

# 厚板动力学理论 及其应用

曹志远 杨昇田 著

科学出版社

# 厚板动力学理论及其应用

曹志远 杨昇田 著

科学出版社

1983

## 内 容 简 介

本书分两编。第一编为前八章，阐述厚板动力学的基本理论及有关分析方法。第二编为后四章，列出了与各种类型厚壁构件的静、动态，弹、塑性实用计算公式有关的数据及图表。

本书可供从事结构分析的科研人员、工程技术人员和高等院校有关专业师生参考。

## 厚板动力学理论及其应用

曹志远 杨昇田 著

责任编辑 魏茂乐

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1983年3月第一版 开本：787×1092 1/2

1983年3月第一次印刷 印张：13 1/2

印数：0001—4,400 字数：304,000

统一书号：13031·1984

本社书号：2701·13—2

定价：2.10元

## 序 言

近百年来所出版的有关结构力学及应用弹性理论分析方面的书籍、资料 and 手册，几乎都涉及到普通梁、拱、框架、刚架、薄板、薄壳等问题。这些书刊的共同之处是在“直法线”假定的前提下来讨论结构分析的经典理论内容。这一理论的建立及应用对本世纪科学技术与生产发展都起着重大的推动和促进作用，但其结果主要适用于厚跨比较小的匀质结构。超过经典理论范围的精确化理论——厚壁结构理论的研究将使固体力学的成果可能推广应用到大厚跨比及某些非匀质结构中去。本书将就这一理论的某些方面作介绍。

厚壁结构理论在近代科学技术及生产领域中有着广泛的应用价值。它不但是有大量厚壁构件的防护工程、原子能工程等部门的设计计算理论基础，而且在航空、宇航、船舶等工程中愈来愈得到应用的夹层结构（构造上的非匀质结构）和在近代各工程领域中有着特殊地位的复合材料结构（材料上的非匀质结构）的力学分析中也都需要涉及和应用厚壁结构理论。广义地说，厚壁结构理论研究也有助于广泛结构的力学分析计算。实际上，即使是常用的厚跨比，对于某些问题如果沿用经典理论也会存在着较大的误差（如：厚跨比为  $1/15$  的四边固定方板中点挠度误差为  $9\%$ ），而厚壁结构理论将对这些问题作出正确的分析并加以改善。

厚壁结构理论反映了经典理论与三维弹性理论之间的过渡与联系。因此，对厚壁结构理论基本知识的了解将有助于对材料力学、结构力学、板壳力学、弹性力学等有关内容的

深入理解。在这个意义上，本书可以作为有关工程力学书籍学习的辅助材料。

本书以叙述厚板动力问题为主，但对厚壁结构理论的一般性共同问题及厚壁结构的研究与发展作了概括介绍。方程的建立与公式的推导都以大厚跨比匀质结构为对象，但对在某些复合构件（组合构件、夹层构件、多层构件、复合材料构件等）中的应用也作了说明。如果读者对这些问题有兴趣的话，可参见第一章有关内容及书后文献。

为兼顾科学研究人员与工程技术人员的需要，全书分为基础理论与应用公式两大部分。第一编阐述了厚板动力学的基本理论及有关的分析方法。鉴于厚壁结构问题解析解的数字计算十分复杂，在第二编列出了与各种类型厚壁构件的静、动态，弹、塑性实用计算公式有关的数据及图表，工程技术人员也可直接加以应用，而不必事先了解基础理论部分的内容。

全书由曹志远主要执笔，杨昇田参加第四、七、八、九章及有关章节的编著工作。郭琳、席静珠、张耀勤、沈庆良、刘宗贤等参加部分数据表格的计算、整理工作，此外在本书的写作过程中还得到高等院校，研究、设计单位的许多同志的帮助和指导，特此致谢。由于作者水平有限，难免有缺点和错误，望广大读者给予指正。

