

配合全国最新教材 体现大纲改革精神
恒谦教学与备考研究中心最新成果

全程学习系列丛书

高中

全程
学习
高一数学
(试验修订本)

主编 高立东 陈 威

 中国人民大学出版社

全程学习系列丛书

高中全程学习

高一数学

(试验修订本)

主 编	高立东	陈 威	
撰稿人	刘 乙	汪笑梅	赫荣兰
	孙永成	田春华	李兴才
	曹亚民		

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中全程学习·高一数学·试验修订本/高立东,陈威主编.
北京:中国人民大学出版社,2001
(全程学习系列丛书)

ISBN 7-300-03817-4/G·807

I. 高…

II. ①高…②陈…

III. 数学课—高中—教学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 044915 号

全程学习系列丛书

高中全程学习

高一数学

(试验修订本)

主 编 高立东 陈 威

出版发行:中国人民大学出版社

(北京中关村大街 31 号 邮编 100080)

邮购部:62515351 门市部:62514148

总编室:62511242 出版部:62511239

E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn

经 销:新华书店

印 刷:北京市丰台区印刷厂

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:16.875

2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

字数:583 000

定价:19.00 元

(图书出现印装问题,本社负责调换)

编者的话

《全程学习系列丛书》自问世以来，连续三年累计销量近20万套，在全国众多的教辅图书中独树一帜，形成了自身特有的品牌。截至今日，模仿或抄袭“全程学习”的其他图书层出不穷，严重影响了“全程学习”的品牌形象。为不辜负广大师生对全程品牌所寄予的厚望，我们特意组织《全程学习系列丛书》编委会的主要负责老师经过一年的调查、研究，在原有的基础上博采众长，依据教育部颁布的最新教学大纲和人教版的最新教材，设计了全新的编写体例，重新编写了所有新教材的相应分册，更新了与新教材不配套的内容和题型，力图奉献给广大读者一套全新版的《全程学习系列丛书》。

该丛书保持原有的特点，在每节（课）内主要帮助学生梳理知识要点、巩固重点、突破难点，打好基础。我们之所以这样安排，首先是为确保该书与现行教材的同步性，其次是遵循学生认知的规律——由知识到能力。考虑到教育改革正从应试教育向素质教育转变，我们在每章或单元之后设计了有关能力培养的栏目，旨在让学生在掌握基础知识之后，能趁热打铁，融会贯通全章知识内容，加强综合能力的培养，从而提高分析问题和解决问题的能力。

本丛书既有精辟的理论分析，也有难易适度的习题设计，还有大量创新性、开放性的例题和习题，全套书具有同步性强、信息量大、科学实用等特点，相信全新版的《全程学习系列丛书》必将成为全国文教图书中的一朵奇葩。

由于时间仓促，水平有限，错漏不当之处敬请广大读者批评指正，以便我们再版时改进。

《全程学习系列丛书》编委会

2001年6月

目 录

第一章 集合与简易逻辑	(1)
1.1 集合	(2)
1.2 子集、全集、补集	(7)
1.3 交集、并集	(12)
1.4 含绝对值的不等式解法	(19)
1.5 一元二次不等式解法	(25)
1.6 逻辑联结词	(31)
1.7 四种命题	(38)
1.8 充分条件与必要条件	(46)
第二章 函数	(69)
2.1 映射	(70)
2.2 函数	(74)
2.3 函数的单调性和奇偶性	(82)
2.4 反函数	(93)
2.5 指数	(99)
2.6 指数函数	(104)
2.7 对数	(110)
2.8 对数函数	(116)
2.9 函数的应用举例	(122)
第三章 数列	(153)
3.1 数列	(154)
3.2 等差数列	(160)
3.3 等差数列的前 n 项和	(167)
3.4 等比数列	(177)
3.5 等比数列的前 n 项和	(186)

