修订版

金牌奥校

北京市西城区数学学会 编

数学奥林匹克教程

初中三年级

中国少年儿童出版社

金牌奥校

数学奥林匹克教程

（初中三年级）

北京市西城区数学学会　编

中国少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

金牌奥校:初中数学三年级/郑康等编 . - 北京:中国少年儿童出版社,1998.6

ISBN 7-5007-4244-4

I. 金… II. 郑… III. 数学课-初中-习题 IV. G623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 12537 号

本册编著:郑　康　张鸿菊　李　冰
陈　娴　王永俊

金牌奥校——数学奥林匹克教程

初中三年级

*

中国少年儿童出版社 出版发行

保定市兴良印刷厂印刷　新华书店经销

*

850×1168　1/32　印张:11.625　字数:266 千字

本次印数:10000 册

2000 年 11 月第 3 版　2000 年 11 月第 3 次印刷

ISBN 7-5007-4244-4/G·3011　定价:14.80 元

前　　言

在推进数学素质教育的过程中，开拓第二课堂的工作已受到普遍重视，组织数学竞赛活动是推动这项工作的重要一环.

为使初中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力，推动数学奥林匹克活动的开展，多年来，北京市西城区广泛开展了初中数学竞赛辅导讲座活动，并取得了较好的成绩.

为提高竞赛辅导讲座的质量，我们组织多年从事讲课辅导的教练员，编写了《金牌奥校——数学奥林匹克教程》一书，分一、二、三册，供初中三个年级使用.全书基本上概括了初中数学的重要基础知识、基本技能和基本方法，对初中数学竞赛范围内的知识作了系统归纳，特别着重对数学思维能力、数学思想方法和解题方法、解题能力的训练.

对书中每个专题，都分四个步骤来展开：一、概述知识要点；二、选择典型题目进行解题思路的分析和揭示解题规律；三、综合练习；四、参考解答.这样可使读者了解竞赛的要求，提高分析问题和解决问题的能力，掌握驾驭知识的主动权，从而为参加数学竞赛活动打下良好的基础.

参加本书编写工作的有赵一西、陈娴、金宝铮、王永俊、张鸿菊、李松文、郑廉、李冰、郑康、李家智、高雪松等同志.

编　者

目　　录

第一讲　二次方程(组)、二次不定方程

一、内 容 提 要

1. 二次方程及可以转换为二次方程的各类方程的求解，往往是通过巧妙的变形、代换来完成的．这一讲以高次方程、分式方程、无理方程、方程组等为例，介绍常用的变换方法及技巧．

(1) 用到的主要知识：一元二次方程的求根公式．一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的解为：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(b^2-4ac\geqslant0)$．

(2) 解题基本思想：转化—化繁为简、化难为易、转化为二次方程的问题．

(3) 用到的主要方法：换元法．

2. 不定方程是数论中的一个重要专题，不定方程的整数解是个非常复杂的问题，这一讲主要介绍求二次不定方程整数解的常见解法．

二、例 题 分 析

1. 二次方程(组)及可化为二次方程的各类方程解法．

例 1　选择题：

(1) 方程 $x^2-|x|-1=0$ 的解是(　　).

(A) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　　　(B) $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(C) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$或$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$　　　　(D) $\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) 方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实根的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(3) 关于 x 的方程$x^2-2|x|+2=m$ 恰有 3 个实数根. m 的值等于(　　).

(A) 1　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) 2　　(D) 2.5

分析：这一组题目都含有绝对值的符号，通常可以根据绝对值的定义，按照 x 的值大于等于零、小于零来进行讨论.

解：(1)答案为 D.

①$x\geqslant 0$ 时，原方程变为 $x^2-x-1=0$. 由求根公式解出 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. $\because x\geqslant 0$, $\therefore x_2$ 舍去.

②$x<0$ 时，原方程变为 $x^2+x-1=0$. 由求根公式解出 $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. $\because x<0$, $\therefore x_3$ 舍去.

原方程的解为 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(2) 答案为 C.

①$x\geqslant 0$ 时，原方程变为 $x^2-3x+2=0$, $x_1=1$, $x_1=2$.

②$x<0$ 时，原方程变为 $-x^2+3x+2=0$. 由求根公式解出 $x_3=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x_4=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. $\because x<0$, $\therefore x_4$ 舍去.

原方程解为 $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

(3) 显然，若 a 是方程的根，则 $-a$ 必是方程的根. 又知方

程恰有 3 个根，所以必然有一个根为 0，将 $x=0$ 代入方程，$m=2$. ∴答案为(C).

例2 已知 $a^2+4a+1=0$，且 $\dfrac{a^4+ma^2+1}{2a^3+ma^2+2a}=3$，试确定 m 的值.

