义上严格的突变点诊断能力。

正是由于子波分析具有上述优点,近十多年来,已被当作工具和方法上的重大突破而被广泛应用于信号处理、地震勘探、雷达监控、湍流研究、大气科学和非线性科学等领域,并取得了丰硕成果。

自 1992 年为南京大学大气科学系博士研究生开设小波分析以来,作者一直致力于开发子波气候诊断新技术的研究工作,本书则是对该工作的初步探讨和小结。

本书的初稿始于 1996 年,后因赴美访问而搁置了。由于当时曾收到不少来信索要有关材料和讨论有关问题,故在 1996 年 6 月赴美之前摘录其一部分编入本人当时正在付印的拙作:《气候建模、诊断和预测的研究》一书中,这在该书的前言里曾有过说明。

本计划待 2000 年国家九五攻关重中之重项目的有关(子)专题的研究结题后再将其有关成果收入该书以增其色,但最近又收到了美国某研究所发来的邀请赴美合作研究的函件。为了不让本书第二次夭折,只好提前将此书付印,幸好已有很多的积累,素材亦不少。

本书的特点是照顾两头,即实用性和前沿性。在实用性方面,我们给出了具体的消除小波变换边界效应的若干方案,给出了 Fortran 语言、C 语言、Matlab 和 Math card 等高级语言的有关(若干种)子波的小波变换程序,以便初学者、研究生和业务人员能在几天内便能“入门”,边学边用。在前沿性方面,我们致力开发了广义物理量小波变换和多层次子波变换诊断等新技术,使我们的子波气候诊断技术能保持处于国际领先水平。这些技术今年已应用于国家九五重中之重项目的有关专题的研究中,并取得了较满意的成果。

子波分析在大气科学的应用虽已有八九年的历史,但方兴未艾。与已有一百多年历史的 Fourier 变换相比,小波变换只能算是一个生命力极其旺盛的、正在茁壮成长的新生事物。由于小波分析是由 Fourier 分析发展起来的,具有 Fourier 分析所具有的一切优点。因此,我们完全有理由相信多分辨子波分析或必将在下一世纪独领风骚。

自 1992 年开发子波气候诊断技术至今,虽已有七年多的时间,但要完成此著仍觉得十分吃力,亦不甚满意,尤其是在子波诊断新内容(涵)的开发方面。如子波的空间多尺度分析(尚缺数学的证明和支持),广义物理量的子波变换等。唯盼能收抛砖引玉之效,吸引更多的同行来共同开发小波气候诊断这一崭新的领域,开创子波气候诊断新纪元。由于作者学识浅薄,水平有限,加之时间仓促,书中种种谬误和不当之处,在所难免,盼有关专家和读者能不吝赐教,不胜感激。

原南京大学博士研究生尤卫红,原南京大学硕士研究生卞维

林、王卓,南京大学的博士研究生乐群和硕士研究生苗娟、鲍名及原南京大学本科生丛峰学士等分别参加了 6.6、5.1、4.3、3.3、4.2 及 6.8 等章节的部分研究工作。谨此说明,并致谢。

在进行与本书有关的研究工作中,幸蒙曾庆存先生、赵柏林先生、黄荣辉先生、丑纪范先生、丁一汇先生、王绍武先生和刘式达先生的教诲和扶持。谨此向他们暨所有关心、支持小波气候诊断技术的前辈科学家致以崇高的敬意和衷心的感谢!

十分感谢国家教育部和国家留学回国服务中心所提供的基金资助。谨申谢忱!

