中央财经大学重点系列教材

线性代数

XIANXING DAISHU

（第二版）

综合类

ZONGHELEI

陈文灯　主编

综合类　管理类　经济类

中国财政经济出版社

中央财经大学重点系列教材（综合类）

线　性　代　数

（第二版）

陈文灯　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数：综合类/陈文灯主编 .—2 版 .—北京：中国财政经济出版社，2001.7

中央财经大学重点系列教材

ISBN 7－5005－5157－6

Ⅰ.线… Ⅱ.陈… Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 031130 号

中国财政经济出版社出版发行

URL：http：//www．cfeph com

E－mail：cfeph @ drc gov cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码：100036

发行处电话：88190406 财经书店电话：64033436

北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销

850×1168 毫米 32 开 7.375 印张 176000 字

2001 年 7 月第 2 版 2001 年 7 月北京第 1 次印刷

印数：1－10060 定价：12.00 元

ISBN 7－5005－5157－6/O 0016

序

为全面贯彻落实《中国教育改革和发展纲要》，适应我国社会主义市场经济发展的需要，根据国家教委《“九五”期间普通高等学校教材建设与改革的意见》的精神，我校组织了本校有优势和特色的学科（专业）教材的规划工作，并决定编写、出版《中央财经大学重点系列教材》。

中央财经大学是我国财政部直属的一所面向全国的以经济学科和管理学科为主的大学，拥有一批在财政税收、金融保险、会计学、经济管理、经济信息、法律等学科享有盛誉的专家、学者。编写、出版《中央财经大学重点系列教材》是我校面向21世纪，顺应学科重大调整和素质型人才培养目标而采取的重要教育改革措施之一。编者有较丰富的教学经验和较高的学术造诣，力求使教材能够反映该学科的基本理论体系，反映当代国内外经济科学发展水平，紧密结合改革实践，处于学科学术前沿，富有创新精神。该重点系列教材分为经济、管理、综合三大类，将在几年内陆续出版。

《中央财经大学重点系列教材》主要供我校各相关专业使用，也欢迎兄弟院校和社会各界选用。

《线性代数》作为综合类教材之一，已经校教材编审委员会审定，书中如有不妥，请读者指正。

中央财经大学教材编审委员会

1998年2月

前　言

本书是根据1989年10月国家教委审定的《经济数学基础教学大纲》编写的适用于高等学校财经类专业使用的教材，是《经济数学基础》的第二册。

本书主要内容：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型等。每章后配备一定数量的习题，习题分(A)、(B)类。(A)类为计算、证明题；(B)类为填空、选择题。考虑到不少学生“考研”的需要，习题中也选入一些难度较大的题。本书力争做到对基本概念、基本理论的叙述规范、通俗意懂、言简意赅；对推理论证，严密、思路清晰、脉络清楚。既注意培养学生的收敛性思维，又注意培养学生发散性、创造性思维。

参加本书编写的有陈文灯（任主编，编写第四章）、佟吉森（任副主编，编写第一、二章）、王守桢（任副主编，编写第三、五章）。

衷心感谢葛渭高教授对本书所提的宝贵意见。

由于经验和水平所限，本书定有不当和错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

1998年4月

再版说明

《线性代数》是中央财经大学重点系列教材。自出版发行以来，除作为我校核心教材外，还在一定程度上满足了兄弟院校教学需要。

在修订过程中，编者力求在原版的基础上有所完善、有所提高。一方面，对原版编写及排印中的疏漏进行了修正；另一方面，对原版内容进行了谨慎的筛选和必要的补充。参加本次修订工作的人员安排是：由付小芹（副主编）对原版第一、二章进行重新编写，其余各章由原作者进行修订。

由于编者水平有限，书中会有不当和错误之处，敬请读者和同行指正。

编　者

2001 年 5 月

目　录

第一章　行列式 ……………………………………………… (1)
§1.1　排列与逆序 ……………………………………… (1)
§1.2　n阶行列式的定义 ………………………………… (3)
§1.3　行列式的性质 …………………………………… (7)
§1.4　行列式按行（列）展开 ………………………… (14)
§1.5　克莱姆（Cramer）法则 ………………………… (23)
习题一 ……………………………………………… (28)
习题一答案 ………………………………………… (35)
第二章　矩阵及其运算 ………………………………… (38)
§2.1　矩阵的概念 ……………………………………… (38)
§2.2　矩阵的运算 ……………………………………… (40)
§2.3　几种特殊矩阵 …………………………………… (47)
§2.4　分块矩阵 ………………………………………… (50)
§2.5　逆矩阵 …………………………………………… (57)
§2.6　矩阵的初等变换 ………………………………… (64)
习题二 ……………………………………………… (73)
习题二答案 ………………………………………… (80)
第三章　线性方程组 …………………………………… (84)
§3.1　消元法解线性方程组 …………………………… (84)
§3.2　n维向量 ………………………………………… (97)
§3.3　向量组的秩 ……………………………………… (109)

