21世纪大学课程辅导丛书

线性代数

辅导与典型题解析

魏战线　编著

$$A=\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\}$$

西安交通大学出版社

21 世纪大学课程辅导丛书

线性代数辅导与典型题解析

魏战线　编著

西安交通大学出版社

内容简介

本书是按照原国家教委制定的《线性代数课程教学基本要求》，并参照全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的要求而编写的．全书共分六章：行列式；矩阵；向量和线性方程组；特征值和特征向量；实二次型，线性空间，欧氏空间，线性变换．外加两个附录：西安交通大学线性代数课程期末考试试题；1999～2001年全国硕士研究生入学考试线性代数试题．每章均包括基本要求、基本内容提要、重点与难点、典型题解析与基本解题方法、自我检测题等五部分．共收集各类有代表性的典型例题300余道及内容覆盖面大的练习题120余道．

本书可作为本科生及电大、职大生等读者学习线性代数的辅导教材，可供报考硕士研究生的读者复习应考之用，也可供有关教师及科技工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导与典型题解析/魏战线编．—西安：西安交通大学出版社，2001.9
ISBN 7-5605-1456-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.魏…　Ⅲ.线性代数-高等学校-自学参考资料　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第061595号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路25号　邮政编码:710049　电话:(029)2668315)
陕西宝石兰印务有限责任公司印装
各地新华书店经销

*

开本:787 mm×1 092 mm　1/16　印张:20.625　字数:500千字
2001年9月第1版　2001年9月第1次印刷
印数:0 001～5 000　定价:25.00元

发行科电话:(029)2668357,2667874

前　言

线性代数是一门重要基础课．随着科学技术的飞速发展和计算机的广泛应用，线性代数的理论与方法已成为科学研究及处理各个领域问题的强有力工具，成为各类科技人员必备的数学基础之一．要学好线性代数，除了要重视课堂学习，认真阅读教材，勤思考，多总结之外，还应做一定数量的习题．通过独立思考和反复练习，加深对基本概念、基本理论的理解和对基本方法的掌握，在解决问题的过程中，不断获取知识，提高分析和解决问题的能力，并培养科学思维和创新能力．然而，由于线性代数概念较多，有一定的抽象性，且有一套独特的理论体系和处理问题的规律与方法，初学者往往感到不易抓住重点，不易理解其抽象的概念与理论，特别是似乎容易听懂课，但做题感到困难，尤其是对推理方面的题常常感到无从下手．针对学习线性代数中的这些问题和困难，作者按照原国家教委制定的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》，参照全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》，并根据多年来从事线性代数课程教学及辅导的经验和体会，编写了本书．旨在帮助读者用较少的时间掌握线性代数的基本内容，提高学习效率；揭示线性代数处理问题的基本规律，帮助读者掌握这些基本规律和基本方法，达到举一反三，触类旁通，提高分析和解决问题的能力．

本书共分六章：行列式；矩阵；向量和线性方程组；特征值和特征向量；实二次型；线性空间，欧氏空间，线性变换．外加两个附录：一是西安交通大学线性代数课程期末考试试题，二是1999～2001年全国硕士研究生入学统一考试线性代数试题．每章均分为以下五部分．

(1)基本要求：依据线性代数课程的基本要求，指出本章应理解什么、了解什么、掌握什么、会什么．书中，将教学要求度分为两个层次：属较高要求的，对概念和理论用“理解”一词表述，对方法和运算用“掌握”一词表述，这些内容务必透彻理解，熟练掌握；用“了解”和“会”表述的内容也是教学中必不可少的，只是在要求上低于前者．

(2)基本内容提要：是对本章基本概念、基本理论及基本方法的简要归纳，提纲挈领，举其大要，使读者对本章的基本内容及要点一览无余，便于读者复习．

(3)重点与难点：侧重重点内容的分析讲解，注重揭示数学概念的实质及各概念间的关系，强调基本理论与基本方法，并指出难点及怎样克服难点，便于读者抓住重点，以主带次，进而掌握基本内容．

(4)典型题解析与基本解题方法：例题中有强化基本概念、基本理论与基本运算的填空题、单项选择题、计算题和证明题，有一题多解的开拓思路题，有灵活和综合运用知识的综合题，还有对理论与方法进一步引伸的提高题，以及少量的应用题．通过对大量各类典型例题的分析、求解、归纳、小结、提问、注释、引伸，启发引导读者逐渐领悟和学会对线性代数各类基本问题的分析和求解方法，掌握解题步骤并学会解题技巧，特别是从解决问题的过程中，加深对基本概念和基本理论的理解，提高分析和解决问题的能力．希望读者在读每个题解之前，自己能先想一想、做一做；在读完例题之后，也能从基本概念、基本理论以及解题方法等方面加以总结，这

样效果会更好一些．

(5)自我检测题：读者可以从这些题中有选择地进行训练，以增强自己解决问题的能力，并检验自己对所学知识以及解题方法与技巧的掌握程度．自我检测题均附有答案、提示或简要解答．