3.6 研究性课题:分期付款中的有关计算	(195)
第四章 三角函数	(226)
4.1 角的概念的推广	(227)
4.2 弧度制	(231)
4.3 任意角的三角函数	(235)
4.4 同角三角函数的基本关系式	(242)
4.5 正弦、余弦的诱导公式	(251)
4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切	(258)
4.7 二倍角的正弦、余弦、正切	(267)
4.8 正弦函数、余弦函数的图像和性质	(282)
4.9 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图像	(292)
4.10 正切函数的图像和性质	(301)
4.11 已知三角函数值求角	(309)
第五章 平面向量	(354)
5.1 向量	(355)
5.2 向量的加法与减法	(358)
5.3 实数与向量的积	(365)
5.4 平面向量的坐标运算	(373)
5.5 线段的定比分点	(379)
5.6 平面向量的数量积及运算律	(387)
5.7 平面向量数量积的坐标表示	(395)
5.8 平移	(403)
5.9 正弦定理、余弦定理	(410)
5.10 解斜三角形应用举例	(419)
5.11 研究性课题:向量在物理中的应用	(425)
参考答案	(450)
编者后记	(532)

第一章 集合与简易逻辑

——本章内容概要——



本章主要内容是集合的初步知识和简易逻辑知识. 其中, 集合的初步知识包括集合的有关概念、简单集合的表示以及集合与集合之间的关系; 简易逻辑主要介绍逻辑关联词“或”、“且”、“非”, 四种命题及充要条件.

本章重点是集合的基本概念、逻辑关联词“或”、“且”、“非”及充要条件, 难点是集合基本概念的含义及其相互间的区别与联系、真假命题的判断.

本章学习目标

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.
2. 了解空集和全集的意义.
3. 了解属于、包含、相等关系的意义.
4. 会用集合的有关术语和符号表示一些简单的集合.
5. 掌握简单的绝对值不等式与一元二次不等式的解法.
6. 理解逻辑关联词“或”、“且”、“非”的含义.
7. 理解四种命题及其相互关系.
8. 初步掌握充要条件.
9. 会用集合思想解决一些简单的实际问题.

集合初步知识与简易逻辑知识是掌握和使用数学语言的基础, 是高中数学学习的新起点, 在函数及其他后继内容中, 将得到充分的运用. 通过学习, 要逐步形成等价转化的思想、分类讨论的思想和数形结合思想, 树立应用意识.

1.1 集 合

基础知识导学

1. 集合的概念

集合是数学中不定义概念,只给出描述性说明:一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

2. 集合中元素的性质

确定性、互异性、无序性、任意性.

3. 常用数集记号

非负整数集(自然数集) $\mathbf{N}$;

正整数集 $\mathbf{N}^+$ ($\mathbf{N}^+$);

整数集 $\mathbf{Z}$;

有理数集 $\mathbf{Q}$;

实数集 $\mathbf{R}$

4. 集合与元素的符号

集合常用大写拉丁字母 $A, B, C, D, \dots$ 表示;

集合的元素用小写拉丁字母 $a, b, c, d, \dots$ 表示.

5. 元素与集合的关系

有且只有两种关系:属于“ $\in$ ”,不属于“ $\notin$ ”.

6. 集合的表示方法

列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号“ $\{ \}$ ”内,元素与元素之间用“,”号分开.

描述法:用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合.

7. 集合的分类

按集合中元素的数量可分为有限集、无限集、空集.

重点难点突破

1. 使用列举法时应注意以下五点.

- (1)元素与元素之间用“,”分开;
- (2)集合中元素必须是明确的;
- (3)不必考虑元素出现的先后顺序;
- (4)集合中的元素不能重复;
- (5)集合中的元素可以代表任意具体的事物.

2. 使用描述法时要注意描述法有两种形式.

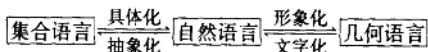
(1)一般形式: $\{x \in A | P(x)\}$, $\{x \in A; P(x)\}$ 或 $\{x \in A; P(x)\}$. 即使命题 $P(x)$ 为真的 A 中诸元素之集.

(2)简单形式: 把元素的性质写在括号内, 如 {太阳系的九大行星}.

这两种形式虽然形式不同, 但其实质是相同的, 在具体应用时, 可根据不同题目选取适当的形式.

3. 注意区分 a 与 $\{a\}$, 0 与 $\{0\}$, 0 与 $\emptyset$ 的关系, 注意新规定: $0 \in \mathbf{N}$ (自然数集).

4. 注意三种语言的相互转化



其中, 集合语言(数学语言)简洁、抽象; 自然语言通俗、易懂; 几何语言形象、直观.