林振山

1999 年 7 月于南京大学契阔斋

目 录

前 言

1. 子波气候诊断技术的初步研究	(1)
1.1 函数空间和窗口 Fourier 变换	(1)
1.1.1 标准符号	(1)
1.1.2 函数空间	(2)
1.1.3 窗口 Fourier 变换	(4)
1.2 多分辨分析与子波	(6)
1.2.1 多分辨分析	(7)
1.2.2 Riesz 基与正交基	(8)
1.2.3 子波正交基	(12)
1.2.4 一维小波的构造	(13)
1.3 连续小波变换	(17)
1.4 常用子波母函数	(19)
1.4.1 反映子波函数特性的物理量	(20)
1.4.2 墨西哥帽子波和 Morlet 子波	(22)
1.4.3 其它一些常用的子波	(25)
1.5 二维多分辨分析与 Mallat 算法	(28)
1.5.1 二维多分辨分析	(28)
1.5.2 Mallat 算法	(30)
1.6 子波分析在大气科学中的应用	(34)
1.6.1 子波分析在大气科学中的应用途径	(35)
1.6.2 子波函数的选择和在小波分析中应注意的问题	(36)
2. 基本程序	(38)
2.1 MHAT 子波、Wave 子波、Morlet 子波及梯形整数 子波变换的 FORTRAN 程序	(38)
2.2 MHAT 子波、Wave 子波、Morlet 子波及梯形整数 子波变换的 C 语言程序	(41)

2.3	MATALB 高级语言程序	(43)
2.4	MATH CARD 高级语言程序	(45)
3.	消除子波变换边界效应的若干方案	(47)
3.1	子波变换边界效应的客观性	(47)
3.2	消除子波变换边界效应的若干方案	(50)
3.3	试验比较	(51)
4.	El Nino 时空结构的多尺度分析	(61)
4.1	El Nino 区域 SST 的时间结构	(62)
4.1.1	资料及其预处理	(62)
4.1.2	El Nino 区域 SST 的多时间尺度	(63)
4.1.3	El Nino 事件的“寿命”	(65)
4.1.4	ESST 的子波能量分布及其分析	(69)
4.2	El Nino 区域 SST 的空间结构	(71)
4.2.1	资料处理和尺度选择	(72)
4.2.2	纬向结构	(73)
4.2.3	经向结构	(77)
4.2.4	多波相互作用机制	(79)
4.3	El Nino 现象对南京降水的影响	(81)
4.3.1	南京降水量的多尺度结构	(81)
4.3.2	El Nino 现象对南京降水量的影响	(84)
5.	中国旱涝趋势的多尺度诊断	(89)
5.1	中国旱涝等级史料的多尺度诊断	(89)
5.2	中国华南、华东和华北地区旱涝等级史料的发展趋势 断	(92)
5.3	北京和上海旱涝史料的多尺度分析	(94)
5.3.1	北京旱涝史料的多尺度分析	(94)
5.3.2	上海旱涝等级史料的多尺度分析	(96)
5.4	中国近 40 年来降水变化多时间尺度分析	(98)
5.4.1	资料和算法	(98)
5.4.2	中国近 40 年降水变化的多尺度分析	(99)

5.4.3	气温和降水量变化情况对比	(100)
5.5	中国近 40 年来不同时间尺度降水变化的空间差异 分析	(103)
5.5.1	中国东部降水变化南北差异	(103)
5.5.2	中国降水变化东西部差异	(105)
5.6	中国东北、华北、内蒙古、新疆、青藏等地区的气候 诊断	(108)
5.6.1	东北地区气候变化的多尺度诊断	(108)
5.6.2	华北地区气候变化的多尺度诊断	(110)
5.6.3	内蒙古地区气候变化的多尺度诊断	(111)
5.6.4	新疆地区气候变化的多尺度分析	(113)
5.6.5	青藏高原地区气候变化的多尺度诊断	(114)
5.7	中国黄土高原、长江中下游、华南、西南等地区的气 候诊断	(116)
5.7.1	黄土高原地区气候变化的多尺度诊断	(116)
5.7.2	长江中下游地区气候变化的多尺度诊断	(116)
5.7.3	华南地区气候变化的多尺度诊断	(119)
5.7.4	西南地区气候变化的多尺度诊断	(119)
5.8	中国 7 个主要气候区降水趋势的预测	(122)
5.8.1	德比契斯子波的滤波系数	(122)
5.8.2	资料与气候区的划分	(125)
5.8.3	东北、华北和黄淮地区降水趋势的预测	(125)
5.8.4	江淮、长江中下游、江南和华南地区降水趋势的预 测	(130)
6.	子波气候诊断新技术的研究	(136)
6.1	太阳活动与全球气候变化的关系	(136)
6.2	全球气温变化与 ENSO 循环	(139)
6.3	El Nino 与日食	(141)
6.4	ESST 的子波交换能量分布	(146)
6.5	数字显微镜	(148)

