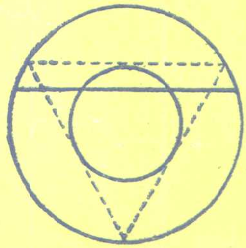
古今数学趣话



尹斌庸等著

四川科学技术出版社

古 今 数 学 趣 话

尹斌庸等著

四 川 科 学 技 术 出 版 社
一九八五年·成都

责任编辑　　张达扬
　　　　　　黄光骕

古今数学趣话　　尹斌庸等

四川科学技术出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　内江新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张6.5　字数135千
1985年3月第一版　　1985年3月第一次印刷
印数：1－16,300册

书号：13298·30　　定价：1.00元

编 者 的 话

几年来，本刊陆续发表过一些有关趣味数学的文章，如《费马的最后定理》、《震惊世界的四色猜想》、《摘取王冠上的明珠》等等。不少读者来信反映，这类生动有趣而又富于科学性的文章对他们启发很大。不仅增加了对数学的了解，而且激励他们去思索、去学习、去敲开数学宫殿的大门。他们都希望能更多地看到这类文章。为此我们编辑了这本《古今数学趣话》，以飨读者。

我们请了尹斌庸、李心灿、谈祥柏、彭塞之、解延年、王晓迪、魏炳全、蒯超英、王学青、甘超一等十位同志写稿，由尹斌庸同志负责汇总、审校。他们有的是知名的科普作家，有的在大学或中学执教数学多年，都有丰富的数学知识。不少文章是根据他们结合教学搜集的资料精心编写的。

我们希望，这本书能使读者获得一些数学知识、增加对数学的兴趣；古今中外的数学家那种锲而不舍的钻研精神，勤奋严谨的治学态度，能给大家一些启迪；他们成功的经验，失败的教训，也可作为我们的借鉴。从多方面吸取营养，必然有助于我们茁壮成长，鼓舞我们去攀登科学高峰，为四化建设作出贡献。

《课堂内外》编辑部

1984年1月

目　录

序　言

现在，一场向科学技术现代化进军的伟大革命运动正在迅猛兴起，我国科学技术事业正在进入一个新的发展阶段。数学是一切科学技术的基础，在这样的重大历史时刻，本书的作者们写出了《古今数学趣话》，从数学发展的历史长河中，选择了一些重要的发现，青年们感兴趣的问题，用生动活泼的语言写成，对青年们很有益处。读了这些东西，不但可以丰富知识，开阔眼界，而且还可以从数学家的奋斗历程中，从他们的一些思想、见解、经验中，获得激励自己意志，启迪自己思想的成材之路。

青年同志们，希望你们不断掌握数学知识，提高对自然的认识，对社会的认识，继往开来，很好地为我国社会主义四化建设作出贡献。

柯　召

一九八三年七月

李心灿

墓碑上的数学

一些古今中外名人的墓碑上，常常言简意赅地书写出他们一生的追求和业绩。这里，介绍几位著名数学家以及他们有趣的墓碑。

阿基米德和球的定理

在意大利南端的西西里岛，有个地方叫叙拉古。那儿竖立着一块墓碑，上面刻着一个圆柱，里面装了一个球，球和圆柱相切，而且球的直径正好和圆柱的高相等。这是什么意思？这正是阿基米德关于球的有名定理：球的体积等于和它外切而等高的圆柱体体积的$\frac{2}{3}$；球的表面积等于这个圆柱体表面积的$\frac{2}{3}$。根据这个定理我们很容易推得球的体积$V=\frac{4}{3}\pi r^3$；球的表面积$A=4\pi r^2$（r是球的半径）。

著名数学家莱布尼兹曾说过："了解了阿基米德……的人，对后来杰出人物的成就，就不那么钦佩了。"希腊的阿基米德（公元前287—212），是人们公认的一位古代伟大的数学家，他具有惊人的创造力和熟练的计算技巧。欧洲民族几乎经过了两千年才达到他的数学水平。因此人们把阿基米

