1917 — 1957

四十年來的苏联数学

偏 微 分 方 程

M. И. 維希克　A. Д. 梅什基斯
O. A. 奥列伊尼克 著

周 毓 麟 譯

科 学 出 版 社

1961

МАТЕМАТИКА В СССР ЗА СОРОК ЛЕТ 1917—1957

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М. И. ВИШИК А. Д. МЫШКИС О. А. ОЛЕЙНИК

Физматгиз

Москва 1959

内容簡介

本书系对苏联数学家在偏微分方程理論方面四十年来，主要是最近十年来，所取得的成就作了全面的系統的介紹，并且收集了非常丰富的参考文献；因此对于微分方程专門化大学生、研究生、教师、科学研究工作者以及其他有关方面的工作同志都将是很有价值的参考資料，也是学习苏联先进科学理論的桥樑.

全书共分三章，分别介紹了苏联数学家有关橢圓型方程理論、双曲型方程与抛物型方程理論以及其他理論方面的成就.

1917—1957

四十年来的苏联数学

偏微分方程

М. И. 維希克 А. Д. 梅什基斯

О. А. 奧列伊尼克 著

周毓麟 譯

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1961年10月第一版 书号：2398 字数：134,000

1961年10月第一次印刷 开本：850×1168 1/32

（京）00001—11,600 印张：5 1/8

定价：0.77元

目　　录

05489

偏微分方程

M. И. 維希克　A. Д. 梅什基斯　O. A. 奥列伊尼克

在本文中我們主要将叙述偏微分方程理論在最近十年来的发展情况，因为这方面在前一时期一些主要方向的概貌已在"三十年来的苏联数学"一书中叙述过了. 我們先来作一些一般性的評述.

在我国，偏微分方程理論（特别是数学物理方程）发展的初期就出現了欧拉（Euler）的大量著名的工作，这些工作影响着整个数学的发展. 对于数学物理的发展，以及对于吸引同时代的人們对这方面問題的注意，奥斯特洛格拉兹基（M. B. Остроградский）的工作起着很显著的作用. 从此偏微分方程理論的問題就成了彼得堡数学学派（索莫夫（И. И. Сомов），伊姆舍聶兹基（B. Г. Имшенецкий），考尔金（A. H. Коркин），桑宁（H. Я. Сонин）以及最近的一些数学家們）注意的中心. 科瓦列夫斯卡雅（C. B. Ковалевская）关于偏微分方程解析解的基本定理就是在現代的研究中还系統地被应用着.

較后一时期，在李雅普諾夫（A. M. Ляпунов）的工作中，不仅包含了关于位势理論方面大量的精細的結果，而且还包含了目前在偏微分方程理論中还在广泛应用着的一系列新方法和新概念. 李雅普諾夫引起哈尔柯夫（Харьков）数学学派对数学物理的重視. 斯切克洛夫（B. A. Стеклов）是这个学派的杰出的代表，他最先对于边界問題特征函数系的一般基本性質进行了深刻的研究.

格云堅尔（H. M. Гюнтер）的工作出現在新旧交接的时期. 他的一部分工作的內容和方法是属于古典方向的. 在他很著名的专著中（这专著[73]的俄文翻譯本是1953年出版的）詳細地研究

了各种位势的性质，以及与它們相联系的对于拉普拉斯（Laplace）和波阿松（Poisson）方程的基本边界問題，此外还研究了相应問題的特征函数，并且自始至終是在古典的意义下来理解問題的解的．另一方面，H. M. 格云堅尔是最先懂得广义解的重要意义的人們中的一个，他提出并解决了一系列在域函数术語下的数学物理問題(尤其可以参看[72])．

别尔什捷英（С. Н. Бернштейн）的关于偏微分方程方面的工作远远超过了当时的水平，并且对我国和外国的数学的发展起了巨大的影响．在二个变量的二阶橢圓型非綫性解析微分方程关于解析解的基本定理的証明中，与在对于这些方程狄利克雷（Dirichlet）問題的研究中，С. Н. 别尔什捷英提出和探討了一系列甚至于今天还在被广泛应用着的方法．范数的系統运用蘊藏着泛函分析方法的萌芽，輔助函数方法意味着极値原理的极为本质的发展，而解的按参数延拓的思想，連同所謂先驗估計的应用，直到今天还是边界問題(特别是非綫性的)研究中的一种基本方法．