6.6	自适应多分辨数据滤波器及其应用	(150)
6.6.1	自适应多分辨数据滤波器的建立	(151)
6.6.2	北半球气温变化的多时间尺度分析	(154)
6.6.3	中国气温变化的多时间尺度分析	(156)
6.7	广义物理量子波变换物理相图及其应用	(158)
6.8	气候本征变化与自然变化的检测	(160)
6.8.1	气候的本征变化、特征变化和自然变化	(161)
6.8.2	气候资料的信息分解	(162)
6.8.3	中国气候与全球气候的本征变化和自然变化	(168)

参考文献

1. 子波气候诊断技术的初步研究

自从 1822 年 Fourier 提出了热传导的分析理论以来, Fourier 分析(变换)一直被认为是最完美的数学理论(对称)而被广泛应用于物理学、地学、信息光学等领域。但如果信号的功率谱是宽带谱, 则 Fourier 变换只能告诉我们尺度的范围, 而无法告诉我们信号的结构以及信号里所蕴含的大小不同尺度的串级过程, 即 Fourier 变换在时空域中没有任何分辨率。此外, 若信号具有奇异性, 则 Fourier 变换亦无法解决有关信号奇异性的位置。为解决上述问题, 子波分析应运而生。所以子波分析是 Fourier 分析发展史上的一个里程碑。从理论意义讲, 传统上使用 Fourier 分析的地方, 都可以用子波分析取代。此外, 子波分析较 Fourier 变换具有其优点: 子波分析在时域和频域同时具有良好的局部性质; 它能将信号或图像等分解成交织在一起的多尺度成分, 并对各种不同尺度(层次)成分采用相应粗细的时域或空域取同样步长, 从而能够不断地聚焦到所研究对象的任意微小细节; 具有数学意义上的严格的突变点诊断能力。

正是由于子波分析具有上述优点, 近 10 年来, 被当作工具和方法上的重大突破而已被广泛应用于信号处理、地震勘探、湍流研究、雷达监控、非线性科学和大气科学等领域, 并取得了丰硕的成果。本章将扼要地介绍子(小)波分析的一些基本理论。

1.1 函数空间和窗口 Fourier 变换

1.1.1 标准符号

为方便起见, 特定义以下的符号:

$\{ \}$	集合
$\cup$	并(集)
$\cap$	交(集)
$\subset$	真子集(包含)
$\forall$	存在
$\in$	属于
$\Leftrightarrow$	等价
$\rightarrow$	映射
$ \rangle$	基(矢)
$\bar{X}$	X 的共轭
N	自然数集
Z	整数集
C	复数集
N_0	表示 $N \cup \{0\}$
R	实数集
R^*	$\{x \mid x \in R, x \neq 0\}$
R^n	n 维欧氏空间
$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	R^n 的内积
$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$	C^n 的内积
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Hilbert 函数空间的内积

1.1.2 函数空间

由函数构成的,并赋予各种代数、拓扑等结构的集类称为函数空间,本章常用的函数空间有:预希尔伯特空间、赋范线性空间、Banach 空间、Hilbert 空间。

1.1.2.1 预希尔伯特空间

一个复(实)的预希尔伯特空间是一个赋予内积的复(实)线性

空间 H , 其内积是满足以下三个条件的一个映射: $H \times H \rightarrow C(R)$ 。

(1) 线性:

$$\langle au + v, w \rangle = a\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad (1.1)$$

(2) 对称性:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad (1.2)$$

(3) 非负性:

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \langle u, u \rangle = 0 \quad (\text{当且仅当 } u = 0) \quad (1.3)$$