## 常用符号

$x, y, z$  直角坐标。

$r, \theta, z$  圆柱坐标。

$\xi, \eta, z$  椭圆坐标。

$u, v$  构件（梁、板等）的水平位移。

$w$  构件的垂直挠度。

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  构件的正应变分量。

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  构件的剪应变分量。

$\sigma_x, \sigma_y$  构件的弯曲应力。

$\sigma_z$  构件的法应力。

$\tau_{xy}$  板件的水平剪应力。

$\tau_{xz}, \tau_{yz}$  构件的垂直剪应力。

$M_x, M_y$  构件的弯矩。

$M_{xy}$  板件的扭矩。

$Q_x, Q_y$  构件的剪力。

$\beta_x, \beta_y$  板件中面法线沿  $xz, yz$  平面的平均转角。

$M_r, M_\theta, M_{r\theta}, Q_r, Q_\theta, \beta_r, \beta_\theta$  圆柱坐标系的弯矩、扭矩、剪力、转角分量。

$M_\xi, M_\eta, M_{\xi\eta}, Q_\xi, Q_\eta, \beta_\xi, \beta_\eta$  椭圆坐标系的弯矩、扭矩、剪力、转角分量。

$M_n, M_s, M_{ns}, Q_n, Q_s, \beta_n, \beta_s$  板件边界的弯矩、扭矩、剪力、转角分量。

$X(x), Y(y), \Phi(x), \Phi(y)$  梁的位移、转角振型函数。

$W(x, y), \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y), \Psi_r(r, \theta), \Psi_\theta(r, \theta),$

$\Psi_{\xi}(\xi, \eta)$ ,  $\Psi_{\eta}(\xi, \eta)$  板的位移、转角振型函数。

$\omega$  构件的固有频率。

$q$  外载荷。

$p_0$  动力载荷函数的特征值。

$\rho$  构件的密度。

$F$  梁的横截面积。

$J$  构件的截面惯性矩。

$g$  重力加速度。

$a$  双向矩形板的长跨，圆环板的内半径。

$b$  构件的特征几何参数（梁及单向板为跨度，双向矩形板为短跨，圆板为半径，圆环板为外半径，扇形板为径向边长与内外弧边长平均值中较小者，正三角形板为边长）

$h$  构件的厚度。

$E$  匀质构件的弹性模量。

$G$  匀质构件的剪切模量。

$\mu$  匀质构件的泊松比。

$C$  匀质构件的挤压模量。

$D$  匀质板件的弯曲刚度。

$D_x, D_y$  正交各向异性板件长跨、短跨方向弯曲刚度。

$\mu_{xy}, \mu_{yx}$  正交各向异性板件长跨与短跨方向间泊松比。

$D_K$  正交各向异性板件长跨与短跨方向间扭转刚度。

$G_z$  各向异性梁、单向厚板与横观各向同性双向矩形板垂直向剪切模量。

$G_{xz}, G_{yz}$  正交各异性双向矩形板长跨、短跨与厚度方向间剪切模量。

$\overline{\rho h}$  各向异性构件单位中面积质量。

$\overline{\rho J}$  各向异性构件单位宽度横截面的转动惯量。

$I_G = \begin{cases} \frac{6EJ}{5G_z h^3} \left(\frac{h}{b}\right)^2 & \text{横观各向同性及正交各向异性深梁的剪} \\ & \text{变形影响系数。} \end{cases}$

$I_G = \begin{cases} \frac{6D}{5G_z h^3} \left(\frac{h}{b}\right)^2 & \text{横观各向同性及正交各向异性单向厚板} \\ & \text{与横观各向同性双向矩形厚板的剪变形} \\ & \text{影响系数。} \end{cases}$

$I_{G_x} = \frac{6D_x}{5G_{zx} h^3} \left(\frac{h}{b}\right)^2$  正交各向异性双向矩形厚板长跨方向的剪变形影响系数。

