数学分析习题集题解

曹 敏 谦

上海交通大学应用数学系

本解答系根据李荣涑泽Б.П.吉米多维奇著“数学分析习题集”（修订本）而作。第11分册包括第七章带参数的积分。

目　　录

第七章　带参数的积分

第七章　带参数的积分

§1. 带参数的常义积分

1° 积分的连续性　若函数 $f(x, y)$ 于有界的域 $R[a\leqslant x\leqslant A;\ b\leqslant y\leqslant B]$ 内有定义并且是连续的，则

$$F(y)=\int_a^A f(x, y)dx$$

是在闭区间 $b\leqslant y\leqslant B$ 上连续的函数。

2° 积分符号下的微分法　若除在 1° 中所已指明的条件之外，并且偏导函数 $f'_y(x, y)$ 在区域 R 内连续，则当 $b<y<B$ 时莱布尼兹公式

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)dx=\int_a^A f'_y(x, y)dx$$

为真。

在更普遍的情况下，当积分的限为参数 y 的可微分函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 并且当 $b<y<B$ 时 $a\leqslant\varphi(y)\leqslant A$，$a\leqslant\psi(y)\leqslant A$，有：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)dx\\&=f[\psi(y), y]\psi'(y)-f[\varphi(y), y]\varphi'(y)\\&+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)dx\quad(b<y<B)。\end{aligned}$$

3° 积分号下的积分法　在 1° 的条件下有：

$$\int_b^B dy\int_a^A f(x, y)dx=\int_a^A dx\int_b^B f(x, y)dy。$$

3711．证明：不连续函数 $f(x, y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x, y)dx$$

为连续函数。作出函数 $u=F(y)$ 的图形。

证：由于积分区间为 $0\leqslant x\leqslant 1$，故

当 $y<0$ 时，$f(x, y)=1$；

当 $y=0$ 时，$f(x, y)=\begin{cases} 0, & 当\ x=0, \\ 1, & 当\ x>0; \end{cases}$

当 $0<y<1$ 时，$f(x, y)=\begin{cases} -1, & 当\ x<y, \\ 0, & 当\ x=y, \\ 1, & 当\ x>y; \end{cases}$

当 $y=1$ 时，$f(x, y)=\begin{cases} -1, & 当\ x<1, \\ 0, & 当\ x=1; \end{cases}$

当 $y>1$ 时，$f(x, y)=-1$。

因此，当 $y\leqslant 0$ 时，

$$F(y)=\int_0^1 1dx=1;$$

当 $0<y<1$ 时，

$$F(y)=\int_0^y f(x, y)dx+\int_y^1 f(x, y)dx$$

$$=\int_0^y(-1)dx+\int_y^1 1dx=1-2y;$$

当 $y\geqslant 1$ 时，

$$F(y)=\int_0^1(-1)dx=-1。$$

合并以上结果得

$$F(y)=\begin{cases} 1, & 当\quad y\leqslant 0, \\ 1-2y, & 当\ 0<y<1, \\ -1, & 当\quad y\geqslant 1。 \end{cases}$$

明显地，$u=F(y)$是y的连续函数，它的图形如下。

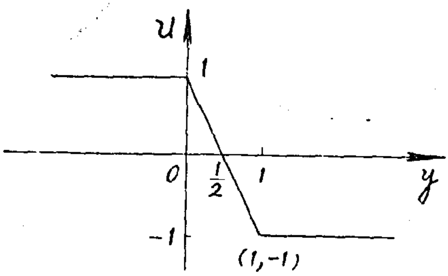

图 3711 题

3712．研究函数

$$F(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性，其中$f(x)$在闭区间[0，1]上是正的连续函数。

解：设　$g(x,\ y)=\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}$。

当$y\neq 0$时，$g(x,\ y)$是$(x,\ y)$的连续函数，故对于任意的$\varepsilon>0$。存在$\delta>0$，当$|\Delta y|<\delta$时，有