1.1.2.2 赋范线性空间

一个实或复的线性空间 E , 如果其上赋予了一个被称为范数的泛函 $\| \cdot \| : E \rightarrow R$, 且满足以下三个条件, 则称为赋范线性空间。

(1) 非负性:

$$\| u \| \geq 0, \| u \| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad (1.4)$$

(2) 三角不等式:

$$\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \| \quad (1.5)$$

(3) 齐次性:

$$\| au \| = |a| \cdot \| u \| \quad (a \in R, \text{ 或 } a \in c) \quad (1.6)$$

1.1.2.3 Banach 空间

完备的赋范线性空间 E 称为 Banach (巴拿赫) 空间。这里的完备主要是指 E 中的任一柯西序列都有极限, 且此极限在 E 中, 而所谓的柯西序列 $\{u_n\}_n \in z$ 是指 $\| u_n - u_m \| \rightarrow 0$, 当 $n, m \rightarrow \infty$ 时。

1.1.2.4 Hilbert 空间

在一个预 Hilbert 空间 H 中, 若定义 $\| u \| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, 则 H 按 $\| \cdot \|$ 成为一个赋范空间, 若该导出的赋范空间还是完备的 (即为 Banach 空间), 则称 H 为 Hilbert 空间。它具有以下特性:

(1) 正交性: 如果 H 中的两个素 u 和 v 满足 $\langle u, v \rangle = 0$, 则称 u 和 v 是正交的。

(2) 正交投影: 设 V 是 Hilbert 空间 H 的一个闭子空间, 其正交

补 $V^\perp = \{W \in H \mid \langle w, v \rangle = 0 \text{ 对任意 } v \in V\}$, 则对任意 $u \in H$ 有唯一分解:

$$u = v + w, v \in V, w \in V^\perp \quad (1.7)$$

我们称 v 为 u 在闭子空间 V 上的正交投影, 并记该映射关系为 $v = P_v u$, 其中 P_v 为 H 到 V 上的投影算子。

(3) 正交展开(定理): 设 $\{v_k \mid k \in N\}$, 是 H 中两两正交的规范向量列, $V = \text{span}\{v_k \mid k \in N\}$ 则

$$P_v u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, v_k \rangle v_k, (u \in H) \quad (1.8)$$

且

$$\|P_v u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, v_k \rangle|^2 \quad (1.9)$$

在上式中 $u \in V$ 的充要条件为

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, v_k \rangle|^2 = \|u\|^2 \quad (1.10)$$

从而可知 $V = H$ 的充要条件为

$$\sum_k |\langle u, v_k \rangle|^2 = \|u\|^2 \text{ 对一切 } u \in H \text{ 成立} \quad (1.11)$$

此时, $\{v_k\}$ 为 H 的一个规范正交基。空间 H 中的一个规范正交系 $\{v_k\}$ 构成的一个规范正交基的充要条件是 $\langle u, v_k \rangle = 0$ (对所有的 k) 且蕴含 $u = 0$ 。即系 $\{v_k\}$ 在 H 中是完备的。

1.1.3 窗口 Fourier 变换

我们知道 Fourier 变换的优点是通过 Fourier 变换, 将对原来的函数 $f(x)$ 的研究, 转化为对数系数即共 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 的研究。因此 Fourier 分析是一种纯频域分析。这就决定了 Fourier 变换的缺点所在: 在时空域中没有任何分辨率, 即 $\hat{f}(\omega)$ 在任何有限频段上的信息都不足以确定在任意小范围内的函数 $f(x)$ 。换言之, 传统的 Fourier 变换不具有任何时间域空间尺度特性。为克服这一缺点, 使人们得以对信号作局部分析, Gabor 于 1946 年引入窗

口或短时 Fourier 变换。

取定 $g \in L^2(R)$, $\|g\|_{L^2(R)} \neq 0$, 当 $f \in L^2(R)$ 时, 定义

$$\mathcal{F}_g f(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{g}(x - q) e^{-ipx} dx \quad (\forall (p, q) \in R^2) \quad (1.12)$$