解题方法指导

【例1】用列举法表示下列集合

- (1) $A = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 2\}$;
- (2) $B = \{x \in \mathbf{R} | (x-1)^2(x-2) = 0\}$;
- (3) $C = \{x \in \mathbf{Q} | (x+1)(x-\frac{2}{3})(x^2-2) = 0\}$;
- (4) $D = \{(x, y) | \begin{cases} 2x+y=8, \\ x-y=1 \end{cases}\}$;
- (5) $E = \{x \in \mathbf{R} | x = \frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|}, a, b \neq 0\}$.

分析 将集合语言转化为文字语言.

解 (1) A 即不超过 2 的自然数集. 所以 $A = \{0, 1, 2\}$.

(2) B 即方程 $(x-1)^2(x-2) = 0$ 的实数解集.

所以 $B = \{1_{(2)}, 2\}$.

(3) C 即方程 $(x+1)(x-\frac{2}{3})(x^2-2)=0$ 的有理数解集. 由于 $-1 \in \mathbf{Q}$, $\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}$, $\pm\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, 所以 $C = \{-1, \frac{2}{3}\}$.

(4) D 即不等式组 $\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集.

$$\text{由 } \begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

所以 $D = \{(3, 2)\}$.

(5) E 表示当 $a, b \neq 0$ 时, 代数式 $\frac{|a|}{a} + \frac{b}{|b|}$ 值的集合.

$\therefore a, b \neq 0$,

$$\therefore \frac{|a|}{a} = \pm 1, \quad \frac{b}{|b|} = \pm 1,$$

$$\therefore E = \{-2, 0, 2\}.$$

说明 对于(1), 要注意新规定 $0 \in \mathbf{N}$; 对于(2), 1 是方程的二重根, 记 $B = \{1, 1, 2\}$ 不符合集合元素的互异性, 记 $B = \{1, 2\}$ 体现不出二重根, 因此应记 $B = \{1_{(2)}, 2\}$, 下标表明二重根; 对于(3), 要注意 $\pm\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; 对于(4), 不能记为 $\{3, 2\}$ 或 $\{x=3, y=2\}$, 注意 D 是单元素集; 对于(5), 要注意分类讨论.

【例 2】 用描述法表示下列集合

$$(1) A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\};$$

$$(2) B = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}\};$$

$$(3) C = \{2, 3, 4\}.$$

分析 观察集合中元素的结构特征, 概括出元素的公共属性 $P(x)$, 表示为 $\{x \in A | P(x)\}$ 即可.

解 (1) 观察, 知 A 中元素为不超过 12 的正偶数. 即 $A = \{x \in \mathbf{N}^* | x = 2n, n \leq 6\}$.

(2) 分别观察分子、分母, 知分子是不超过 5 的正整数, 分母比分子大 2.

$$\text{故 } B = \{x \in \mathbf{N}^* | x = \frac{n}{n+2}, n \leq 5\}.$$

(3) 注意到 C 中元素为不小于 2 且不大于 4 的正整数, $C = \{x \in \mathbf{N} | 2 \leq x \leq 4\}$, 或 $\{x \in \mathbf{N} | x = n+2, n \leq 2\}$; 若以 2, 3, 4 为根构造方程 $(x-2)(x-3)(x-4)=0$, 则 $C = \{x \in \mathbf{R} | (x-2)(x-3)(x-4)=0\}$.

说明 从特殊到一般, 从具体到抽象, 从感性到理性是人类认识客观存在

的普遍规律,描述集合也不例外.

【例 3】 用适当的方法表示下列集合

- (1) 方程组 $\begin{cases} 2x-3y=14 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 的解集;
(2) 100 以内被 3 除余 2 的正整数;
(3) 到两坐标轴距离相等的点;
(4) 所有正方形.

分析 何谓适当方法? 一般说来,较简单的、较和谐的表示方法,就是较适当的方法.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \{(x, y) \mid & \begin{cases} 2x-3y=14 \\ 3x+2y=8 \end{cases} \} \\ &= \{(x, y) \mid \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases} \} \\ &= \{(4, -2)\}; \end{aligned}$$

- (2) 尽管此集合是有限集,但由于元素个数较多,所以列举是不明智的
 $\{x \mid x=3k+2, k \in \mathbf{N}, x < 100\}$;
(3) $\{(x, y) \mid |y| = |x|, x \in \mathbf{R}\}$;
(4) $\{\text{所有正方形}\}$.