$I_{G_y} = \frac{6D_y}{5G_{zy} h^3} \left(\frac{h}{b}\right)^2$  正交各向异性双向矩形厚板短跨方向的剪变形影响系数。

$J_{G\rho} = \begin{cases} \left( \frac{6EJ}{5G_z h^3} + \frac{\overline{\rho J}}{\rho h h^2} \right) \left(\frac{h}{b}\right)^2 & \text{横观各向同性及正交各向} \\ & \text{异性深梁的剪变形及转动} \\ & \text{惯量影响系数。} \end{cases}$

$J_{G\rho} = \begin{cases} \left( \frac{6D}{5G_z h^3} + \frac{\overline{\rho J}}{\rho h h^2} \right) \left(\frac{h}{b}\right)^2 & \text{横观各向同性及正交各向} \\ & \text{异性单向厚板与横观各向} \\ & \text{同性双向矩形厚板的剪变} \\ & \text{形及转动惯量影响系数。} \end{cases}$

$I_{G\rho} = \left( \frac{6D_y}{5G_{zy} h^3} + \frac{\overline{\rho J}}{\rho h h^2} \right) \left(\frac{h}{b}\right)^2$  正交各向异性双向矩形厚板短跨方向的剪变形及转动惯量影响系数。

$I_{G_{yx}} = \frac{6(D_y \mu_{xy} + 2D_K)}{5G_{zy} h^3} \left(\frac{h}{b}\right)^2$  正交各向异性双向矩形厚板短跨方向的组合刚度影响系数。

$k = \begin{cases} \frac{EJ}{KL} & \text{梁的边界弹嵌系数。} \\ \frac{D}{KL} & \text{板的边界弹嵌系数。} \end{cases}$

$K$  弹嵌边界之支承结构产生单位转角所需力矩。

$L$  弹嵌边界垂直方向跨度。

$(m, n)$  构件振型节线数。对矩形板,  $m$  表示长跨方向节线

数,  $n$  表示短跨方向节线数。对圆板,  $m$  是节圆数,  $n$  是节径数。

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  平面直角坐标系的 Laplace 算子。

[1] 表示详见参考文献[1], 其余类同。

(1) 表示详见本书第一章, 其余类同。

# 目 录

|            |     |
|------------|-----|
| 序言 .....   | v   |
| 常用符号 ..... | vii |

## 第一编 理论基础

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 第一章 厚壁结构动力学概论 .....          | 1  |
| § 1 厚壁结构力学问题的提出 .....        | 1  |
| § 2 厚壁结构理论的应用 .....          | 3  |
| § 3 厚壁结构动力理论的基本问题 .....      | 8  |
| § 4 厚壁结构动力学的发展 .....         | 15 |
| § 5 厚壁结构动力问题的数值计算与实验方法 ..... | 26 |
| § 6 厚壁结构的设计计算 .....          | 28 |
| 第二章 厚板动力理论的基本方程 .....        | 30 |
| § 1 基本假定 .....               | 30 |
| § 2 基本方程的建立 .....            | 34 |
| § 3 方程的几种特殊情况 .....          | 40 |
| § 4 厚板的应力、应变表达式 .....        | 49 |
| 第三章 单向厚板的动力分析 .....          | 57 |
| § 1 基本方程及自由振动一般解 .....       | 57 |
| § 2 各种边界条件下频率方程及主振型 .....    | 61 |
| § 3 厚板的频率特征与频率厚化系数 .....     | 70 |
| § 4 在外载荷作用下的动力分析 .....       | 75 |
| 第四章 矩形厚板的动力分析 .....          | 81 |
| § 1 各种边界条件矩形厚板的固有频率与振型 ..... | 81 |
| § 2 厚板振型的正交条件 .....          | 85 |