其中函数 $g(x)$ 是固定的, 称为窗函数。而 $\mathcal{F}_g f$ 称为函数 f 的以 g 为窗口的窗口 Fourier 变换。Gabor 当年所取的高斯窗口函数为

$$g(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1.13)$$

这样, 对于确定的具有单位能量(单位能量指 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = 1$) 的窗口函数 $g(x)$, 式(3.12)有如下逆变换:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R^2} (\mathcal{F}_g f)(p, q) g(x - q) e^{ipx} dp dq \quad (1.14)$$

显然, 窗口 Fourier 变换是一种时-频分析。但窗口 Fourier 变换对不同的频率成分(相应于 mp_0), 在时(空)域上的取样步长均为 p_0 , 而无法对不同的频率成分在时域上的取样步长使其具有调节性, 即高频者小, 低频者大。正是为了克服窗口 Fourier 变换不具有频率可调性的缺点, 人们才发展了子(小)波分析技术。

现在我们来分析一下窗口 Fourier 变换的意义。设 g 是定义在实轴上的函数 $g \in L^2(R)$, $(-\delta, \delta)$ 是一区间。如果 $|x| > -\delta$ 时, $|g(x)|$ 很小, 而且 $|x| < \delta$ 时, $g(x) > 0$, 且相对来说很大。我们就认为 g 基本上集中在区间 $(-\delta, \delta)$ 上。此时有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ipx} \bar{g}(x - q) f(x) dx \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{q-\delta}^{q+\delta} e^{-ipx} \bar{g}(x - q) f(x) dx \quad (1.15)$$

取定 $q = q_0$, 由(1.15)式可知, 研究函数 $p \rightarrow \mathcal{F}_g f$ 就可获得信号 $f(x)$ 在时域 $[q - \delta, q + \delta]$ 内的信息。取不同的 q_0 , 就可获得信号在不同的时间区域内的信息。而这点是 Fourier 变换所不能的。

1.2 多分辨率分析与子波

我们知道三角系中的函数在频率上或在 Fourier 变量 ω 上是完全局部化的,但在空间变量上则没有任何局部化。为解决上述矛盾,1985 年通讯理论研究学中发起了寻找关于空间变量与 Fourier 变量同时都好的 Hilbert 基的研究工作。为了得到子(小)波正交基的双重局部化(变化变量和空间变量),首先要对 Fourier 变量作局部化,然后再对空间变量作局部化,为使第二次局部化不致破坏第一次局部化,还应当遵守 Heisenberg 测不准原理。

人们希望子(小)波正交基(它是 L^2 空间的一组正交基)可以分析通常所使用的大部分函数空间,并进行了大量的研究工作。首例成功的工作是 Meyer 于 1986 年所构造出的具有一定衰减性质的光滑函数 Ψ ,它的二进制伸缩与平移系

$$\{\Psi_{j,k}(x)\} = 2^{-j/2}[\Psi(2^{-j}x - k)] \mid j, k \in \mathbb{Z} \quad (1.16)$$

构成了 $L^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基。在这之前,人们认为这样的函数 Ψ 是不存在的。

多分辨率的概念可以调和对空间变量的分析与对 Fourier 变量的分析以使得它们与 Heisenberg 测不准原理相溶。确切地说,要用一系列简单的函数 f_j 来逼近一个一般的函数,这些 $f_j = 2^{-j}z^n$ 上的取样所刻划。这些函数 f_j 的规律表现在它的 Fourier 变换 $\hat{f}_j$ 本质上等于半径为 C^{2^j} 的球上。尺度 2^{-j} 与相应球半径的关系几乎就是从 Heisenberg 测不准原理得到的结果。

子(小)波分析优于 Fourier 变换的地方是它在时域和领域上同时具有良好的局部化性质;而且由于对高频成分采用逐渐精细的时域或空域取样步长,从而可以聚焦到对象的任意细节。从这个意义上讲,它被人们誉为数字显微镜。