$$|g(x,\ y+\Delta y)-g(x,\ y)|<\varepsilon。$$

由此得

$$\left|\int_0^1 g(x,\ y+\Delta y)dx-\int_0^1 g(x,\ y)dx\right|$$

$$\leqslant\int_0^1 |g(x,\ y+\Delta y)-g(x,\ y)|dx$$

$$\leqslant\int_0^1 \varepsilon dx=\varepsilon,$$

此即当$y\neq 0$时，$\lim\limits_{\Delta y\to 0}F(y+\Delta y)=F(y)$。

故当 $y\neq 0$ 时 $F(y)$连续。

当 $y=0$ 时，$F(y)=F(0)=0$，又

$$F(\Delta y)=\int_0^1 \frac{\Delta y f(x)}{x^2+(\Delta y)^2}dx。$$

由于 $f(x)$是在[0，1]上的连续函数且取正值，故 $f(x)\geqslant m>0$，其中 m 是 $f(x)$在[0，1]上的最小值。由此得

$$F(\Delta y)\geqslant m\int_0^1 \frac{\Delta y}{x^2+(\Delta y)^2}dx=m\,\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{\Delta y}。$$

$$F(+0)=\lim_{\Delta y\to+0}F(\Delta y)\geqslant m\cdot\frac{\pi}{2}>0。$$

故 $y=0$ 是函数 $u=F(y)$的唯一不连续点。

3713．求：

(a) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$；

(б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$；

(в) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$；

(г) $\lim\limits_{n\to 0}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$。

解：设 $f(x,\alpha)$是 x 和 α 的二元连续函数，又 $\varphi(\alpha)$和 $\psi(\alpha)$是 α 的连续函数，则

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}f(x,\alpha)dx=\int_{\varphi(\alpha_0)}^{\psi(\alpha_0)}f(x,\alpha_0)dx。$$

故对于(a)，(б)，(в)三小题，立即有

(а)　原式$=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$；

(б)　原式$=\int_{-1}^{1}|x|dx=2\int_0^1 xdx=1$；

(в)　原式$=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$。

(г)　设 $\frac{1}{n}=h$，则 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=(1+hx)^{\frac{1}{h}}$。

如果把 h 看作连续变量，则由于 $\lim\limits_{h\to0}(1+hx)^{\frac{1}{h}}=e^x$，故若定义

$$f(x,\ h)=\begin{cases}(1+hx)^{\frac{1}{h}}, & \text{当 } h\neq0,\\ e^x, & \text{当 } h=0,\end{cases}$$

则 $f(x,\ h)$是 x 和 h 的连续函数，因而有

$$原式=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^1\frac{e^xdx}{e^x(1+e^x)}$$

$$=\int_1^e\frac{dt}{t(1+t)}=[\ln t-\ln(1+t)]_1^e=\ln\frac{2e}{1+e}。$$

3714．设函数 $f(x)$在闭区间$[a,\ A]$上连续。证明

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a)$$

$$(a<x<A)。$$

证：由于 $f(x)$只在$[a,\ A]$上连续，因此，要使积分 $\int_a^x f(t+h)dt$ 存在，就必须 $h>0$。否则就要假定存在正数 δ，$f(x)$在 $[a-\delta,\ A]$ 上连续。

$$\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=$$

$$=\int_a^x f(t+h)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_{a+h}^{x+h} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+h} f(t)dt-\int_a^{a+h} f(t)dt。$$

由积分中值定理，

$$\int_x^{x+h} f(t)dt=hf(x+\theta_1 h),\quad 0<\theta_1<1,$$

$$\int_a^{a+h} f(t)dt=hf(a+\theta_2 h),\quad 0<\theta_2<1,$$

由此得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt$$

$$=\lim_{h\to 0}[f(x+\theta_1 h)-f(a+\theta_2 h)]$$

$$=f(x)-f(a)。$$

3715．在下式中可否于积分符号下完成极限运算

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx?$$

解：$\displaystyle\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}e^{-\frac{x^2}{y^2}}\Big|_{x=0}^{x=1}$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}(e^{-\frac{1}{y^2}}-1)=\frac{1}{2}。$$

另一方面，

$$\int_0^1\lim_{y\to 0}\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}dx=\int_0^1 0dx=0。$$

故不能于积分符号下取极限。这是由于函数$\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$在(0，0)点不连续而造成的。

3716．当 $y=0$，可否根据莱布尼兹法则计算函数

$$F(y)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

的导数？

解：在积分号下求导数，则有

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\bigg|_{y=0} dx=\int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0} dx=0。$$

另一方面，

$$F(0)=\int_0^1 \ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}[x\ln x-x]_\varepsilon^1=-1。$$

当 $y\neq0$ 时，

$$F(y)=\Big[x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big]_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-1+y\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}。$$

故 $$F'(0)=\lim_{y\to0}\frac{F(y)-F(0)}{y}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+y\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}}{y}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 当\ y\to+0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & 当\ y\to-0。\end{cases}$$

由此可见，不能用莱布尼兹法则计算 $F'(0)$，这是由于函数 $\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在 (0，0) 点不连续。