德誉为“数学之神”。

叙拉古的墓碑就是阿基米德的。是谁为他建立了这块别致的墓碑呢？不是别人，竟是敬畏他的敌军统帅——罗马帝国将军马塞拉斯。

在第二次布匿战争时，马塞拉斯率领罗马大军围攻叙拉古。阿基米德为了保卫祖国，毫无保留地献出了自己所有的科学技术知识。据传说，当罗马战船驶近城下时，阿基米德设计的一种“起重机”抓住敌船，高高举起，然后猛抛出去，使敌船粉身碎骨；他还用一种新奇的机械，射出大石锥枪，使敌军心胆俱裂；他又叫士兵用无数反光的铜镜反射日光，焚烧敌船，如此等等。致使马塞拉斯惊呼：“我们是在同数学家打仗！他安稳地待在城里，能够击沉我们的船只。一下子向我们发射出那么多利箭，简直赛过了神话里的百手巨人！”这样，使罗马士兵一度不敢靠近城墙，甚至看见城墙上出现一根绳子之类的玩意儿，就吓得赶快逃跑。然而围城三年之后，叙拉古终因粮绝而陷落。马塞拉斯出于对阿基米德才智的敬佩，下令要活捉他。一个罗马士兵找到阿基米德，见他正潜心地在地上埋头画图，士兵将图形踩坏。阿基米德怒斥道：“不要弄坏了我的图！”这个士兵命令阿基米德跟他走，阿基米德说：“再给我一会工夫，让我把这条定理证完，不能给后人留下一条没有证明的定理啊。”那个蛮横的士兵一怒之下，拔出剑来把阿基米德杀死。马塞拉斯为此非常悲痛，处死了那个蛮横的士兵。他还为阿基米德建立了一座颇为宏伟的陵墓，在墓碑上根据阿基米德的遗愿刻了这个“球内切于圆柱”的几何图形，使后人永远缅怀这位爱国的伟大科学家。

丢番图和谜语方程

丢番图（约246—330）是古希腊最杰出的数学家之一，他被人们誉为“代数学的鼻祖”。

他写了不少数学著作，其中《算术》一书是关于代数的一部最早的论著。它独树一帜，完全避开了几何的形式。在这本书中，我们第一次看到了代数符号的有系统的使用；看到了各种不定方程的巧妙解法。在数学史上，这部书的重要性可以和欧几里得的《几何原本》相媲美。

可是，这位被誉为代数学鼻祖的丢番图，他的生平事迹几乎一点也没有留下来，人们只是偶然地在他的墓志铭上知道了他的一些情况。有趣的是，他一生的大概情况却是用一道谜语式的代数方程写出来的：

“过路人！这儿埋着丢番图的骨灰。下面的数目可以告诉您他活了多少岁。

他生命的六分之一是幸福的童年。

再活十二分之一，颊上长出了细细的胡须。

又过了生命的七分之一他才结婚。

再过了五年他感到很幸福，得了一个儿子。

可是这孩子光辉灿烂的生命只有他父亲的一半。

儿子死后，老人在悲痛中活了四年，结束了尘世的生涯。

请问您，丢番图活了多少岁，多少岁结的婚，多少岁生孩子？”

根据这段墓志铭可以列出方程：

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

解此方程，得出$x=84$ 。即丢番图活了84岁，并且可以算出他33岁才结婚，38岁才得子。

雅科布·伯努利和对数螺线

雅科布·伯努利（1654—1705）是十七世纪瑞士巴塞尔著名数学家族中的重要成员，他对数学领域的许多分支都作出过极重要的贡献。他发明了极坐标，研究过一系列特殊曲线。尤其是对数螺线，他作了极深入的研究。对数螺线又名“等角螺线”，它的极坐标方程是$\rho=\alpha e^{k\theta}$（图1）。这是一种十分美妙而奇特的螺线，生物界到处都可以看到这种螺线。在鹦鹉螺壳（图2）、延命菊头状花序（正反两组）、向日葵种籽排列、牵牛花嫩芽上，以及松果的鳞片、菠萝的