分析：如果由 $a^2+4a+1=0$ 先求出 a 的值 $-2\pm\sqrt{3}$，再代入已知中另一个等式求 m 的值则运算量很大，分析题目的特点，系数之间的规律，易求出 $a+\dfrac{1}{a}$ 的值，在此基础上求 m 值就简便了.

解：∵ $a^2+4a+1=0$，易知 $a\neq0$.

∴ $a+\dfrac{1}{a}=-4$.

∴ $a^2+\dfrac{1}{a^2}=(a+\dfrac{1}{a})^2-2=16-2=14$.

又由 $\dfrac{a^4+ma^2+1}{2a^3+ma^2+2a}=3$，左边分子、分母同除以 a^2，

可得 $\dfrac{a^2+\dfrac{1}{a^2}+m}{2(a+\dfrac{1}{a})+m}=3$，

即 $\dfrac{14+m}{2(-4)+m}=3$.

整理得 $2m=38$，

∴ $m=19$.

例3 解下列关于 x 的方程：

(1) $a^2(x^2-x+1)-a(x^2-1)=(a^2-1)x$；

(2) $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$.

分析：含字母系数的方程，要求对每个参数的允许值回答：方程有解还是无解；若有解，解的表达形式如何；若二次项系数

含字母系数,首先要讨论二次系数是否为零.

解:(1)整理原方程,得

$$(a^2-a)x^2-(2a^2-1)x+(a^2+a)=0.$$

若 $a^2-a\neq0$,即 $a\neq0,1$,则原方程为二次方程.应用因式分解法得

$$[ax-(a+1)][(a-1)x-a]=0,$$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{a+1}{a},x_2=\dfrac{a}{a-1}.$

若 $a^2-a=0$,即 $a=0,1$,则原方程是一次方程.

当 $a=0$ 时,$x=0$;

当 $a=1$ 时,$x=2$.

(2) 若 $ab\neq0$,则有

$$(ax-b^3)(bx-b^3)=0,$$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{b^3}{a},x_2=\dfrac{a^3}{b}.$

若 $ab=0$,则有下列三种情况:

$a=0,b\neq0$ 时,$-b^4x=0,\therefore\quad x=0$;

$a\neq0,b=0$ 时,$-a^4x=0,\therefore\quad x=0$;

$a=0,b=0$ 时,原方程是恒等式,解为任意实数.

例4:当 k 为何值时,方程 $x^2+kx-1=0$ 和方程 $x^2+x+(k-2)=0$ 有公共根?并求出此公共根.

分析:可利用方程根的概念,设公共根为 α,分别代入两方程.

解:设公共根为 α,则

$$\alpha^2+k\alpha-1=0, \qquad ①$$

$$\alpha^2+\alpha+(k-2)=0. \qquad ②$$

①-②得 $\quad k\alpha-1-\alpha-k+2=0,$

$$(k-1)(\alpha-1)=0.$$

$\therefore \quad k=1$ 或 $\alpha=1$.

(1) 当 $k=1$ 时,两个方程有两个公共根 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(2) 当 $\alpha=1$ 时,代入①或②都得 $k=0$,所以 $k=0$ 时,两方程有一个公共根 $x=1$.

例 5 解方程 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$.

分析:如果将方程左边完全展成一个四次多项式,可以解决问题,但不如将左边适当变换一下,用换元来求解.

解:$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)$

$=[(x+2)(x-4)][(x+3)(x-5)]$

$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-15)$.

令 $y=x^2-2x-8$, ①

原方程变为 $y(y-7)=44$,

$\therefore \quad y_1=11, y_2=-4$.

把 y_1、y_2 分别代入①:

$$x^2-2x-8=11, x^2-2x-8=-4;$$

$$x^2-2x-19=0, x^2-2x-4=0.$$

解得 $x_{1,2}=1\pm2\sqrt{5}$ 及 $x_{3,4}=1\pm\sqrt{5}$.

例 6 解方程 $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

分析:联想例 5,考虑使用换元法解例 6.设想以 $6x+7$ 为代换元,但 $(3x+4)(x+1)$ 如何与 $6x+7$ 联系呢?

解:原方程两边同乘以 12,得

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72.$$

令 $y=6x+7$,

$$y^2(y+1)(y-1)=72,$$

$$y^4-y^2-72=0,$$

$\therefore \quad y^2=9$,或 $y^2=-8$ (舍去).