说明 表示集合的两种主要方法是列举法和描述法,为了更好地掌握集合语言,应注意文字语言和符号语言的互译.另外,列举法与描述法各有长短,这就需要我们根据具体问题选择表示方法.一般地,有限集列举,无限集描述较为恰当.

【例 4】 求数集 $\{1, x, x^2 - x\}$ 中元素 x 所应满足的条件.

分析 考察集合元素的互异性.

解 根据集合元素的互异性

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - x \neq 1 \\ x = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 2. \end{cases}$$

$$\therefore x \text{ 应满足条件 } \left\{ x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0, 1, 2, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

说明 此种题型针对集合元素性质互异性,让集合中各个元素互不相等,列不等式组求出交集即可.

【例 5】 已知 $1 \in \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 求实数 a 的值.

分析 由 $1 \in \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 知 $a+2=1$ 或 $(a+1)^2=1, a^2+3a+3=0$, 分三种情况讨论, 然后结合集合元素的互异性取舍.

解 (1) 若 $a+2=1$, 则 $a=-1$,
但 $a^2+3a+3=1$, 不适合题意;

(2) 若 $(a+1)^2=1$, 则 $a=0$ 或 $a=-2$.

当 $a=0$ 时, $a+2=2, a^2+3a+3=3$, 适合题意,

当 $a=-2$ 时, $a^2+3a+3=1$, 不合题意;

(3) 若 $a^2+3a+3=1$, 则 $a=-1$ 或 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时, $(a+1)^2=1$, 不合题意,

当 $a=-1$ 时, $a+2=1$, 不合题意.

故 $a=0$.

说明 把不同性质的问题分不同类型, 用不同的方法、知识去解决它, 便形成了分类讨论思想. 本题就是用分类讨论思想来解决的. 分类时, 应注意不重、不漏, 以确保思维的全面性.

跟踪强化训练

一、选择题

1. 下面四句话中, 能表示集合的是().

- A. 一切很大的数 B. 坐标轴附近的所有点
C. 大于-2的实数 D. 聪明的人

2. 下列方程的实数解集为 $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$ 的个数是().

- (1) $4x^2+9y^2-4x+12y+5=0$; (2) $6x^2+x-2=0$;
(3) $(2x-1)^2(3x+2)^5=0$; (4) $6x^2-x-2=0$.

- A. 3个 B. 2个 C. 1个 D. 0个

3. 下列各式错误的是().

- A. $\{\text{奇数}\} = \{x | x=2k-1, k \in \mathbb{Z}\}$
B. $\{x | |x| < 5, x \in \mathbb{N}^*\} = \{1, 2, 3, 4\}$
C. $\{(x, y) | x+y=1 \text{ 且 } xy=-2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \{(2, -1), (-1, 2)\}$
D. $3^{-2} \in \mathbb{Q}^-$

4. 方程组 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$ 的解集可以表示为以下五种情况.

(1) $(1,2)$; (2) $\{(1,2)\}$; (3) $|x,y| x=1,y=2$; (4) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$;

(5) $\{(x,y) \mid \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\}$.

其中正确的个数是().

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

二、填空题

5. 设 $M = \{x \mid x \leq \sqrt{21}\}$, $m = 3\sqrt{2}$, 则 m _____ M .

6. -2 _____ $\{y \mid y = -x^2 + 8, x \in \mathbf{R}\}$.

7. 设 M 为方程 $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 24 = 0$ 的解集, 则点 $(2, -2)$ _____ M .

8. y 轴上所有点的集合可表示为_____.

9. 已知 $A = \{-3, -2, 0, 2\}$, $B = \{y \mid y = -|x|, x \in A\}$, 则 $B =$ _____.

10. 被 5 除余 1 的正整数集合, 用描述法表示为_____.

三、解答题

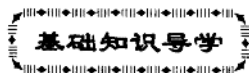
11. 已知 $A = \{x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{Z}\}$, 试用列举法表示集合 A .

12. 已知集合 $A = \{x \mid ax^2 + 2x + 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$

(1) 若 A 中只有一个元素, 求 a 的值, 并求这个元素;

(2) 若 A 中至少有一个元素, 求 a 的取值范围.