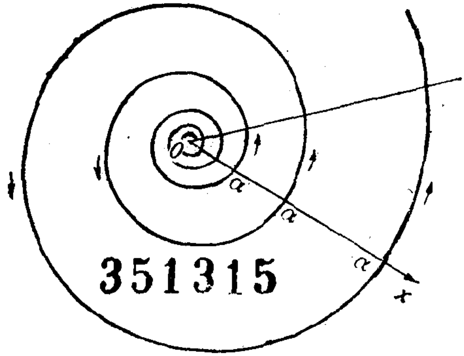


图1

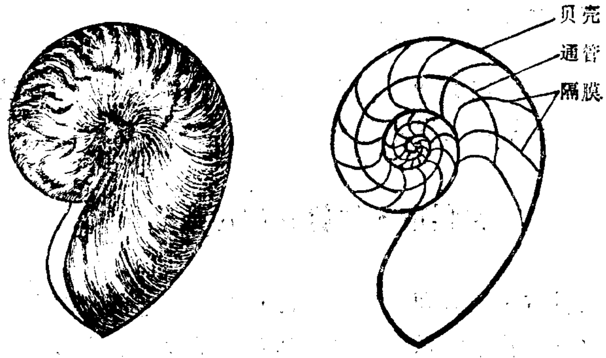


图2

瘤状物中，甚至在象的牙齿、野羊的角、金丝雀的脚爪里都可以看到对数螺线。雅科布·伯努利发现对数螺线在各种变换之下的许多不变性质：它的渐屈线和渐伸线都是对数螺线；自极点到切线的垂足轨迹也是对数螺线；以极点为发光点经过对数螺线反射后得到无数反射线，和所有这些反射线相切的曲线叫回光线，这回光线也是对数螺线。因此，他非常赞叹对数螺线这一系列美妙的性质，特地在遗嘱里要求将一正一反的两条对数螺线刻在他的墓碑上，并附以颂词："我虽然变了，但却和原来一样。"这件事充分表现出这位数学家对自己从事的研究工作的热爱，体现了他对事业的不断追求。雅科布·伯努利这个遗愿后来实现了，现在我们可以在他的墓碑上看到一对美妙而奇特的对数螺线和颂词。

高斯和正十七边形

在德国哥廷根大学里，有一座高斯的雕像。这座雕像的

底座很别致，它是一个正十七边形的棱柱。

为什么要建立这样一个以正十七边形棱柱为底座的高斯雕像呢？

高　斯

高斯（1777—1855）是有史以来成熟最早而又永葆创造力的一位伟大数学家，他被人们誉为“神童”和“数学之王”。有关他天资聪敏的奇闻轶事很多。高斯10岁那年，数学教师布特纳给学生出了一道1＋2＋3＋4＋…＋50＋51＋…＋97＋98＋99＋100的算术题，刚讲完题目不久，高斯就把写有答案的石板交了上去。布特纳起初并不在意，心想这个全班最小的学生准是瞎写了些什么，要不就是交了白卷。当布特纳发现全班

唯一正确的答案——5050竟是属于高斯时，他才大吃一惊！而使他更为惊奇的是高斯用了教师未曾讲过的一种巧妙方法：$1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，$4+97=101$，…$50+51=101$，共有50个101相加，即50×101，故得5050。而其余的学生几乎都是硬算的。有经验的布特纳立刻意识到这是一件不寻常的事，他看出高斯聪敏的天资。于是他买了一本很好的算术书送给高斯，并对别人说：“他已超过了我。”高斯后来在布特纳的助手——一位很有才华的青年教师巴特尔斯的指导下，学习了很多数学知识。在巴特尔斯的推荐下，高斯得到一位公爵的资助，于1795年进入哥廷根大学学习。这时，在选择数学还是古典文学上，高斯曾长期地犹豫不决。他不但很有数学才华，而且在古典文学的研究上也大有拔类超群、显赫成名的希望。1796年，年方19岁的高斯为一个自欧几里得以来两千年悬而未决的数学难题所吸引——用尺规方法作一个正n边形的可能性问题。希腊人已经知道，当n等于3、4、5时，如何用直尺圆规作出这些图形，以及利用累次二等分的方法，从这些图形推演出另一些图形来。高斯通过顽强的探索，在这一年找到了用尺规作出正17边形的方法，并严格地证明出只有当$n=2^{2^m}+1$（$m=0$，1，2，…），而且n为素数时，作图才是可能的。从而解决了这个两千年来悬而未决的难题。这一成功，促使他毅然决定放弃古典文学的研究，而潜心钻研数学，最后成为一位伟大的数学家。高斯去世后，他的母校哥廷根大学为了纪念他发现正17边形规尺作图法，以及由此而献身数学的事迹，特地建立了这个以正17边形棱柱为底座的雕像。