在与本文所要討論的时期相緊接着的前一时期，出現了彼德罗夫斯基（И. Г. Петровский）的一系列重要的工作．他对于偏微分方程組进行了深刻的研究，分析了最广泛的双曲型、拋物型和橢圓型方程組的类别，并且刻划了它們解的基本性质．И. Г. 彼德罗夫斯基的这些工作奠定了偏微分方程組一般理論的基础，并确定了这理論在它以后发展中最主要的特点．

在同一时期，也出現了索勃列夫（С. Л. Соболев）的工作．这些工作包含着在偏微分方程理論中泛函分析方法的深刻研究．他所建立起来的泛函空間的嵌入定理、广义函数理論以及把方程的广义解看作泛函空間元素的思想，組成了偏微分方程理論中泛函方法的基础．他用这些方法研究了一些广泛的方程类．現在这些方法的应用范围还在不断地扩大．

我們所提出这个时期的工作(以后还要适当的討論)在頗大程度上确定了偏微分方程理論在当前时期发展的性质．

各个时期的和現在有的一些积极工作着的偏微分方程討論班

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

对于新思想新概念的产生和发展起了不少的促进作用，在这些討論班的周围形成了一些科学集体，其中包括了大量的青年工作者．首先要提出的是：在 И. Г. 彼德罗夫斯基，С. Л. 索勃列夫与吉洪諾夫（А. Н. Тихонов）領导下进行了多年工作的莫斯科討論班．这討論班同样也系統地討論外城数学工作者的报告，这对于在这領域方面团結各个集体組成一个統一的科学集体很有帮助．其他城市的科学集体在偏微分方程理論的发展方面同样也作出了卓越的貢献：例如列宁格勒（在斯米尔諾夫（В. И. Смирнов）領导下的）、梯比里斯（Тбились）（穆斯赫里什維里（Н. И. Мусхелишвили））、利沃夫（Львов）等等很多城市都有自己传統的研究方向．

在新思想和新方法的传布方面，同时在吸引青年們对于偏微分方程理論問題研究的兴趣方面，下列的教程和专著起着很重要的作用：最近时期出版的众所周知的斯米尔諾夫（В. И. Смирнов）[56]，彼德罗夫斯基（И. Г. Петровский）[39]，索勃列夫（С. Л. Соболев）[61]，吉洪諾夫（А. Н. Тихонов）[27] 和薩馬尔斯基（А. А. Самарский）[3] 所著的教科书；1945 年出版的柯朗（Courant）与希尔伯特（Hilbert）合著的专书第二册的俄文譯本；彼德罗夫斯基（И. Г. Петровский）[30] 所著的綜合評述性的文章；穆斯赫里什維里（Н. И. Мусхелишвили）[31]，索勃列夫（С. Л. Соболев）[52] 的专著，以及其他一些专书和文章．

偏微分方程理論，这門数学分析古典分支，虽然有二百多年的发展历史，但是不断用新的內容和新的研究方法加以丰富，它是在数学中占有中心地位的一个分支．最近十年以来，加強了这門学科与其他的数学分支之間的相互联系（如与泛函分析、函数論、积分方程論等等的联系），这种联系同时促进了解决旧問題与提出新問題的一些新的有效的思想和方法的产生．这理論实际应用的影响（首先应用到物理学与力学中去）就使它自己跳出了传統問題和古典型式方程的框框．計算数学的发展，特别是机器数学的发展同样促使加強对于一系列偏微分方程理論的問題的注意，特别加強了对于有限差分方法应用的注意；应該指出，这个方向是起源于

我国的(刘斯捷尔尼克 (Л. А. Люстерник), 1924 年).

关于最近十年来这理論发展的各个方向概貌的評述，作者們将提出的不是一个完整的概况. 首先应用性質的大量工作沒有包括在我們将介紹的范围内，原因是因为，虽然在这些工作中所发展了的很多研究方程的新思想和新方法无疑是很有意义、但是在这里对于特殊形式数学物理方程的研究显然是不完整的. 也沒有涉及一系列其他的工作，特别是几乎有全部是未发表的工作(其中包括学位論文)与作者們还不知道的 1957 年的工作. 由于篇幅的限制和由于情况不够了解，我們对很多工作沒能叙述到应有的程度，而对另外一些工作只是提到它們，沒有列出它們的內容. 由于文章的性質，我們几乎沒有提到外国的作者，虽然这里有很多相似的工作內容，甚至于还有重复的.