|     |                              |     |
|-----|------------------------------|-----|
| § 3 | 矩形厚板自由振动解的一般形式 .....         | 89  |
| § 4 | 矩形厚板强迫振动解的一般形式 .....         | 91  |
| § 5 | 受冲击波作用的四边简支厚板 .....          | 94  |
| § 6 | 矩形厚板动力计算的实用解 .....           | 101 |
| § 7 | 厚板的动力反应特征及挠度、内力厚化系数 .....    | 114 |
| 第五章 | 具有曲线边界厚板的动力分析 .....          | 125 |
| § 1 | 厚板的极坐标系动力方程 .....            | 125 |
| § 2 | 圆厚板的振动 .....                 | 129 |
| § 3 | 圆环形及扇形厚板的振动 .....            | 139 |
| § 4 | 厚板的椭圆坐标系动力方程 .....           | 149 |
| § 5 | 椭圆厚板的振动 .....                | 150 |
| 第六章 | 各向异性厚板的动力分析 .....            | 161 |
| § 1 | 各向异性厚板的基本动力方程 .....          | 161 |
| § 2 | 正交各向异性及横观各向同性矩形厚板的动力计算 ..... | 171 |
| § 3 | 复合板件的动力计算 .....              | 179 |
| 第七章 | 厚板构件的动力塑性分析 .....            | 192 |
| § 1 | 方法概述 .....                   | 192 |
| § 2 | 厚板的动力屈服载荷 .....              | 199 |
| § 3 | 厚板的动力极限载荷 .....              | 203 |
| § 4 | 在冲击载荷作用下四边支承厚板的塑性分析 .....    | 204 |
| 第八章 | 在动载荷作用下厚板结构的力学特征与规律 .....    | 209 |
| § 1 | 位移、应力沿厚度方向分布规律 .....         | 210 |
| § 2 | 挠度、内力沿平面方向分布规律 .....         | 214 |
| § 3 | 厚壁因素效应 .....                 | 215 |
| § 4 | 结构的动力反应 .....                | 217 |
| § 5 | 其他 .....                     | 217 |

## 第二编 应用公式

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 说明 .....            | 220 |
| 第九章 厚壁构件的动力计算 ..... | 222 |

• 目 •

|      |                     |     |
|------|---------------------|-----|
| § 1  | 固有频率 .....          | 272 |
| § 2  | 动挠度峰值 .....         | 279 |
| § 3  | 动弯矩峰值 .....         | 281 |
| § 4  | 动剪力峰值 .....         | 281 |
| 第十章  | 厚壁构件的动力极限载荷计算 ..... | 287 |
| § 1  | 动力屈服载荷 .....        | 287 |
| § 2  | 动力极限载荷 .....        | 287 |
| 第十一章 | 厚壁构件的静力计算 .....     | 297 |
| § 1  | 挠度 .....            | 297 |
| § 2  | 弯矩 .....            | 334 |
| § 3  | 剪力 .....            | 383 |
| 第十二章 | 厚壁构件的静力极限载荷计算 ..... | 399 |
| 附录   | .....               | 400 |
| 参考文献 | .....               | 407 |

# 第一编 理论基础

## 第一章

### 厚壁结构动力学概论

#### § 1 厚壁结构力学问题的提出

固体力学的研究已经有几个世纪的历史，目前它已成为各工程技术领域广泛应用的学科之一。固体力学研究的产生与进展也是社会生产实践发展的产物。随着科学技术与工业的发展，各种构件与结构的强度、刚度、稳定、振动等问题的分析计算就成为各种受载机械与设施设计计算的不可缺少的组成部分。而近百年来得到发展与广泛应用的受弯构件分析方法主要属于结构分析经典理论（梁、框、板、箱、拱、壳）的范畴。经典理论主要是采用所谓 Kirchhoff<sup>[1]</sup> “直法线”假定。由于这一假定，才使复杂的连续介质力学理论能应用于大部分结构构件的计算。这一假定的提出以及相应的经典理论的建立和进一步发展对于近世纪来的工业技术的发展起着重大的促进与推动作用，它已成为目前大量工程结构设计计算基础之一。