书末附录中的期末考试试题及全国考研试题，有助于读者熟悉题型，有针对性地加强训练以备应考．

为了满足不同学时及不同层次读者的需要，本书在选材的深广度上及内容体系的安排上作了较全面的考虑：第一，将全书内容分为两个层次，前五章(不包括带“*”号的内容与题目)符合原国家教委的《线性代数课程教学基本要求》以及全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》的要求，适用于32～36学时的读者，全书则适用于50学时左右的读者；第二，例题与习题不限于作者在教学中经常使用的以及一般教科书和习题集中的典型题目，还有部分题目是全国研究生统考试题和部分高校的期末考试试题．因此，本书有较广泛的适用性，既可作为本科生及电大、职大、函大生等读者的学习辅导书，也可供报考硕士研究生的读者复习应考之用，还可供有关教师和科技工作者参考．

限于编者的水平，本书难免有疏漏、缺点甚至错误，恳请读者和使用本书的教师提出宝贵意见，以便今后进一步改进．

作 者

2001年6月10日

于西安交通大学

本书常用符号说明

(i,j)元素	行列式或矩阵的第 i 行、第 j 列处的元素
$D_n=\|a_{ij}\|$	(i,j)元素为 a_{ij}的 n 阶行列式
D_n^{T}	行列式 D_n 的转置行列式
$\boldsymbol{A}$	矩阵(大写黑体字母)
$\|\boldsymbol{A}\|$,或 $\det(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵
$\boldsymbol{O}$	零矩阵(大写黑体字母)
$\boldsymbol{0}$	零向量(黑体零)
$\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$($\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}_n$)	单位矩阵(n 阶单位矩阵)
$\boldsymbol{A}^*$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵
$r(\boldsymbol{A})$,或秩($\boldsymbol{A}$)	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹(即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素之和)
$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	主对角线元素依次为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的对角矩阵
$\boldsymbol{E}_{ij}$	(i,j)元素为 1、其余元素全为零的矩阵
$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$	交换矩阵(或行列式)的 i,j 两行(列)的变换
$kr_i(kc_i)$	用非零数 k 乘矩阵第 i 行(列)的变换
$kr_i+r_j(kc_i+c_j)$	把矩阵(或行列式)的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上去的变换
$\boldsymbol{E}(i,j)$	交换单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的 i,j 两行(列)后所得的初等方阵
$\boldsymbol{E}(i(k))$	用非零数 k 乘单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(列)后所得的初等方阵
$\boldsymbol{E}(i,j(k))$	把单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行(或把 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 列的 k 倍加到第 j 列)后所得的初等方阵
$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{x}$	向量(小写黑体字母)
$\boldsymbol{e}_i$	第 i 个分量是 1、其余分量全为零的向量
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积
$\\|\boldsymbol{\alpha}\\|$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度(范数)
F	数域
R	实数域
C	复数域

F^n	数域 F 上 n 维向量全体所成的集合(也指向量空间 F^n)
R^n	n 维实向量全体所成的集合(也指向量空间 R^n)
C^n	n 维复向量全体所成的集合(也指向量空间 C^n)
$F^{m\times n}$	数域 F 上 $m\times n$ 矩阵全体所成的集合(也指线性空间 $F^{m\times n}$)
$R^{m\times n}$	$m\times n$ 实矩阵全体所成的集合(也指线性空间 $R^{m\times n}$)
$C^{m\times n}$	$m\times n$ 复矩阵全体所成的集合(也指线性空间 $C^{m\times n}$)
$F[x]_n$	数域 F 上次数不超过 n 的一元多项式全体所成的集合(也指线性空间 $F[x]_n$)
$F[x]$	数域 F 上一元多项式全体所成的集合(也指线性空间 $F[x]$)
$C[a,b]$	闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体所成的集合(也指线性空间 $C[a,b]$)
θ	线性空间的零元素
$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$	由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 所生成的线性空间
$V_1\cap V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的交
V_1+V_2	子空间 V_1 与 V_2 的和
$V_1\oplus V_2$	子空间 V_1 与 V_2 的直和
T,S	线性变换
$L(V,W)$	由线性空间 V 到线性空间 W 的线性变换全体
$L(V)$	由线性空间 V 到 V 自身的线性变换全体
$R(T)$,或 $T(V)$	线性变换 T 的值域(象空间)
$\ker(T)$,或 $T^{-1}\{\theta\}$	线性变换 T 的核(零空间)
$\forall$	表示"对任给的","对所有的". 例如,用"$\forall\in X,P$"表示"对集合 X 中的所有元素,都具有性质 P"
$\exists$	表示"存在"
$P\Rightarrow Q$	表示"由 P 可以推出 Q",或"P 蕴含 Q",或"P 是 Q 成立的充分条件",或"Q 是 P 成立的必要条件"(其中 P,Q 是条件或命题)
$P\Leftrightarrow Q$	表示"P 成立当且仅当 Q 成立",或"P 与 Q 等价",或"P 与 Q 互为充分必要条件"

