高等代数

题解

王萼芳 编

北京大学出版社

《高等代数》题解

（附：内容提要及补充题）

王萼芳 编

北京大学出版社

《高等代数》题解

（附：内容提要及补充题）

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

1 2 0 2 工厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米　32开本　12.125印张　25.5千字

1983 年 9 月第一版　　1983 年 9 月第一次印刷

印数：1—160,000册

统一书号：13209・64　　定价：1.25元

前　言

自从大学基础数学自学丛书《高等代数》（上海科技出版社）出版以来，许多读者来信询问书中一些习题的解法，并建议出版一本习题解答。

考虑到广大读者在自学的情况下，既缺乏老师的指导，又没有同学可磋商，要独立地完成习题的确有一定的困难。为了便于读者能更快更好地学完高等代数，我们决定满足读者的要求，编写了这本习题解。

本题解中的习题是按照《高等代数》中的习题顺序编排的(每一节的习题统一编号)。但是为了便于采用其它高等代数课本的读者也能使用此书，因此在每章的前面增加了内容提要，从而使此书成为一本独立的参考读物。此外，鉴于约当形在各方面的应用，又增加了“约当标准形简单介绍”一节。另外，为了加强读者在高等代数方面的训练，还在每章最后增加了一定数量的补充题，其中少量的题难度较大，读者可根据自己的情况进行选作。

对于计算题本书只给出答案，或作一、两个题示范，如答案不唯一，只给出一个答案以供参考；对于证明题，本书大部分作了较简练的证明，少部分给出提示。但是，解题的方法是多种多样的，书中的解法或提示只是提供读者参考。作者由衷地期望读者深入钻研教材，掌握基本理论，通过独立思考作出习题的正确解答。

王萼芳

1982年9月于北京大学

目　　录

第一章　多　项　式

第一节　一元多项式及其运算

基 本 内 容

1.　*多项式的定义*

设 x 是一个变量(或称文字)，n 是一非负整数，表示式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为 x 的一个**多项式**．

记 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=f(x)$．$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$称为$f(x)$的**系数**；$a_kx^k$称为$f(x)$的 **$k$次项**，$a_k$称为**$k$次项系数**．如果$a_n\neq0$，$a_nx^n$就称为$f(x)$的**首项**，$a_n$称为**首项系数**；$n$称为$f(x)$的**次数**，记作"次$f(x)$"．

如果两个多项式$f(x)$与$g(x)$的同次项的系数都相等，就称$f(x)$与$g(x)$**相等**，记作$f(x)=g(x)$．

系数全等于零的多项式称为**零多项式**，记作0．零多项式是唯一的无法确定次数的多项式．

如果多项式的系数是整数、有理数、实数或复数，就分别称此多项式为**整系数多项式**、**有理系数多项式**、**实系数多项式**或**复系数多项式**．如果不加声明，就理解为所讨论的是复系数多项式．

2.　*多项式的运算*

1）加、减法

设　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$．

则当 $m \leqslant n$ 时，

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

$$f(x)-g(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)$$

（如果 $m<n$，那么式中 $b_{m+1}=\cdots=b_n=0$）；

当 $m>n$ 时，有相应的公式.

2）乘法

$$f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

其中

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}a_{k-i}b_i \quad (k=0,1,\cdots,n+m).$$

多项式的运算可以用竖式计算，比较简单明了. 为了方便起见，还可以应用分离系数法进行计算，就是把 x 的方幂略去不写，只把系数按次序写出来进行运算．但是在计算时必须注意，要把等于 0 的系数补进去.

3. 多项式的运算满足下面的一些规律

1）加法交换律

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x).$$

2）加法结合律

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x)).$$

3）乘法交换律

$$f(x)g(x)=g(x)f(x).$$

4）乘法结合律

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x)).$$

5）加乘分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

6) 乘法消去律

如果$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，并且$f(x)\neq 0$，那么必有

$$g(x)=h(x).$$

7) 次数公式

$$次(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(次f(x),次g(x)),$$

$$次(f(x)g(x))=次f(x)+次g(x).$$

习 题 及 解 答

1． 计算$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$及$f(x)g(x)$：

(1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$,

$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

解
$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= x^4+(2+2)x^3+(-1-1)x^2 \\ &\quad +(-4-5)x+(-2+4) \\ &= x^4+4x^3-2x^2-9x+2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^4+(2-2)x^3 \\ &\quad +[(-1)-(-1)]x^2+[(-4) \\ &\quad -(-5)]x+[(-2)-4] \\ &= x^4+x-6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= 2x^7+(4-1)x^6+(-2-2-5)x^5 \\ &\quad +(-8+1-10+4)x^4+(-4+4 \\ &\quad +5+8)x^3+(2+20-4)x^2 \\ &\quad +(10-16)x-8 \\ &= 2x^7+3x^6-9x^5-13x^4+13x^3 \\ &\quad +18x^2-6x-8. \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+2x+1$,

$g(x)=x^2-x+1$.