经典理论的“直法线”假定规定原垂直结构中面（线）

的法线变形后仍保持为直线且垂直于此变形后的中面(线),也就是垂直剪变形为零。而由平衡方程知,不均布弯矩或扭矩必将产生垂直剪力和相应剪应力。有剪力而没有剪变形,这是不符合固体力学基本方程的,是经典理论矛盾之一。此外,经典理论还假定挤压变形为零。而由平衡方程知,沿平面不均布剪应力必将产生挤压应力(法应力)。有挤压应力而无挤压变形,这也同样不符合固体力学基本方程的,是经典理论的又一矛盾。当然经典理论还有其它一些矛盾,诸如动力问题计入惯性力而不计入惯性力矩,板件每边不能满足应有的三个边界条件等等。

但是经典理论的这些假定对于一般厚跨比不太大的均质结构而言是许可的。因为大家熟知,弯曲应力  $\sigma_x$ 、剪应力  $\tau_{xz}$ 、法应力  $\sigma_z$  三者与厚跨比  $h/b$  及外载  $q$  间有下列简单关系(以梁为例):

$$\begin{cases} \sigma_{x \max} \propto \frac{q}{(h/b)^2}, \\ \tau_{xz \max} \propto \frac{q}{(h/b)}, \\ \sigma_{z \max} \propto q. \end{cases} \quad (1.1)$$

而对于工程上常用的厚跨比 ( $h/b \ll 1$ ), 则有  $\sigma_z \ll \tau_{xz} \ll \sigma_x$ , 因此在计算弯曲应力时忽略剪应力产生的剪变形与法应力产生的挤压变形还是许可的, 这就是为什么近似的经典理论可以得到广泛应用的基本原因。

显然, 当厚跨比逐渐增大时, 由式 (1.1) 知, 弯曲应力相对剪应力、法应力降低更甚, 也就是  $\tau_{xz}$ 、 $\sigma_z$  相对  $\sigma_x$  越显重要而不能忽略不计。因此在大厚跨比结构中必须重新探讨和研究经典理论基本假定和建立相应的新的精确化理论, 这就提出了“厚壁结构力学”问题。因此, 厚壁结构力学主要研究结构分析经典理论基本假定存在的矛盾与适用的范

围，以及建立应用范围更为广泛的精确化理论。这一问题的研究为各工程技术领域更为广泛应用固体力学的研究成果创造条件并提供可能，因此它是固体力学以及科学技术目前关心的课题之一。

从另一角度而言，经典理论实际上是三维弹性理论在某些特殊尺寸、形状物体范围内的简化。厚壁结构理论将充分研究这些简化所引起的结构分析与三维弹性理论之间的差异，而寻找一种介于二者之间的简化理论。这种理论将比经典理论有所精确，但也仍是三维弹性理论的一种简化。因此，从这一意义上来说，厚壁结构理论也是固体力学的一种基础理论，这种理论不但对厚跨比较大结构，而且对于构件精确化分析和研究经典理论所不能概括的力学现象将都具有普遍意义（诸如高径比较大的孔洞的应力集中<sup>[2, 3]</sup>或断裂问题<sup>[4]</sup>）。

## § 2 厚壁结构理论的应用

目前世界科学技术的发展涉及到一系列高压、高速、高温以及特殊性能材料问题，这就是厚壁结构理论日益引起注意与重视的原因。承受高压载荷的设备除提高材料强度之外，增加结构厚度是熟知有效办法。近代大量工程结构厚跨比早已超过经典理论所适用范围，必须考虑和应用相应厚壁结构理论。工程上产生的高压载荷往往是瞬时高速动载荷，因此大多数厚壁结构又伴随着动力学问题。至于在近代工程中逐渐得到广泛应用的具有特殊性能的夹层结构及复合材料构件等均是以厚壁结构理论作为分析基础的。