1.2 子集、全集、补集



1. 子集

一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们就说集合 A 包含于集合 B , 或集合 B 包含集合 A , 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), $A \subset B$ (或 $B \supset A$). 这时, 我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

即如果任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$, 那么 $A \subseteq B$.

2. 相等集

一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B

的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B ,记作 $A=B$.

即如果 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,那么 $A=B$.

3. 真子集

如果 $A \subseteq B$,并且 $A \neq B$,我们就说 A 是 B 的真子集,记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).

4. 全集与补集

一般地,设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集(即 $A \subseteq S$),由 S 中不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记作 $C_S A$,即 $C_S A = \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}$.

如果集合 S 含有我们所研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,通常用 U 表示.

重点难点突破

1. 要正确理解子集真子集的概念,并注意:

- (1) 空集是任何集合的子集.
- (2) 空集是任何非空集合的真子集.
- (3) 任何集合是它本身的子集.
- (4) 子集、真子集都具有传递性.

2. 要区分一些容易混淆的符号:

“ $\in$ ”, “ $\subseteq$ ”; “ 0 ”, “ $\{0\}$ ”, “ $\emptyset$ ”, “ $\{\emptyset\}$ ”. 并注意克服几种常见的错误: $0 \in \emptyset$; $\emptyset \in \{0\}$; $\emptyset = \{0\}$; $0 \subseteq \{0\}$ 等.

3. 集合 M 中有 n 个元素,则集合 M 有 2^n 个子集,有 $2^n - 1$ 个真子集, $2^n - 2$ 个非空真子集.

4. 理解补集的概念,注意 $C_U U = \emptyset$, $C_U \emptyset = U$.

解题方法指导

【例1】 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 $A \subsetneq M \subseteq B$, 求满足上述条件的集合 M 的个数.

分析 注意到 $\{1, 2\} \subsetneq M \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 显然 M 中至少含有 3 个元素,

而至多含有 5 个元素,分类列举便知 M 的个数.

解 满足条件的 M 不外乎三种情况.

(1) M 中有 3 个元素: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}$;

(2) M 中有 4 个元素: $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$;

(3) M 中有 5 个元素: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

故 满足条件的集合 M 共有 7 个.

说明 因为 $\{1, 2\} \subseteq M$, 所以 M 中至少含有三个元素, 1, 2 是其中的两个. 其余的元素是由 3, 4, 5 中取 1 个元素, 取 2 个元素, 取 3 个元素组成的, 因此, 满足条件的集合 M 的个数实际上是集合 $\{3, 4, 5\}$ 的子集的个数减去一个空集的个数. 即 $2^3 - 1 = 7$.

【例 2】 已知集合 $M = \{a, a+d, a+2d\}$, $N = \{a, aq, aq^2\}$, 其中 $a \neq 0$, 且 $M = N$, 求 q 的值.

分析 集合相等, 就是两个集合 M 与 N 的元素都相同, 由已知 M, N 的共同元素为 a , 其余元素情况, 只有通过讨论完成.

解 假设 $\begin{cases} a+d=aq \\ a+2d=aq^2 \end{cases}$ ①

则由式②-①得 $d=aq(q-1)$. ②

代入式①得 $q=1$, 于是 $a=aq=aq^2$, 与集合元素的互异性矛盾, 故上式不成立. $\therefore$ 只能有

$$\begin{cases} a+d=aq^2 \\ a+2d=aq \end{cases}$$
③
④

从中解出 $q = -\frac{1}{2}$, 或 $q=1$,

经验证 $q=1$ 不符合要求, 舍去.

$\therefore q = -\frac{1}{2}$.

说明 本题主要考查集合相等的条件, 要注意集合元素的确定性、互异性和无序性.

【例 3】 已知全集 U, M, N 是 U 的非空子集, 若 $C_U M \supseteq N$, 则必有 ().

A. $M \subseteq C_U N$

B. $M \subseteq N$

C. $C_U M = C_U N$

D. $M = N$

分析 对补集问题利用韦恩图的方法解决, 简单、直观.

解 由 $C_U M \supseteq N$, 知集合 N 有两种情况 (如图 1—1, 图 1—2 所示).



图 1—1

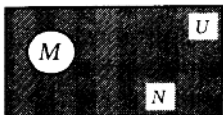


图 1—2

两种情况下,都有 $M \subseteq C_U N$, 故选 A.