§3.4 矩阵的秩 …………………………………………… (115)
§3.5 线性方程组解的一般理论 …………………………… (124)
习题三 …………………………………………………… (140)
习题三答案 ……………………………………………… (151)
第四章 向量空间、矩阵的特征值与特征向量 ………… (156)
§4.1 向量空间 ………………………………………… (156)
§4.2 向量的内积 ……………………………………… (166)
§4.3 正交矩阵 ………………………………………… (170)
§4.4 矩阵的特征值和特征向量 ………………………… (173)
§4.5 相似矩阵和矩阵对角化的条件 …………………… (180)
§4.6 实对称矩阵的对角化 …………………………… (184)
习题四 …………………………………………………… (190)
习题四答案 ……………………………………………… (194)
第五章 二次型 ………………………………………… (198)
§5.1 二次型及其矩阵 ………………………………… (198)
§5.2 化二次型为标准形 ……………………………… (203)
§5.3 化二次型为规范形 ……………………………… (211)
§5.4 正定二次型 ……………………………………… (214)
习题五 …………………………………………………… (221)
习题五答案 ……………………………………………… (225)

第一章　行　列　式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具，而线性方程组又是线性代数的一个重要部分．本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法以及解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1　排列与逆序

为了给出 n 阶行列式的概念，我们首先引入排列与逆序．

定义 1.1　由 n 个数码 1，2，3，…，n 组成的一个没有重复数码的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列．例如 321，213 都是三级排列，2413 是一个四级排列．

这里的排列就是中学代数里所说的 n 个不同元素的全排列，因此由数码 1，2，…，n 所组成的所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个．例如，由数码 1，2，3 所组成的所有不同的三级排列共有 $3!=6$ 个．它们是：

123，132，231，213，312，321

在以上所有的三级排列中，除排列 123 是按从小到大顺序排列（称此排列为自然排列）以外，其余的排列中，都有较大的数码排在较小的数码前面。

定义 1.2　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数码 i_t 排在较小的数码 i_s 的前面（$i_t>i_s$），则称 i_t 与 i_s 构成一个逆

序，记作 $i_t i_s$；一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中逆序的总数，称为这个排列的逆序数，记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

如果排列的逆序数是奇数称为奇排列，是偶数则称为偶排列.规定逆序数为零的排列为偶排列．如三级排列 123，231，312 是偶排列，132，213，321 是奇排列．

定义 1.3 在一个 n 级排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果将其中两个数码 i_s 和 i_t 的位置互换，其余数码位置不变，就得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这样的变换，称为一个对换．相邻两个数码的对换称为相邻对换．

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性．

证明 先证相邻对换的情形．

设排列为 $i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_s i_t i_{t+1} \cdots i_n$，对换 i_s 与 i_t 后，变为 $i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_t i_s i_{t+1} \cdots i_n$，显然 $i_1 i_2 \cdots i_{s-1}$，$i_{t+1} \cdots i_n$ 这些数码构成的逆序及它们与 i_s 或 i_t 构成的逆序经过对换并不改变，只是数码 i_s 与 i_t 是否构成逆序在对换前后不同．如果 $i_s < i_t$，则经过对换后逆序就增加一个；如果 $i_s > i_t$，则经过对换后逆序就减少一个，因此原排列与新排列的奇偶性恰好相反，即一次相邻对换改变排列的奇偶性．

再证一般对换的情形．

设排列为 $i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_s i_{s+1} \cdots i_{s+m} i_t i_{t+1} \cdots i_n$，其中 i_s，i_t 为任意两数码，先将 i_t 做 m 次相邻对换调成 $i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_s i_t i_{s+1} \cdots i_{s+m} i_{t+1} \cdots i_n$，再将 i_s 做 $m+1$ 次相邻对换调成 $i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_t i_{s+1} \cdots i_{s+m} i_s i_{t+1} \cdots i_n$，完成这样的对换总共需经过 $2m+1$ 次相邻对换，因此两排列的奇偶性相反．

定理 1.2 在所有的 n $(n \geqslant 2)$ 级排列中，奇排列与偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个．

证明　设在所有的 n 级排列中，奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个．

对这 p 个奇排列施以同一个对换 $(i_s,\ i_t)$，则由定理 1.1 可知 p 个奇排列全部变成偶排列，于是得到 p 个偶排列，由于偶排列总共只有 q 个，所以 $p\leqslant q$；同理，如果将全部的偶排列也都施以同一个对换 $(i_s,\ i_t)$，则 q 个偶排列全部变成奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以 $p=q$，即奇排列与偶排列的个数相等．

又由于 n 级排列共有 $n!$ 个，故 $p+q=n!$，所以 $p=q=\frac{n!}{2}$.