厚壁结构理论的应用大致可以分为以下三个方面：

## 一、几何上

主要由于几何尺寸上厚跨比超过经典理论范围而必须应用厚壁结构理论来设计计算的某些工程构件，这涉及国防及国民经济几个重要部门，首先是防护工程及原子能工程。

近代核武器与运载工具发展的重要标志是当量日益增强以及命中率越来越高。这归结为防御核武器袭击的重要工程的设防抗力日益增高。当然大量工事可以建筑在地下深处，但不可避免一部分暴露于地面的构筑物仍承受相当大的冲击波动载荷，诸如，地下指挥机关及重要战备物资贮藏处出入口头部，发射井井盖，各种防护门、通风口及门框等。这些结构又往往是防护工程及其所在人员与设备安全的关键。冲击波载荷的破坏力是相当强的，一般民用建筑物承受 $0.1\sim 1.0\text{kg/cm}^2$ 超压冲击波就要遭到很大破坏。而目前地面或浅埋结构设防抗力有的要达到几十甚至上百个超压。因此大量防护工程中主要承载结构的厚跨比都相当大，其设计计算均需考虑和涉及厚壁结构动力理论。尤其值得提出的是，面对杀伤力很大的中子弹、强击弹等新武器出现，将来人员防护主要依靠增加结构厚度来实现，厚壁结构将更加引起防护工程设计人员重视。最近有的国家正在研制可以潜入地下很深的穿地弹，将来即使是地下工事主体也需考虑厚壁结构的分析。

在另一个新兴技术部门——原子能工程中，大量部件为了抗辐射均采用较厚壁结构，当然这些构件设计需同时考虑材料抗辐射性能或热应力等问题。此外，高压化工容器、大坝、大型电机轴瓦等等均涉及厚壁结构力学问题。可以想象，对于在几何上厚壁结构应用是不胜枚举的，凡是由于强度、刚度或使用上需要，构件的厚跨比大于一定程度就要遇

到厚壁结构理论问题。

属于几何原因应用厚壁结构理论的另一类问题是构件的高频振动。有些构件原始厚跨比并不十分大，但高阶振动频率计算必须计入剪变形及转动惯量影响而应用厚壁结构动力学理论。粗略来说，对振型沿某方向有  $n$  个半波的振动频率，其剪变形及转动惯量影响相当于厚跨比加大  $n$  倍相应构件的影响<sup>(3)</sup>，因此对于需要直接计及高阶频率的某些计算（如，共振隔离、声学器械等）厚壁结构理论将具有实用意义。

## 二、构造上

涉及厚壁结构理论的不单是顾名思义属于前一类其壁较厚的构件。对于某些非匀质的组合构件，即使厚跨比不太大，但由于构造上原因，其相对剪切刚度比一般匀质构件要低很多，剪变形影响甚大，也同样必须运用厚壁结构理论来进行分析。属于这一类的典型结构就是目前在航空、宇航和船舶制造等部门愈来愈得到广泛重视的夹层结构<sup>(5)</sup>。

夹层结构由强而硬的薄表板和轻而柔的厚心层组成。表板承弯，夹心部分起支撑表板作用，以保证其整体较大抗弯刚度，但其本身抗剪刚度较低。这种结构与工字梁类似，具有重量轻、强度高、刚性大的特点，还可获得良好的抗振、隔热、隔音等性能，特别适用于要求以最轻重量抵御强大气动载荷的航空及宇宙飞行器部件。

夹层结构的表板由高强度、高模量的金属、玻璃纤维加强聚合物、纤维板等组成，因此结构抗弯刚度还是相当大。而其夹心层往往利用泡沫塑料以及各种具有空心形状（蜂窝型、波纹型、双曲抛物体型）的金属薄片，因此由其主要承剪的结构抗剪刚度是相当低的。例如，匀质金属材料一般有  $G/E = 0.3 \sim 0.5$ ，而正六角形蜂窝式夹层结构的折合相对剪

290833

• 5 •