由于一系列的原因，我們有意識地把偏微分方程理論的某些問題和某些部分的全部內容都放到"四十年来的苏联数学"的其他部分里去了. 譬如，所有与边界問題的譜性質，与特征値、特征函数的研究有联系的問題都归到"四十年来的苏联数学""泛函分析"的一部分中去考虑；另一方面，在这"偏微分方程"里，考虑到所謂嵌入定理和压縮問題，同时也考虑一些在巴拿赫 (Banach) 空間中的微分方程理論的問題. 与"复变函数理論"有一系列交叉的內容(例如，我們只是粗糙地說明了些解析函数概念的直接推广和拟保角变换理論)；与"綫性积分方程"、"变分法"、"近似方法与数值方法"以及与其他一些部分有相近之处的也都列在本书中了.

各章內容的分布如下：1. 椭圓型方程；2. 双曲型方程与抛物型方程(这里也考虑到某些别的不定常过程的方程)；3. 其他問題(这里特別包括了混合型方程). 然后每章分成若干节，节又分成若干段. 在很多情况下，拘泥于以上的安排也是不很合适的；所以有些地方，为了避免重复，不加特別說明，就把一部分內容放到別的章节里去了. 文中有些章节可以看作是独立的，这样便利于它的应用和参考；在这里应該注意到的，定理的叙述一般都是簡化了的，就是在这叙述中沒有包括所有的假定.

第一章　椭圓型方程

最近时期,在椭圓型方程理論方面已得到的結果中,一系列的部分的內容在相当大的程度上达到了完备的地步. 二阶方程的理論是很完滿的. 在古典方法与泛函方法的基础上椭圓型方程組理論有很大的进展. 在平面上的方程与方程組的理論有了深刻的发展.同时椭圓型方程理論的一些新的重要分支开始有系統的探討.

§1. 古典的数学物理方程

我們先从古典数学物理方程理論的基础开始,这方面以前有很多我国数学家与外国数学家进行了很多工作;絕大部分的結果都总結在上面提到过的 H. M. 格云坚尔的专书里了(在翻譯过程中斯莫里茨基 (X. Л. Смолицкий) 簡化了某些定理的証明和补充一系列比較新的研究成果). 最近十年来,除了把古典的結果进一步精确化以外,同时对某些新的問題进行了探討.

1. 位势与調和函数的性質　当把通常假定的荷尔德 (Hölder) 条件換成較广泛的条件时,馬格納拉特捷 (Л. Г. Магнарадзе) [16] 証明单层位势切綫微商的存在性. 埃杜斯(Д. М. Эйдус)[8] 研究了密度为可积函数的双层位势的法綫微商. 在盖罗尼穆斯 (Я. Л. Геронимус) [105] 的工作中,研究了把 $\ln r$ 換成 $\varphi(\ln r)$ 的广义对数位势. 在勃雷烏斯 (K. A. Бреус) [3], 杜波辛 (Г. Н. Дубошин), 康杜拉尔 (В. Т. Кондурарь) [5], 庫宁 (П. Е. Кунин) [1], 塔克薩尔 (И. И. Таксар) [1], 馬格納拉特捷 (Л. Г. Магнарадзе) [1], 奧尔洛夫 (А. А. Орлов) 以及其他等人的工作中討論了特殊形式的体位势.

托尔斯托夫 (Г. П. Толстов) [25] 証明了,在平面上的一个任意有界函数,如果它具有在拉普拉斯方程中所出現的微商,而且

适合拉普拉斯方程，那末这函数是二次連續可微的.

兰特科夫 (Н. С. Ландкоф) [5, 7] 研究了在什么样的条件下，使得在平面或空間中无处不稠密列紧集合 E 上的連續函数总可以用在 E 上的調和函数任意精密度地一致逼近. 他得到了盖尔迪什 (М. В. Келдыш) 与拉夫連捷耶夫 (М. А. Лаврентьев) 的一些結果的推广，例如，可以看到在三維空間的情形，E 有测度零足够使得这种逼近有可能了.