§1.2　n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先来分析二阶、三阶行列式的结构。二阶及三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出，它们都是一些乘积项的代数和；而每一乘积项都是由行列式中位于不同行、不同列的元素构成的；并且等号右端恰好就是由所有这种可能的乘积项组成．另外每一项还带有一定的符号，如在三阶行列式中，右端的每一项均可写成如下一般形式．

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

当这一项中各元素的行标按自然排列时，则该项的符号由其列标构成的排列的奇偶性来决定，若 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，则该项的符号取正号；若 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，则该项的符号取负号．因此三阶行列式也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示对所有的三级排列求和．

仿照三阶行列式的特点，可以给出 n 阶行列式的定义．

定义 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是由 n^2 个元素构成的一个数表，其中横排称为行，纵排称为列，a_{ij}称为第 i 行第 j 列上的元素．它表示 $n!$ 项的代数和，每一项都是取自行列式不同行不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号是：当这一项中元素的行标为自然排列时，若列标构成的排列为偶排列则取正号，若列标构成的排列为奇排列则取负号．所以 n 阶行列式中的一般项可写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有的 n 级排列时，则得到 n 阶行列式所表示的代数和中的所有项．因此 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (1.2)$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对所有的 n 级排列求和．(1.2) 式称为 n 阶行列式按行自然排列的展开式．

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$，即由一个元素 a 构成的一阶行列式就是元素 a 本身．

例 1　计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　根据行列式定义，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，但由于该行列式中有许多元素为零，含零元素的项等于零，因此只需求出那些不等于零的项进行计算．而 D 的一般项 (1.1) 式中，只有当 $j_1=1$，$j_2=2$，…，$j_n=n$ 时，乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 才可能不为零．所以

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线．仿照例 1 可得，上三角形行列式与对角形行列式的值，均等于主对角线上所有元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由于数的乘法满足交换律，所以行列式的一般项中各元素的位置可以任意交换．可以证明

定理 1.3 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{1.3}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 及 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列（证略）．

推论 n 阶行列式的展开式又可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{1.4}$$

(1.4) 式称为行列式按列自然排列的展开式．

例 2　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　根据（1.4）式，行列式中的一般项只有当 $i_1=n$，$i_2=n-1,\cdots$，$i_{n-1}=2$，$i_n=1$ 时才可能不等于零，所以

$$D=(-1)^{\tau(n\cdots 21)}a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

§ 1.3　行列式的性质

利用行列式的定义计算较高阶的行列式，计算量是相当大的，因此为了简化行列式的计算，有必要研究行列式的性质．

将行列式 D 的行、列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，简称转置．记为 D'（或 D^T）．

性质 1　行列式转置，其值不变，即 $D=D'$.

证明　若行列式 D 及其转置 D' 分别记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\qquad D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

根据转置的定义，有 $a_{ij}=b_{ji}$（i，$j=1$，2，$\cdots$，n）．因此将 D' 按行自然排列展开，得

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \end{aligned}$$

即为行列式 D 按列自然排列的展开式，所以 $D = D'$.

性质 1 表明，行列式的行和列的地位是相同的，因此对于行成立的性质，对于列也一定成立．

性质 2 互换行列式 D 的某两行（列）的位置，行列式的值变号．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } s \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } t \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } s \text{ 行} \\ \\ \text{第 } t \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

其中“ ”表示互换箭头所指的两行．

证明 互换行列式 D 的第 s 行，第 t 行后得到的行列式记为 D_1，则根据行列式定义，有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_t} \cdots a_{tj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= -D \end{aligned}$$

即 $D = -D_1$.

推论 1 如果行列式有两行（列）完成相同，则其值为零．

证明 将这两行互换，则 $D = -D$，故 $D = 0$.

性质 3 行列式中某一行（列）的公因子，可以提到行列式符号的前面．即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= k
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

证明　左边 $= \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

$= k \sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$

$=$ 右边

推论 2　行列式的某一行（列）中所有元素都乘以数 k 等于用数 k 乘以此行列式．

推论 3　若行列式的某一行（列）中所有元素全为零，则此行列式的值为零．

推论 4　若行列式的某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零．

性质 4　若行列式的某一行（列）中所有元素都是两个元素的和，则此行列式等于两个行列式的和．即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$