彭塞之

轰动全球的四色问题

“四色猜想”的由来

1852年，刚从大学毕业的学生弗南西斯·葛斯里，在对英国地图着色的时候，发现一个很有趣的现象：对无论多么复杂的地图，只消用四种色调就足以将相邻区域分开。弗南西斯感到这决不是一个偶然现象，其中说不定隐藏着某种深刻的科学道理哩。他把自己的想法告诉胞兄弗德雷克·葛斯里，请他解决。后者是著名数学家德·摩根教授的学生。他对弟弟提出的问题很感兴趣，并敏锐地感到，这个地图着色问题很可能是个数学问题，于是准备给出数学证明。尽管他绞尽脑汁，却百思不得其解。当年10月23日，弗德雷克第一次用数学的形式作为“四色定理”请求德·摩根给以证明。摩根教授对自己的学生所提出的定理有着浓厚的兴趣，当即写信将这事告诉了他在三一学院时的学友、著名数学家和物理学家哈密尔顿爵士：“我的一个学生今天要我为他提供一个充分的理由，来说明一件我自己还无法判明究竟是对的还是错的事实。他说，如果画一张图，图上任意分成许多部分，凡是有共同边界线的两部分要涂上不同的颜色。那么，大概需要四种颜色，而不需要更多的颜色就可以了。请问：难道不能

够构造出一个需要五种或者更多种颜色的图么？”

摩根教授期望这位智慧超人的超复数的缔造者能够给出答案。哈密尔顿爵士根本没有想到，一个学生提出的这样一个简简单单的问题，居然会如此意想不到的困难。他经过长达13年的冥思苦索，直到1865年逝世为止，对此染色定理，始终一筹莫展，毫无结果。

哈氏死后13年，1878年6月13日，一位当时很有名望的数学家凯莱，在数学年会上宣读他曾在伦敦数学会会刊上发表过的一篇文章时，将上述问题归纳为“四色猜想”。并在1879年英国皇家地理会创办的第一期会刊上，再次提及这个“猜想”，征求对这一“猜想”的正确解答。

凯莱的文章和讲话，引起了很大的反响，吸引了一大批很有才华的有志之士去探索这一难题的奥秘。值得一提的是，在这群有志之士中，有的人并不是以数学为专业的，而仅仅是对“四色猜想”着了迷而改攻数学的。这便是轰动全球的“四色猜想”的由来。

发扬风尚的游戏

自凯莱归纳出“四色猜想”后，恰好一年光景，律师出身而改钻数学的数学家肯普写成一篇论文，给出了第一个证明。证明发表以后，人们普遍认为“四色难题”已成为历史，“猜想”已变为现实。不料11年后，到了1890年，有位年仅20岁的后起之秀希伍德，指出肯普的证明是错误的。这样一来，“四色猜想”依旧悬而未决。希伍德在指出肯普律师的错误时，也肯定了他的成绩，并且还采用肯普在论文中

提供的方法成功地证明了“五色定理”。

经过这次波折，研究“四色猜想”的情绪更加振奋起来，热衷这一难题的有志者比比皆是。为了让人们凭直觉在客观上证实这个猜想必然成立，数学家斯蒂芬还设计出一种风行一时的“染色游戏”。游戏由两人（或多人）参加，第一人任画一闭合区域，由对手着色；着完色后，后者再画一闭合区域让对手（或是第三者）染色，如此循环进行。游戏规定，不论谁，若着色完毕并画出闭合区域后，迫使后继者非染第五种色调不可时，便判谁为负。这个规定很有意思，整个游戏中，每次染色都得为后继者着想，不能迫使他用第五种色。如图3，当E区画定时，D区只能染黄色。否则，由于E区与前四区相邻，后继者非染第五种颜色不可。这充分表明，要想迫使对方非染第五种颜色，那真是易如反掌。可是，游戏规定，谁这样作谁便为负。所以，必须时刻发扬风格，才能使自己立于不败之地。

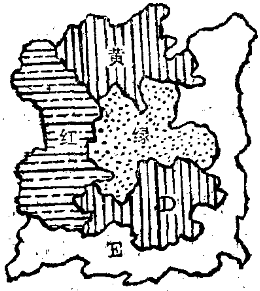


图3

那么，是否只要切实地注意发扬风格，就确实能立于不败之地呢？据说，自倡导染色游戏以来，没有谁真正负过一次。这在客观上便生动表明：不管闭合区域多么复杂、多么怪，只用四色涂染，相邻区域肯定能分开。换句话说，“四色猜想”的必然成立是毫无疑义的。

但是，游戏毕竟是游戏，它只能说明四色猜想成立与否的趋向性，怎么也不能用游戏去代替科学证明。那么，在理