对于在球内調和的与直到边界連續可微的函数，維希克 (М. И. Вишик) [9] 用初等方法証明了，梯度法綫分量沿边界的平方积分不超过梯度切綫分量同样的平方积分. 米赫林 (С. Г. Михлин) [48] 利用了他所研究过的多維奇异积分方程理論得到了相反性質的不等式. 这二方面的性質都已經推广到很广泛的二阶椭圓型方程上去了.

同样在沙維 (С. А. Савин) [1, 2] 的工作中考虑了調和函数的性質.

2. 拉普拉斯方程的狄利克雷問題 这里很多工作都与研究解在区域边界上的性質有关. 对于在三維空間薄层上的問題的解，拉夫連捷耶夫 (М. А. Лаврентьев) [66] 在他所引进的变分原理的基础上，得到了沿边界曲面法綫方向的微商的估計，这估計依賴于边界値和区域的几何性質. 埃杜斯 (Д. М. Эйдус) [8] 証明了，假設在二次連續可微的曲面 S 上所給定的边界函数具有平方可积的广义微商（定义見 § 5），那末解就在 S 上几乎处处有属于 $L_2(S)$ 的法綫微商. 科舍列夫 (А. И. Кошелев) [2] 証明了，如果在平面区域的足够光滑的边界上，边界函数的二級微商属于 $L_p(S)$ $(p > 1)$，那末解的二級微商属于 $L_p(\Omega)$；他同时还考虑了块块光滑的边界和更一般形式的椭圓型方程[7].

很早以前，对于有限区域上任意連續边界条件的情形，維納 (Wiener) 引进了关于拉普拉斯方程狄利克雷問題的广义解的概念；解在边界的所謂正規点上必定取給定的値，而在非正規点上就不一定了. 科罗夫金 (П. П. Коровкин) [9, 11] 得到了边界正

規性的新的特征. 兰特科夫 (H. C. Ландкоф) 在工作 [4] 中指出了,对于个別边界函数考虑了适合边界条件的問題,在边界上可以找到与边界函数无关的可数集合,如果在这集合的点上,广义解取已知値,那末在其他点上也有同样的情况. 在兰特科夫 (H. C. Ландкоф) 的工作 [8] 中包含了对于非正規点集合的研究. 梅什基斯 (А. Д. Мышкис) [12, 18] 証明了,柏龙 (Perron) 与維納关于給定連續边界条件时解的存在性的古典結果,可以推广到这样的情况,即当边界函数給在"广义边界"的情况,也就是,对于从不同途径趋向边界点时,解的极限値可以是不同的,而且这些途径和这些极限値应該是事先給定的.

M. B. 盖尔迪什与 M. A. 拉夫連捷耶夫在 1937 年最先研究了,当边界变动时关于解的稳定性問題. 在科罗夫金 (П. П. Коровкин) [9] 与麦吉列夫斯基 (Ш. И. Могилевский) [1, 2] 的工作中也有稳定性的研究; 后者得到了在給定边界点上解稳定性的充分与必要条件,这些条件是用所謂"容度"的专門术語与广义格林 (Green) 函数来表示的. 在克朗貝尔克 (B. A. Кронберг) 的文章 [1] 中,求得了解的按小参数冪次的展开式,这些小参数是用来刻划边界的变动的.

梅什基斯 (А. Д. Мышкис) [37] 提出了求解的新的变分原理: 在所有取給定边界値的函数中,調和函数使得作者所引进的泛函"負荷"达到极小値; 对于所謂变形了的("自由的")狄利克雷問題的解,这泛函取零値,在狄利克雷无穷积分情形时可以取有限値. 在托波連斯基 (Д. Б. Тополянский) [12] 的工作中考虑了狄利克雷积分的一些性質.

納湯松 (И. П. Натансон) [37] 証明了,当点沿半径离开圓周时,单位圓内狄利克雷問題的解与边界函数的差商不超过常数 $\omega[(1-r)\ln(1-r)]$, 其中 $\omega(\delta)$ 为边界函数連續性的模数; 吉曼 (А. Ф. Тиман) 在工作 [11] 中也討論了这个問題.