3717．若

$$F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy,$$

计算 $F'(x)$。

解：被积函数以及积分上下限满足莱布尼兹公式的条件，故若

$$\Phi(x)=\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\varphi(x, y)dy,$$

则 $$\Phi'(x)=\varphi[x, \psi_2(x)]\psi_2'(x)-\varphi[x, \psi_1(x)]\psi_1'(x)+\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}\varphi_x'(x, y)dy.$$

将此应用到所论积分，则有

$$F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2} y^2e^{-xy^2}dy.$$

3718. 设：

(а) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$;

(б) $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x}dx$;

(в) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$;

(г) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)dx$;

(д) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2} dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy$,

求 $F'(\alpha)$。

解：运用§1 内容提要 2° 积分符号下的微分法。

(а) $$F'(\alpha)=-e^{\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\sin\alpha-e^{\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\cos\alpha+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\left(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha\right)$$
$$+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx。$$

(б) $$F'(\alpha)=\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}$$
$$+\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)$$
$$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha)。$$

(в) $$F'(\alpha)=\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}+\int_0^\alpha\frac{dx}{1+\alpha x}$$
$$=\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\alpha}$$
$$=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)。$$

(г) $$F'(\alpha)=f(2\alpha,\ 0)+\int_0^\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha,\ x-\alpha)dx$$
$$=f(2\alpha,0)+\int_0^\alpha\left[\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}\right]dx,$$

其中 $u=x+\alpha,\ v=x-\alpha$。

也可以作变换 $x-\alpha=v$，则

$$F(\alpha)=\int_{-\alpha}^0 f(v+2\alpha,\ v)dv$$
$$=-\int_0^{-\alpha}f(v+2\alpha,\ v)dv。$$
$$F'(\alpha)=-(-1)f(v+2\alpha,\ v)|_{v=-\alpha}$$
$$-\int_0^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(v+2\alpha,\ v)dv$$

$$=f(a,\ -a)+\int_{-a}^{0}2\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}dv$$

（其中 $u=v+2a$）

$$=f(a,\ -a)+2\int_{0}^{a}\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial u}dv。$$

还可以作变换 $x+a=u$，则

$$F(a)=\int_{a}^{2a}f(u,\ u-2a)du。$$

$$F'(a)=2f(2a,\ 0)-f(a,\ -a)$$

$$+\int_{a}^{2a}\frac{\partial f(u,\ u-2a)}{\partial a}du$$

$$=2f(2a,\ 0)-f(a,\ -a)$$

$$+\int_{a}^{2a}(-2)\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}du$$

（其中 $v=u-2a$）

$$=2f(2a,\ 0)-f(a,\ -a)$$

$$-2\int_{0}^{a}\frac{\partial f(u,\ v)}{\partial v}du。$$

(Ⅱ) 设 $f(x,\ a)=\int_{x-a}^{x+a}\sin(x^2+y^2-a^2)dy$，

则 $F(a)=\int_{0}^{a^2}f(x,\ a)dx。$

故 $$F'(a)=2af(a^2,\ a)+\int_{0}^{a^2}\frac{\partial f(x,\ a)}{\partial a}dx。\tag{1}$$