解 应用分离系数法进行计算:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
+) & & & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & -1 & -3 & 1 & 2
\end{array}
$$

所以 $f(x)+g(x)=x^4-x^3-3x^2+x+2.$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
-) & & & 1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & 3 & 0
\end{array}
$$

所以 $f(x)-g(x)=x^4-x^3-5x^2+3x.$

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & & \\
\times) & & & 1 & -1 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & & \\
 & & -1 & 1 & 4 & -2 & -1 & \\
 & & & 1 & -1 & -4 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & 5 & -5 & 1 & 1
\end{array}
$$

所以 $f(x)g(x)=x^6-2x^5-2x^4+5x^3-5x^2+x+1.$

(3) $f(x)=x^4-2x^3-6x^2+5x+9,$

$g(x)=-x^4+2x^3-x^2-2x+2.$

答: $f(x)+g(x)=-7x^2+3x+11,$

$f(x)-g(x)=2x^4-4x^3-5x^2+7x+7,$

$$f(x)g(x)=-x^8+4x^7+x^6-17x^5+13x^4+21x^3-31x^2-8x+18.$$

(4) $f(x)=2x^4-x^3+2x^2-x+1,$

$g(x)=x^2-3x+1.$

答：$f(x)+g(x)=2x^4-x^3+3x^2-4x+2$，

$f(x)-g(x)=2x^4-x^3+x^2+2x$.

$f(x)g(x)=2x^6-7x^5+7x^4-8x^3+6x^2$
$-4x+1$.

(5) $f(x)=x^3+(1+i)x^2-(1-i)x-1$，

$g(x)=x^3-2ix+1-2i$.

答：$f(x)+g(x)=2x^3+(1+i)x^2-(1+i)x-2i$，

$f(x)-g(x)=(1+i)x^2-(1-3i)x-(2-2i)$，

$f(x)g(x)=x^6+(1+i)x^5-(1+i)x^4$
$+(2-4i)x^3+(5+i)x^2$
$+(1+5i)x-(1-2i)$.

2. 计算

(1) $(x^3+x^2-x-1)(x^3-2x-1)-8x(x^2-5)$

答：原式$=(x^6+x^5-3x^4-4x^3+x^2+3x+1)$
$-(8x^3-40x)$
$=x^6+x^5-3x^4-12x^3+x^2+43x+1$.

(2) $(x^3+ax-b)(x^2-1)+(x^3-ax+b)(x^2-1)$.

答：原式$=2x^3(x^2-1)=2x^5-2x^3$.

3. 求k,l,m，使

$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1$.

解 因为

$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)$
$=2x^4+(l-2k)x^3+(-kl+1)x^2+(k+l)x-1$，

所以

$(2x^2+lx-1)(x^2-kx+1)=2x^4+5x^3+mx^2-x-1$

的充分必要条件是

$$\begin{cases} l-2k=5, \\ -kl+1=m, \\ k+l=-1. \end{cases}$$

即 $$k=-2,\quad l=1,\quad m=3.$$

4. 设$f(x)$,$g(x)$是两个非零多项式，问$f(x)$,$g(x)$的系数满足什么条件时，次数公式

$$次(f(x)+g(x))\leqslant \max(次f(x),次g(x))$$

中等号成立？满足什么条件时，小于号成立？

答：当$f(x)$,$g(x)$的次数相等而且它们的首项系数之和等于零时，次数公式中小于号成立；否则，等号成立.

第二节　整除性理论

基本内容

1. 带余除法

定理 1（带余除法） 对于任意两个多项式$f(x)$,$g(x)$($g(x)\neq 0$)，总可以找到唯一的一对多项式$q(x)$及$r(x)$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中$r(x)=0$或次$r(x)<$次$g(x)$.

$q(x)$称为$g(x)$除$f(x)$所得的**商式**（简称**商**），$r(x)$称为**余式**（简称**余**）.

定理 2（余数定理） 多项式$f(x)$被$x-c$除，所得的余数等于$f(c)$.