说明 (1)补集作为一种思想方法,对于我们研究问题开辟了新思路,这就是在顺向思维受阻之时,改用逆向思维,可能会有所突破.从这个意义上讲,补集思想具有转换研究对象的功能,这是转化思想的体现.

(2)本题用韦恩图来解决也是数形结合思想的充分体现.

【例 4】 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 1\}$, $B = \{x | x + a < 0\}$, $B \subseteq C_{\mathbf{R}} A$, 求实数 a 的取值范围.

分析 利用数轴进行直观求解.

解 $B = \{x | x < -a\}$,

由图 1—3 知,当 $-a \leq 1$ 时, $B \subseteq C_{\mathbf{R}} A$.

说明 对于和实数有关的集合问题,借助于数轴将集合语言转化为图形语言,观察图形使问题迅速获解.可见,数形互化是数学解题重要的思想方法.

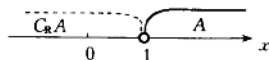


图 1—3

【例 5】 集合 $M = \{x | x = (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{y | y = (4k \pm 1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 M 与 P 的关系是().

A. $M \subseteq P$

B. $M \supseteq P$

C. $M = P$

D. $M \not\subseteq P, P \not\subseteq M$

分析 注意到 $x = (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$ 和 $y = (4k \pm 1)\pi, k \in \mathbf{Z}$ 都是 π 的奇数倍,不妨对 n 分偶数、奇数两种情况讨论.

解 (1)当 $n = 2k (k \in \mathbf{Z})$ 时, $x = (4k+1)\pi$;

(2)当 $n = 2k-1 (k \in \mathbf{Z})$ 时, $x = (4k-1)\pi$.

于是 $M = P$. 故选 C.

说明 一般地,确定两个非空集合的关系有三种方法.

(1)比较两集合元素的特征条件.

(2)列举两集合的全部或部分元素.

(3)利用数轴或韦恩图.

【例 6】 如果 $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}^*\}$, $P = \{y | y = b^2 - 4b + 5, b \in \mathbf{N}^*\}$. 试证明: $M \subseteq P$.

分析 根据真子集的定义, 证明两个方面:

(1) M 中任何一个元素都属于 P , 即 $M \subseteq P$;

(2) P 中至少有一个元素不属于 M , 即 $M \neq P$.

证明 $M = \{x | x = a^2 + 1, a \in \mathbf{N}^*\}$,

$P = \{y | y = (b-2)^2 + 1, b \in \mathbf{N}^*\}$.

任取 $x \in M$, 则 $x = a^2 + 1 = [(a+2) - 2]^2 + 1$,

$\therefore a \in \mathbf{N}^*, \therefore a+2 \in \mathbf{N}^*$,

$\therefore x \in P$, 即 $M \subseteq P$;

又当 $b=2$ 时, $y=1, \therefore 1 \in P$, 但 $1 \notin M, \therefore M \neq P$.

综上所述, $M \subsetneq P$.

说明 要证明集合 M 是集合 P 的子集, 必须且只需证明 M 中任何一个元素都属于 P ; 而要证明集合 $M \neq P$, 只须证明 P 中某一个元素不属于 M 即可.

跟踪强化训练

一、选择题

1. 设 $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. 下列关系正确的个数是().

(1) $0 \in A$; (2) $-2 \notin X$; (3) $0 \subset X$; (4) $A \supset 0$;

(5) $B \not\subset A$; (6) $B \subseteq \{x | 0 < x < 4, x \in \mathbf{Z}\}$; (7) $0 \in \emptyset$;

(8) $\emptyset \in A$; (9) $\emptyset \subsetneq \{0\}$ 且 $\emptyset \subsetneq X$; (10) $\{a, b\} \neq \{b, a\}$.

A. 3 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 9 个

2. 集合 $\{2, 4, 6\}$ 的非空真子集共有().

A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

3. 设全集 $U = \{2, 3, 5\}$, $A = \{2, |a-5|\}$, $C_U A = \{5\}$, 则 a 的值是().

A. 2 B. 8 C. 2 或 8 D. -2 或 8

4. 同时满足 $\{1\} \subsetneq A \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 A 中所有元素之和为奇数的集合 A 的个数是().