$$f(a^2,\ a)=\int_{a^2-a}^{a^2+a}\sin(a^4-a^2+y^2)dy,$$

以及 $$\frac{\partial f(x,\ a)}{\partial a}=\sin[x^2+(x+a)^2-a^2]$$

$$-(-1)\sin[x^2+(x-a)^2-a^2]$$

$$+\int_{x-a}^{x+a} -2a\cos(x^2+y^2-a^2)dy$$

$$=\sin(2x^2+2ax)+\sin(2x^2-2ax)$$

$$-2a\int_{x-a}^{x+a}\cos(x^2+y^2-a^2)dy$$

$$=2\sin 2x^2\cos 2ax$$

$$-2a\int_{x-a}^{x+a}\cos(x^2+y^2-a^2)dy。$$

代入(1)式得

$$F'(a)=2a\int_{a^2-a}^{a^2+a}\sin(a^4-a^2+y^2)dy$$

$$+2\int_0^{a^2}\sin 2x^2\cos 2ax dx$$

$$-2a\int_0^{a^2}dx\int_{x-a}^{x+a}\cos(x^2+y^2-a^2)dy。$$

3719．若

$$F(x)=\int_0^x (x+y)f(y)dy,$$

其中 $f(x)$为可微分的函数，求 $F''(x)$。

解： $F(x)=x\int_0^x f(y)dy+\int_0^x yf(y)dy。$

$$F'(x)=\int_0^x f(y)dy+xf(x)+xf(x)$$

$$=\int_0^x f(y)dy+2xf(x)。$$

$$F''(x)=f(x)+2xf'(x)+2f(x)=3f(x)+2xf'(x)。$$

3720．设

$$F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|dy,$$

其中 $a<b$ 及 $f(y)$为可微分的函数，求 $F''(x)$。

解：条件 $f(y)$ 为可微分的函数太强了，只需 $f(y)$ 为连续函数即可。

设 $x\leqslant a$，则 $F(x)=-\int_a^b f(y)(x-y)dy$

$$=\int_a^b yf(y)dy-x\int_a^b f(y)dy。$$

故当 $x<a$ 时，$F'(x)=-\int_a^b f(y)dy$。

$$F''(x)=0。$$

同理当 $x>b$ 时，$F''(x)=0$。

当 $a<x<b$ 时，

$$F(x)=\int_a^x f(y)(x-y)dy-\int_x^b f(y)(x-y)dy。$$

$$F'(x)=\int_a^x f(y)dy-\int_x^b f(y)dy。$$

$$F''(x)=f(x)-[-f(x)]=2f(x)。$$

再求 $F'(a)$ 和 $F''(a)$ 以及 $F'(b)$ 和 $F''(b)$。

先求 $F'(a-0)$，再求 $F'(a+0)$。

$$F'(a-0)=\lim_{x\to a-0}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a-0}\frac{1}{x-a}\left[-\int_a^b f(y)(x-y)dy\right.$$

$$\left.+\int_a^b f(y)(a-y)dy\right]$$

$$=\lim_{x\to a-0}\frac{1}{x-a}\int_a^b f(y)(a-x)dy$$

$$=-\int_a^b f(y)dy。$$

$$F'(a+0)=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{x-a}\left[\int_a^x f(y)(x-y)dy\right.$$

$$-\int_x^b f(y)(x-y)dy+\int_a^b f(y)(a-y)dy\Big]$$

$$=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{x-a}\Big[\int_a^x f(y)(x+a-2y)dy$$

$$+\int_x^b f(y)(a-x)dy\Big]$$

$$=\lim_{x\to a+0}\Big[\int_a^x f(y)dy-\int_x^b f(y)dy$$

$$-\frac{2\int_a^x f(y)(y-a)dy}{x-a}\Big]$$

$$=-\int_a^b f(y)dy-\lim_{x\to a+0}2f(x)(x-a)$$

（由洛比塔法则）

$$=-\int_a^b f(y)dy。$$

$F'(a-0)=F'(a+0)$，故知 $F'(a)=-\int_a^b f(y)dy$。

$$F''(a-0)=\lim_{x\to a-0}\frac{F'(x)-F'(a)}{x-a}=0。$$

$$F''(a+0)=\lim_{x\to a+0}\frac{F'(x)-F'(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{x-a}\Big[\int_a^x f(y)dy$$

$$-\int_x^b f(y)dy+\int_a^b f(y)dy\Big]$$

$$=\lim_{x\to a+0}\frac{2}{x-a}\int_a^x f(y)dy$$

$$=2f(x)。$$

由此可知仅当 $f(a)=0$ 时，$F''(a)$存在且等于 0。

同理可知，仅当 $f(b)=0$ 时，$F''(b)$存在且等于 0。

3721. 设

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_0^h f(x+\xi+\eta)d\eta \quad (h>0),$$

其中 $f(x)$为连续函数，求 $F''(x)$。

解：设　$x+\xi+\eta=t$，则

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h d\xi\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(t)dt。$$

$$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h [f(x+\xi+h)-f(x+\xi)]d\xi。$$

再设 $x+\xi+h=u$，$x+\xi=v$，则

$$F'(x)=\frac{1}{h^2}\int_{x+h}^{x+2h} f(u)du-\frac{1}{h^2}\int_x^{x+h} f(v)dv。$$

$$F''(x)=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-f(x+h)]$$

$$-\frac{1}{h^2}[f(x+h)-f(x)]$$

$$=\frac{1}{h^2}[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)]。$$

3722. 设

$$F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$。

解：这里要假设 $f(t)$ 是连续函数。

由莱布尼兹法则知

$$F'(x)=[f(t)(x-t)^{n-1}]_{t=x}$$

$$+\int_0^x \frac{\partial}{\partial x}f(t)(x-t)^{n-1}dt$$