$\therefore \quad (6x+7)^2=9,$

$6x+7=\pm 3,$

$\therefore \quad x_1=-\dfrac{2}{3}, \quad x_2=-\dfrac{5}{3}.$

小结：在解题中，如何选择换元法中的代换元呢？例 5 和例 6 给我们提供了两种常用的方法．一般对形如$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(a>b>c>d)$的式子，可以观察，若满足 $a+d=b+c$，便可作这样的变形：$(x+a)(x+d)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+d)x+ad][x^2+(b+c)x+bc]$，选择 $x^2+(a+d)x+ad$ 作元即可．

还有一种选中间量作代换元的方法．如例 6 中，$6x+6, 6x+7, 6x+8$，中间量为 $y=6x+7$．作用在于选中间量为代换元以后，$6x+6$、$6x+8$ 相应变为 $y-1, y+1$，有利于式子的进一步化简．为说明这点，再举一例．

例 7　解方程$(x-2)^4+(x-3)^4=1$．

解：令 $y=x-\dfrac{5}{2}$，则原方程化为

$$(y+\frac{1}{2})^4+(y-\frac{1}{2})^4=1.$$

整理后，得　$2y^4+3y^2-\dfrac{7}{8}=0,$

解得　$y_2=\dfrac{1}{4}$或 $y_2=-\dfrac{7}{4}$（舍去）．

$\therefore \quad y=\pm\dfrac{1}{2},$

$\therefore \quad x_1=3, x_1=2.$

说明：本题在引进新的未知数 $y=x-\dfrac{5}{2}$以后，消去了未知数的奇次项，使方程变为易于求解的双二次方程．

一般地，形如$(x+a)^4+(x+b)^4=c$ 的方程，可以用 $y=x$

$+\dfrac{a+b}{2}$的方法转化为双二次方程.

例 8　解方程 $x^4+7x^3+14x^2+7x+1=0$.

分析；这个方程的各项系数有一个重要特征，与首末两项等距离的两项系数相等，根据这个特征，可以在方程两边同除以 x^2，然后把相应的项结合起来.

解：∵　$x=0$ 不是原方程的根，故两边可同除以 x^2，得

$$x^2+7x+14+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0.$$

令 $y=x+\dfrac{1}{x}$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$，

∴　$y^2+7y+12=0$，

解得 $y_1=-3, y_2=-4$.

(1) $y=-3$　$x+\dfrac{1}{x}=-3$，

$$x^2+3x+1=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

(2) $y=-4$，　$x+\dfrac{1}{x}=-4$，

$$x^2+4x+1=0,$$

$$x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}.$$

∴　$x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$，$x_3=-2+\sqrt{3}$，$x_4=-2-\sqrt{3}$.

（其中 x_1 与 x_2 互为倒数，x_3 与 x_4 互为倒数.）

说明：这是一个倒数方程，倒数方程常见的形式有 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$，$ax^5+bx^4+cx^3+bx+a=0$，……这类方程的特点是：(1)系数是对称的形式；(2)0 不可能是它的根；(3)如果 α 是它的根，那么$\frac{1}{\alpha}$也必是它的根. 这类方程一般选取 $y=x+\frac{1}{x}$进行换元(也有时选 $y=x-\frac{1}{x}$).

例 9 解方程：$\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0.$

分析：若直接去分母，显然很麻烦，观察分母的特征可将分母分成三组，分组的原则是每一组各自先通分后使得分母的二次项和一次项的系数相同.

解：由原方程可得

$$\frac{3(x-5)+3x}{x(x-5)}+\frac{x-4+x-1}{(x-1)(x-4)}+\frac{4(x-3)+4(x-2)}{(x-2)(x-3)}=0.$$

即 $\frac{3(2x-5)}{x^2-5x}+\frac{2x-5}{x^2-5x+4}+\frac{4(2x-5)}{x^2-5x+6}=0.$

若 $2x-5=0$，则 $x=\frac{5}{2}$.

若 $2x-5\neq0$，则可设 $x^2-5x+4=y$，原方程可变形为：

$$\frac{3}{y-4}+\frac{1}{y}+\frac{4}{y+2}=0.$$

去分母后得 $2y^2-3y-2=0$，

解得 $y_1=2, y_2=-\frac{1}{2}$.

当 $y=2$ 时，$x^2-5x+4=2$，得 $x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$；

当 $y=-\frac{1}{2}$时，$x^2-5x+4=-\frac{1}{2}$，得 $x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$.

经检验：$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$，$x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$，$x_5=\frac{5}{2}$都为原方程

的根.

例 10 解方程$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}+\dfrac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{19}{6}$.

分析：因为题目给出的形式不宜直接进行换元.所以要将方程进行变形.将一个分式拆成两个分式的和与差的作法是常用的变形技巧.