在烏斯品斯基 (B. A. Успенский) [1] 的工作中考虑了拉普拉斯的狄利克雷問題. 在瓦尔瓦克 (П. М. Варвак) [5, 6], 科兹

列夫（И. И. Козырев）[1]，列別杰夫（Н. Н. Лебедев）[3]，米納襄（Р. С. Минасян）[1, 7]，尼洛夫（Г. Н. Нилов）[1] 以及其他人的一些工作中討論了特殊类型的区域.

3. 拉普拉斯方程的其他边界問題 奥列伊尼克（О. А. Олейник）[24] 証明了，对应于在边界上的給定函数，牛孟（Neumann）問題的解（可以差一个任意常数）适合李普希兹（Lipschitz）条件，它的系数只依賴于問題的区域. 把在閉曲綫 S 內所要求的解看作在截断围綫上相应問題解的序列的极限的問題（所謂截断围綫即从 S 去掉任意小的弧所剩的部分），苏哈雷夫斯基（И. В. Сухаревский）[3, 4] 利用复位势作了研究.

在維基洛夫（Ш. И. Векилов）[1, 4—7] 的工作中，利用弗雷特霍姆（Fredholm）积分方程和不动点方法，解决了以下問題：作 N 个調和函数使在区域的边界上适合这些函数和它們的法綫微商之間的 N 个綫性的或非綫性的关系式；同时还允許这些調和函数在一些內部的曲面上有已知性质的間断. 在納塔列維契（В. К. Наталевич）[1—3]，舍尔曼（Д. И. Шерман），吉姆（Е. И. Ким）[3] 等人的工作中考虑了类似的問題. 在最后一工作中，在平面上所求調和函数应該适合的綫性边界条件可以包含任何阶微商. 关于这样的（維庫阿（И. Н. Векуа）在二个自变量情况最先詳細研究过的）条件我們将在 § 2 中討論. 舍尔曼（Д. И. Шерман）[11]研究了三維情形类似的条件，他利用位势型的积分，把相应的边界問題化为弗雷特霍姆积分方程.

比察捷（А. В. Бицадзе）[16, 18—20] 利用了他自己所建立的在三維空間中类似的柯西积分，研究了在三維空間中位势理論的各种边界問題.

在維基洛夫（Ш. И. Векилов）[1, 8]，維庫阿（Н. П. Векуа）[15]，古謝依諾夫（А. И. Гусейнов）[8, 9]，洛巴金斯基（Я. Б. Лопатинский）[17]，米納襄（Р. Н. Минасян）[2]，巴維斯基（П. П. Павинский）[1]，謝加尔（Б. И. Сегал）[30]，吉霍夫（М. Н. Тихов）[2] 以及其他等人的工作中同样也討論了拉普拉

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

斯方程的边界問題(在一般或特殊的区域上). 在維庫阿(И. Н. Векуа) [40], 庫溌拉特捷(В. Д. Купрадзе) [32], 米赫林(С. Г. Михлин) [41] 与穆斯赫里什維里(Н. И. Мусхелишвили) [33] 等人的书中, 都利用积分方程討論了拉普拉斯方程以及其他古典数学物理方程的一系列綫性問題的解. 所有这些問題都有很多的应用.

4. 拉普拉斯运算子的格林函数, 弗雷特霍姆方程 在埃杜斯(Д. М. Эйдус) [8] 的工作中, 对于在具有足够光滑边界三維区域上的第一边界問題, 得到了拉普拉斯运算子格林函数的微商的估計:

$$|D^k G(P,Q)| \leqslant A_k [\rho(P,Q)]^{-(k+1)} \quad (k=0,1,\cdots).$$

斯莫里茨基(Х. Л. Смолицкий) [9] 把这个估計推广到第二与第三边界問題上去.

对于弗莱特霍姆方程

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad (\lambda > 0), \tag{1}$$

埃杜斯(Д. М. Эйдус) 的文章 [7] 討論了狄利克雷問題的解的存在性. 哈胡比亚(Г. П. Хахубия) [4] 証明了(按照 Н. М. 格云堅尔)广义提法的狄利克雷問題与牛孟問題的解的唯一性. 卡拉別格夫(В. -К. И. Карабегов) [1] 作了一个区域, 在这区域内(对于固定的 λ) 狄利克雷問題的解是唯一的, 但是, 当給定这区域从外面的任意逼近时, 对于不同的外插的边界函数可以得到趋向于不同极限的解的序列. Д. И. 舍尔曼考虑了弗雷特霍姆方程組的边界問題.