魏战线　西安交通大学理学院副教授，从事工科数学教学二十余年。曾获国家、省(部)及校级优秀教学成果奖等奖项二十余项，其中省(部)级以上奖项五项。为国家级高等数学、线性代数及概率统计题库组成员。编写出版《线性代数》、《线性代数与空间解析几何》、《工科数学分析基础》等教材及《线性代数自学辅导》、《线性代数与空间解析几何典型题》等教学辅导书多部。发表研究论文多篇。

线性代数

辅导与典型题解析

目　　录

第1章　行列式

1.1　基本要求

(1)了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

(2)会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

(3)掌握克莱姆(Cramer)法则.

1.2　基本内容提要

1.2.1　排列及其逆序数

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数字组成的一个全排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$,称为一个 n 级排列,通常记其为 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$.

在一个排列中,如果有一个大的数排在一个小的数之前,则称这两个数构成该排列的一个逆序.一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的逆序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$.

逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列解为奇排列.

1.2.2　n 阶行列式的定义

2 阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

一般地,n 阶行列式的定义为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1-1)$$

称(1-1)式右端的数为 n 阶行列式 D_n 的展开式,其中 $\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对所有 n 级排列求

和，即 D_n 的展开式中共有 $n!$ 项，其中每一项都是取自 D_n 的不同行、不同列的 n 个元素的乘积的代数和，而且每个乘积项前面所带符号的规律为：当把这 n 个元素按行指标成自然排列的次序排列时，由这 n 个元素的列指标所成排列为偶排列或奇排列，分别在该乘积项前面冠以正号或负号.

1.2.3 行列式的性质及展开定理

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 2 将行列式中任意两行(列)互换后，行列式的值仅改变符号.

性质 3 若行列式中有两行(列)相同，则行列式为零.

性质 4 行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外边来.或者说，用数 k 乘行列式某行(列)的所有元素，等于用 k 乘行列式.

特别地，若 $k=0$，则有：若行列式中有某行(列)的元素全为零，则行列式为零.

性质 5 若行列式中有两行(列)成比例，则行列式为零.

性质 6 如果行列式某行(列)的元素都是两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和.例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 7 把行列式某行(列)的 k 倍加至行列式的另一行(列)，行列式的值不变.

利用性质 7 可以把行列式中某些元素化成零，因而是最常用的一个性质.

性质 8(行列式的乘法规则) 设有两个 n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$.

余子式和代数余子式的定义

在 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列,由余下来的元素按原来的次序所排成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij}. 而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

定理 1.1(行列式按一行(列)展开定理) n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(1\leqslant i\leqslant n)\tag{1-2}$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(1\leqslant j\leqslant n)\tag{1-3}$$

称(1-2)式为 D_n 按第 i 行展开的公式,称(1-3)式为 D_n 按第 j 列展开的公式.

推论 n 阶行列式 D_n 的任一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\quad(i\neq k)\tag{1-4}$$

或

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0\quad(j\neq k)\tag{1-5}$$

综合定理 1.1 及其推论,可得代数余子式的重要性质

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases}D_n, & k=i\\0, & k\neq i\end{cases},\qquad \sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases}D_n, & k=j\\0, & k\neq j\end{cases}\tag{1-6}$$

子式及其代数余子式的定义

在 n 阶行列式 D_n 中任意取定 k 行、k 列($1\leqslant k\leqslant n-1$),则由这 k 行、k 列交叉点上的 k^2 个元素按原来的次序所排成的 k 阶行列式 M,称为 D_n 的一个 **k 阶子式**. 划去子式 M 所在的行和列,由余下来的元素按原来的次序所排成的($n-k$)阶行列式 N,称为 M 的**余子式**. 设 M 所在行的序号为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,M 所在列的序号为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$$

为 M 的**代数余子式**.

定理 1.2(拉普拉斯(Laplace)展开定理) 在 n 阶行列式 D_n 中任意取定 k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n-1$),则由这 k 行(列)所组成的所有 k 阶子式分别与其代数余子式的乘积之和等于行列式 D_n.

1.2.4 一些特殊行列式的计算公式

(1) 对角行列式等于它的主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(未写出的元素均为零,以后都是如此)

(2) 上(下)三角行列式的值等于它的主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)副对角线下(上)边的元素全为 0 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(4)n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式($n \geqslant 2$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j)$$

(5)分块对角方阵的行列式等于主对角线上各方阵的行列式的乘积

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$$

例如
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

(6)分块上(下)三角行列式等于它的主对角线上各方阵的行列式的乘积

例如,若 $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \boldsymbol{A}_{33}$ 均为方阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \\ & & \boldsymbol{A}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22}||\boldsymbol{A}_{33}|$$

(未写出的子块为零块,以下均如此)

1.2.5 克莱姆法则

定理 1.3 对于 n 个方程 n 个未知量的线性方程组