2. 整除的概念

定义 $f(x)$与$g(x)$是两个多项式，如果有一个多项

式$q(x)$使得

$$f(x)=q(x)g(x),$$

就称$g(x)$**整除**(或**除尽**)$f(x)$. $f(x)$称为$g(x)$的一个**倍式**；$g(x)$称为$f(x)$的一个**因式**.

用"$g(x)|f(x)$"表示$g(x)$整除$f(x)$；用$g(x)\nmid f(x)$表示$g(x)$不能整除$f(x)$. 当$g(x)|f(x)$，且$g(x)\neq 0$时，可以用$\frac{f(x)}{g(x)}$表示$g(x)$除$f(x)$所得的商.

当$g(x)\neq 0$时，$g(x)|f(x)$的充分必要条件是$g(x)$除$f(x)$所得的余式等于零. 特别地，$x-c|f(x)$的充分必要条件是$f(c)=0$.

3. 整除关系的一些性质

1）零多项式是任何多项式的倍式，而零多项式的倍式只有零多项式.

2）零次多项式是任何多项式的因式，而零次多项式的因式只有零次多项式.

3）$f(x)|g(x)$，并且$g(x)|f(x)$的充分必要条件是

$$f(x)=cg(x)\quad (c\text{是一个非零常数}).$$

4）如果

$$f_1(x)|f_2(x), f_2(x)|f_3(x), \cdots, f_{s-1}(x)|f_s(x),$$

那么

$$f_1(x)|f_s(x).$$

5）如果$g(x)|f_1(x), g(x)|f_2(x), \cdots, g(x)|f_s(x)$，那么$g(x)$可以除尽$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$的任一个组合. 即：对任意多项式$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x)$都有

$$g(x)|u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x).$$

习 题 及 解 答

1． 计算$f(x)$被$g(x)$除所得的商及余：

(1) $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$,

$g(x)=x^2-3x+1$;

(2) $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$;

(3) $f(x)=x^5+x^4+4x^3+2x^2+10x-3$,

$g(x)=x^3+2x^2+3x-1$;

(4) $f(x)=x^3+(1-i)x^2+(5+3i)x-i$,

$g(x)=x^2+ix-1$;

(5) $f(x)=x^4-x^3-8x^2+11x-3$,

$g(x)=x^2-3x+1$.

答：(1) $q(x)=2x^2+3x+11$, $r(x)=25x-5$;

(2) $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$,

$r(x)=-2\frac{8}{9}x-\frac{2}{9}$;

(3) $q(x)=x^2-x+3$, $r(x)=0$;

(4) $q(x)=x+1-2i$,

$r(x)=(4+2i)x+(1-3i)$;

(5) $q(x)=x^2+2x-3$, $r(x)=0$.

2． 设 $f(x)=3x^4-10x^2-5x-4$, $g(x)=x-2$.

(1) 求$g(x)$除$f(x)$所得的商及余；

(2) 求$f(2)$。

答：(1) 商$=3x^3+6x^2+2x-1$, 余$=-6$;

(2) $f(2)=-6$.

3． 设 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, g(x)=x-c$.

求$f(x)$被$g(x)$除所得的余式.

答：$a_3c^3+a_2c^2+a_1c+a_0$.

4．检验$g(x)$是否是$f(x)$的因式：

(1) $f(x)=x^4-4x^3-1$，$g(x)=x^2-3x-1$；

(2) $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2-3x+1$，

$g(x)=x^3+2x+1$.

答：(1) 不是；(2)不是.

5．求 $g(x)=x^3-x+1$ 除 $f(x)=x^5+3x^4-3x^3+kx^2+5x+l$ 所得的商及余；并且确定k,l的值，使$g(x)$整除$f(x)$.

答：商$=x^2+3x-2$，余$=(k+2)x^2+(l+2)$；

当$k=-2$，$l=-2$时，$g(x)|f(x)$.

6．求l,m，使$f(x)=x^3+lx^2+5x+2$能被$g(x)=x^2+mx+1$整除.

解 因为$g(x)$除$f(x)$所得的余式为

$$(4-lm+m^2)x+(2-l+m),$$

所以当

$$\begin{cases}4-lm+m^2=0,\\ 2-l+m=0,\end{cases}$$

即

$$m=2,\quad l=4$$

时，$f(x)$能被$g(x)$整除.

7．已知x^2+x-2能整除x^4+x^3+lx+m．求l,m.

答：$l=2$，$m=-4$（求法同上题）.

8．证明：如果

$$g(x)|[f_1(x)+f_2(x)],\quad g(x)|[f_1(x)-f_2(x)].$$

那么 $$g(x)|f_1(x),\quad g(x)|f_2(x).$$