关于复数 λ 的情形, 在馬刘日聶茨(Г. Д. Малюжинец) [1,2] 的工作中有方程(1)解的基本性质的研究, 同时还有对于这方程格林函数的定义与格林函数唯一性的証明.

利用 Н. М. 格云堅尔的古典結果, 斯莫里茨基(Х. Л. Смолицкий) [8] 得到了三維空間中在边界曲面 S 上非常精細的光滑性的条件, 使得对于边界条件 $u|_S = 0$ 方程(1)正規解的微商(即关于拉普拉斯运算子狄利克雷問題的特征函数的微商)在区域内到

处满足不等式

$$|D^k u| \leqslant A_k \lambda^{p_k},$$

其中 A_k 依賴于 S. 在一系列的边界問題的研究中,这个不等式起着重要的作用. 对 n 維情形类似估計的推导包含在埃杜斯(Д. М. Эйдус) [3, 10] 的工作中.

在无限区域内研究方程(1)时,必須提出为了保証非齐次方程解的存在性与唯一性在无穷远处的条件. 如果在所有足够远的点上解都是确定的,那末这个条件就是所謂索茂菲尔特(Sommerfeld)輻射条件

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \ \frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda u = o\left(\frac{1}{r}\right), \tag{2}$$

(r 为到原点的距离). 对于其他类型的无限区域,吉洪諾夫(А. Н. Тихонов) [27] 与薩馬尔斯基 (А. А. Самарский) [3] 建立了"极限振幅原理",按照这个原理方程 $\Delta u + \lambda u = f(x, y, z)$ 的解应該是乘积 $Ue^{-i\omega t}$ 当 $t \to \infty$ 时的极限,其中 $U(x, y, z, t)$ 是問題

$$\Delta U - \frac{\lambda}{\omega^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^{i\omega t} f, \quad U\Big|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

的解. 斯維什尼柯夫 (А. Г. Свешников) [1, 2] 应用这个原理,对于具体形式的无限区域,推导出在无穷远处的条件;同时他在 [2] 中,对于以拉普拉斯运算子的常系数多項式所組成的运算子,得到了在无穷远处的条件. 这些結果是 И. Н. 維庫阿 (1943 年) 的結果的一些推广. 馬刘日聶茨 (Г. Д. Малюжинец) [3] 考虑了在无穷远处的条件不取离散波形式(如同索茂菲尔特的情况)而取聚合波形式的情况. 对于运算子 $\Delta u - c(x)u$, 拉迪任斯卡雅 (О. А. Ладыженская) [30] 提出了极限振幅原理, 其中 $c(x)$ 为有限函数.

根据希尔伯脫 (Hilbert) 空間中方程可解性的一个一般性定理,克列因 (С. Г. Крейн) [24] 得到了对于方程 (1) 已知的狄利克雷外問題的存在性定理的証明.

庫泼拉特捷 (В. Д. Купрадзе) [26, 28, 31] 系統地研究了:

方程(1)的狄利克雷边界問題与牛孟边界問題；各向同性弹性体的振动方程組

$$\left.\begin{aligned}&\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}+k^2\mathbf{u}=0,\\&\mathbf{u}=u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k}=\mathbf{u}(x,y,z)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

与各向异性弹性板的振动方程組的第一第二基本边界問題，也研究了馬克斯威尔 (Maxwell) 方程組的边界問題. 当边界条件給在李雅普諾夫型的閉曲面上时，在这里主要的注意力是集中在外問題上的. 利用类似于奥斯特洛格拉兹基公式的所作的能量型的积分变换，可以得到保証所提問題解的唯一性在无穷远处的条件. 在条件 (2) 时，問題 (1) 解的唯一性的証明是 В. Д. 庫泼拉特捷在 1934 年給出的. 在以后的工作中，他得到了輻射条件以及上述其他問題相应的唯一性定理(对于馬克斯威尔方程，这些結果是属于阿瓦查什維里 (Д. З. Авазашвили). 例如，对于方程組 (3) 在无穷远处的条件为

$$\lim\mathbf{u}_n=\lim\mathbf{u}_c=0,\tag{4}$$

$$\lim r\left(\frac{\partial\mathbf{u}_n}{\partial r}-ik_1\mathbf{u}_n\right)=\lim r\left(\frac{\partial\mathbf{u}_c}{\partial r}-ik_2\mathbf{u}_c\right)=0,\tag{5}$$

其中 $\mathbf{u}_n$ 与 $\mathbf{u}_c$ 分别为向量 $\mathbf{u}$ 的势分量与管分量，而 k_1 与 k_2 为确定常数. 后来維庫阿 (И. Н. Векуа) [43] 証明了，从 (5) 可以推出 (4) 来.