解法一： $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}+\dfrac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{19}{6}$,

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{13}{6},$$

令 $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$,则

$$y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6},$$

$$6y^2-13y+6=0,$$

$$y_1=\frac{3}{2},y_2=\frac{2}{3},$$

(1)$y=\dfrac{3}{2}$时,$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{3}{2}$,

$$x^2-2x+1=0,x=1.$$

(2)$y=\dfrac{3}{2}$时,$\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=\dfrac{2}{3}$,

$$x^2+3x+1=0,x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

经检验：$x=1,x=\dfrac{+3\pm\sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根.

解法二： 原方程化为

$$\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{6},$$

$\because\quad x\neq 0,$

$\therefore\quad \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x+1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{6}.$

令 $y=x+\dfrac{1}{x}$,则

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{6}.$$

将 $y_1=2, y_2=-3$ 代入 $y=x+\dfrac{1}{x}$,

解出 $x=1, x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

经检验均为原方程的根.

小结: 例 9、例 10 都是分式方程. 解分式方程的基本思想是把分式方程转化成整式方程求解,转化的方法是去分母和换元法,凡是通过适当变形可化为形如:

$$a\cdot f(x)+\frac{b}{f(x)}+c=0 \text{ 和} \frac{A}{f(x)}+\frac{B}{f(x)+a}+\frac{C}{f(x)+b}=0$$

的分式方程,都可利用换元法转化为一元二次方程求解. 只要令 $f(x)=y$,则方程可变形为 $ay^2+cy+b=0$ 或 $A_1y^2+B_1y+C_1=0$,解出 y 后便可求出 x 的值.

例 11 解方程 $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x+(\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=10$.

分析: 未知数在指数位置上, 似乎不好求解. 但注意到 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}=1$,即这两个数互为倒数. 若设其中一个为 A,则另一个为 $\dfrac{1}{A}$.

解: 设 $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x=A$.

$\because\quad \sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}=1,$

则 $\quad (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x=\dfrac{1}{A}.$

原方程化为：

$$A+\frac{1}{A}=10,$$

$$A^2-10A+1=0,$$

$$A=\frac{10\pm\sqrt{96}}{2}=5\pm2\sqrt{6},$$

(1)$A=5+2\sqrt{6}$时，$(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x=5+2\sqrt{6}$，

∴ $x=2$.

(2)$A=5-2\sqrt{6}$时，$(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x=5-2\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^{-1}$，

∴ $x=-2$.

∴原方程的解为 $x_1=2, x_2=-2$.

例 12 解方程$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

分析：一般情况下，去掉三个根号要进行三次平方. 此方程若经三次平方，将很复杂. 观察三个根号内的式子，x、$x+7$、$x(x+7)$. 可以用辅助元的办法来解.

解：设 $u=\sqrt{x}$，$v=\sqrt{x+7}$，原方程变为

$$u+v+2uv=35-2u^2, \qquad ①$$

$$u^2-v^2=x-(x+7)=-7. \qquad ②$$

①－②：

$$(u+v)^2+(u+v)-42=0,$$

令 $u+v=y \quad (y\geqslant0)$，

$$y^2+y-42=0,$$

解得 $y_1=6$， $y_2=-7$(舍去)，

则 $u+v=6$. ③

由②、③得

$$u=\frac{29}{12}, x=u^2=\frac{841}{144}.$$

经检验 $x==\frac{841}{144}$ 是原方程的解.

说明：解无理方程的基本思想是将无理方程化为有理方程，实现这一转化有多种方法，其中换元法是常用的一种重要方法.

例 13 解方程组 $\begin{cases}2xy-5\sqrt{xy+1}=10,\\x^2+y^2=34.\end{cases}$

分析：方程组为二元二次，特点是每一个方程中 x、y 的位置交换后，方程不变. 这样可以将二元基本对称式 $x+y$、xy 作为代换元，换元后将可以解决问题.

解：设 $u=x+y$，$v=xy$，

则原方程组变为

$$\begin{cases}2v-5\sqrt{v+1}=10, & ①\\u^2-2v=34. & ②\end{cases}$$

由①：$5\sqrt{v+1}=2v-10$，

$4v^2-65v+75=0$，

$$v_1=15,\quad v_2=\frac{5}{4}(\text{增根，舍去})$$

将 $v_1=15$ 代入(2)，解得 $u=\pm8$，

$\therefore\quad \begin{cases}x+y=8,\\xy=15\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=-8,\\xy=15.\end{cases}$

解得：$\begin{cases}x_1=5,\\y_1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-5,\\y_3=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-3,\\y_4=-5.\end{cases}$

例 14 求方程组

$$\begin{cases}x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz}=39-xy,\\y\sqrt{xz}+z\sqrt{xy}=52-yz,\\z\sqrt{xy}+x\sqrt{yz}=78-xz.\end{cases}$$