把上述的边界問題化成为具有明显表示出来的核的弗雷特霍姆型积分方程，В. Д. 庫泼拉特捷利用已經証明了的唯一性定理，来导出問題解的存在性的証明. 例如，对于方程組 (3)，作者建立了与研究了所謂单层位势，双层位势以及所謂天綫型的位势. 这些位势的核是些三阶的矩陣，这些矩陣依賴于二个点 P 与 Q，并且具有 $[\rho(P,Q)]^{-1}$ 或 $[\rho(P,Q)]^{-2}$ 的奇异性，矩陣的每一行都是方程組 (3) 的解. 对于这些位势，証明了与普通 (調和) 位势相类似的一系列性質，特別是关于經过区域边界时的"跳跃"公式，这些是从边界問題化到积分方程时所必需的公式. 用类似的方法，研究了电磁場繞射的一些問題与各向异性弹性板的一些边界問題

(关于这方面的討論有庫泼拉特捷 (В. Д. Купрадзе) [33] 与巴謝列伊什維里 (М. О. Башелейщвили) [1] 的工作). 阿尔查內赫 (И. С. Аржаных) [8] 研究了与弹性的数学理論有关的各种类型的向量位势.

5. 波阿松方程与混合問題 阿尔查內赫 (И. С. Аржаных) [41, 50, 61, 72] 提出了根据向量的旋度和散度来求向量場問題解的一些方法. 这些方法的基础是弗雷特霍姆型积分方程理論, 拉普拉斯变换与利用格林函数的解的表示法; 这些方法可以应用于流体力学, 弹性理論以及电动力学的問題. 在米納襄 (Р. С. Минасян) [3] 的工作中, 討論特殊形式区域中波阿松方程的解.

在文章 [27, 32] 中 (同样可参看书 [39]) 希洛夫 (Г. Е. Шилов) 研究了連續的平面和空間向量場; 他定义了作为源密度与通量的广义散度与旋度以后, 研究了这些运算子的性質和与它們有关的問題, 特别是研究了根据場的旋度与散度来求場的問題.

在广义函数类(按照索勃列夫的意义)中求波阿松方程的解的問題包含在霍特查耶夫 (Л. Ш. Ходжаев) 的文章 [2] 里.

根据函数总能取得所有中間值的定理, 李謝科夫 (Н. М. Лисенков) [1] 研究了次調和函数的値的分布. 在梅什基斯 (А. Д. Мышкис) 的工作 [34] 中, 用初等的方法証明了以下的結論: 設在区域 Ω 中函数序列在 $L_1(\Omega)$ 意义下是收斂的, 又設它們的拉普拉斯运算子的集合在 $L_\alpha(\Omega)$ $\left(\alpha > \frac{n}{2}, n \text{ 为 } \Omega \text{ 的維数}\right)$ 中是有界的, 那末这序列在 Ω 的任一列紧子集合上是一致收斂的; 常数 $\frac{n}{2}$ 是精确的.

6. 其他問題 一系列的工作討論了所謂位势理論的反問題, 也就是有关于求未知区域的問題. 在十九世紀就研究的古典反問題就是: 已知在充分远的点上的重力位势, 求单位密度的有界物体. 1938 年諾維科夫 (П. С. Новиков) 在一定条件下証明了星形区域解的唯一性. 根据这些研究, 斯雷堅斯基(Л. Н. Сретенский) [18] 証明了解的唯一性, 在这里要求: 所求的物体包含自己的重

心，某一固定方向的任意直綫（或經过固定点的任意直綫）与物体的表面相交不超过二点．利用把单位圓映象到所求区域的保角映象的函数所滿足积分微分方程，伊凡諾夫（В. К. Иванов）[9, 11, 12] 討論了平面的反問題．拉波波尔脫（И. М. Рапопорт）[14] 解决了特殊形式位势的平面反問題．考察了当曲面变化时調和函数平方的曲面积分的改变，拉夫連捷耶夫（М. М. Лаврентьев）[7] 証明了反問題新提法的有效近似解的唯一性、稳定性和可解性；这个新提法是只在曲面一部分上已知位势与它的法綫微商，而所要求的物体又包在曲面內部．

斯里符尼亚克（И. М. Сливняк）[1] 作了一个在无处不稠密的平面連續統上質量为非零分布的例子，其中相应的对数位势在余补集合的每个連通集合上等于常数．

格霍夫（Ф. Д. Гахов）[13]，卡尔波夫（М. Ф. Карпов），納塞波夫（Р. М. Насыпов），努仁（М. Т. Нужин）[1—5]，屠馬舍夫（Г. Г. Тумашев）[2] 以及菲里波夫（Б. В. Филиппов）等人所研究的反問題具有另外的特征．这些問題中最簡单的就是：求在未知区域上的調和函数，如果已知在边界上这函数和它的法綫微商都是弧长的已知函数．这些从空气动力学与弹性理論中产生出来的問題可以利用把未知区域到最簡单的区域的保角映象与解析函数論中的其他方法来进行研究．这方面的研究（同时对于双曲型方程的类似問題）在屠馬舍夫（Г. Г. Тумашев）[5] 和努仁（М. Т. Нужин）[8] 的工作中作了系統的叙述．在三維空間中的类似問題还沒有研究过．

对于双調和方程和多調和方程的边界問題，这些方程解的性質以及混和問題包含在以下等人的工作中：阿格米尔席揚（Л. С. Агамирзян）[1]，阿馬諾夫（Т. И. Аманов）[2, 5]，博洛金（А. С. Болотин）[1, 3]，与李夫辛（Г. А. Лившин）[1]，格宁（М. П. Ганин）[1, 6]，格凌别尔克（Г. А. Гринберг）[24]，列别捷夫（Н. Н. Лебедев）[13] 与烏弗良特（Я. С. Уфлянд）[1]，捷拉吉亚（П. К. Зерагия）[3]，伊茨考維契（И. А. Ицкович）[1]，卡

兰其亚(А. И. Каландия) [1, 2, 4], 卡西莫夫(Д. М. Касимов) [1], 梅里尼克 (И. М. Мельник) [3], 莫斯克維契夫(А. Д. Москвичев) [3], 納兹穆脱其諾娃(А. С. Назмутдинова) [1], 罗格仁 (В. С. Рогожин) [1], 哈里洛夫 (З. И. Халилов) [18] 等等.

§2. 二阶綫性椭圓型方程

各种形式的极值原理是二阶綫性椭圓型方程的基本性質之一; 对于拉普拉斯方程的最簡单的情形, 它的結論就是: 非常数的調和函数不能在它的定义区域的內部达到极大值. 应用到解和它的微商的各种組合上去(輔助函数法), С. Н. 別尔什捷英大大地发展这个原理, 并且在二阶綫性与非綫性椭圓型理論方面得到很深刻的結果(参看 §§ 7 与 9). 甚至于到今天这原理具有极其广泛的应用, 但是由于对方程組与对高阶方程到現在沒有得到任何相似的原理, 这原理的适用范围受到很大的限制. 在这一节中, 我們将討論一些以各种不同方式建筑在极值原理基础上的工作.

1. 解的性質 在兰迪斯 (Е. М. Ландис) [15] 的工作中, 把弗雷格曼-林特雷夫 (Phragmén-Lindelöf) 定理在无穷区域 Ω 內推广到对于方程

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = 0 \qquad (6)$$

$$(x = (x_1, \cdots, x_n))$$

的解的情形. 例如有这样的結果: 設 Ω 为一以 ω 为量的立体角(在这工作中考虑了比这更为一般得多的区域), 并且

$$\sup c < 0, \left|\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant (\Sigma x_i^2)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right| \leqslant (\Sigma x_i^2)^{-\frac{1}{2}}, \; u|_S \leqslant 1$$

(S 为 Ω 的边界). 于是或者在整个 Ω 上 $u \leqslant 1$, 或者沿某一点的序列 u 的值上升得比 $(\Sigma x_i^2)^{\frac{\alpha}{\omega}}$ 快, 其中 α 只依賴于 a, b, c (方程 (6)

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com