高等学校試用教科书

流体力学

王致清、李壮云、苏尔皇編

只限学校内部使用

中国工业出版社

前　言

流体力学是水力机械专业的技术基础課，为所有学习水力机械的同志所必修，但过去我国一直沒有专为水力机械服务的流体力学教材。随着我国国民經济的飞跃发展，水力机械制造业也有极大的发展，特别是从党中央提出調整、巩固、充实、提高的八字方針之后，对培养建設人材的质量提出了更高的要求，从而教材也就成了必須解决的問題。为了响应党的号召，适应目前的急需，我們教研室全体同志在党組織及学校行政的直接指导与帮助下，通过集体努力編写出了这本供水力机械专业用的流体力学教材。

过去水力学与流体力学是分为两門課程讲授的，根据我們几年来在教学中的初步体会，觉得这样分开有不少缺陷，故在1960年的教学改革中，經全体教师及高年級同学討論后决定将它們合而为一，并訂出了新的教学大綱，这本书就是按修訂后的大綱編出的。因屬初步尝試，內容是否恰当，尚待在以后的教学实踐中驗証。

本书第2、3、4、8、9、10、11章主要由王致清編；其中第2章的部分章节与第8章的第8节由程兆雪編；第1、5、6、7章由李壮云編；第12、13章由苏尔皇編；第14、15章由周鉄农編；并由苏尔皇、刘永琳等作主要校核；教研室的其他成員亦全部参加了本书的抄写、描图与修改整理工作。

在編写过程中，我們尽量参考了有关这方面的书籍以及参照了兄弟院校的有关教材讲义，但由于任务紧迫，編写工作十分仓促，特别是由于我們思想水平与知識水平有限，加之教学經驗不足，故书中定有不少缺点与錯誤之处，恳切的希望同志們提出批評与指正。

哈尔濱工业大学水力学及流体力学教研室

1961年6月6日

目　次

第一章 緒 論

§1-1 流体力学的任务及其发展簡史

流体力学是利用理論与实际相結合的方法，研究流体平衡和运动的規律及其与固体之間的相互作用，同时研究如何应用这些規律去解决工程实际問題。

流体，实际上是液体和气体的統称。一般来讲，流体力学研究的对象应包括液体和气体。但是由于在水力机械专业范圍內所遇到的工作介质多为液体（水或者油），因此我們在本課程中仅研究液体。不过关于液体的一些基本規律，对于速度低于声速的气体，也将是适用的。

近代，流体力学已經发展成为一門独立而又比較完善的科学，并已广泛的应用到国民經济的各个部門，为生产实际作出了极为有益的貢献。例如，在水利建設、水力工程、动力机械、航空工程、交通运輸及化学、冶金等各个工业部門中都将遇到各种类型的水力現象，因而都必須应用流体力学的一些基本規律使这些問題得到解决。对于水力机械的設計和制造而言，流体力学更是一門重要的技术理論基础。

流体力学和其他一切学科一样，也是人类在生产实踐过程中建立和发展起来的，而且它的发展也是和社会生产力的发展基本相适应的。只要社会生产力得到解放，就必然会促进生产大发展，而随着生产发展的需要又必然要推动科学技术（其中也包括流体力学）的大发展。同时还应該指出，在流体力学的发展过程中，有許許多多的科学家，例如阿基米德、巴斯噶、牛頓、伯努利、欧拉、雷諾及巴甫洛夫斯基等人，在总結劳动人民长期实踐經驗的基础上，对流体进行了长期辛勤的研究工作，因而取得了創造性的成果，为流体力学的发展作出了可貴的貢献。

远在太古时代，当人类开始与自然斗爭的时候，就开始了与洪水的斗爭。例如，在公元前 2286 年～2278年我国就有著名的大禹治水，公元前 250 年我国有著名的都江堰工程……。由于与自然斗爭的需要与实踐，就必然积累了不少关于流体方面的知識，不过这些知識还只是停留在一般經驗基础上，沒有能进行系統的总結与提高。直到公元前 250 年才出现过第一篇科学著作，即阿基米德在“論浮体”一文中所提出的阿基米德原理。但在以后的近十七个世紀中，由于中世紀封建农奴制度的統治，生产力受到束縛，流体力学也和其他一切学科一样，沒有得到什么新的发展。

以后，由于封建农奴制度的解体，流体力学才又开始新的发展。但这期間它还沒有发展成为一門独立的科学。

直到 18～19 世紀，由于欧洲資本主义的兴起，生产力进一步解放，特别是欧洲的产业革命大大的促进了科学技术的发展。这期間伯努利应用动能定律得出了表征流体运动速度、压力之間关系的伯努利方程式，欧拉得出了表征流体运动速度、压力及外力之間微分关系的运动微分方程式。他們第一次应用数学分析的方法来研究流体的运动，并且奠定了古典

流体力学的基础，以后就开始应用古典数学来研究流体运动。但是由于实际流动现象的复杂，在古典流体力学的研究中，有时便采用将实际现象簡化和提出一系列假設的办法，以及利用数学分析方法得出最終結果。可是这种簡化往往不能完全符合实际情况，因而所得結果与实际情况就有不同程度的出入。而另外一方面，生产发展中又提出了大量的流体力学問題要求解决，于是古典流体力学就不能完全滿足这种需要了。因此人們就不得不另找出路：即利用实驗的方法得出一些經驗数据与公式，来修正理論分析的誤差，使工程实际問題得到完滿的解决。

从此，关于流体的研究就形成两个分支：一个是偏重于数学分析的理論流体力学；一个是偏重于实驗研究的水力学，而且这两方面都获得了比較大的成績。但是，由于資产阶級唯心观点的影响，这种流体力学与水力学的分家多少形成为对流体的理論研究与实驗研究的分家。再加上在資本主义制度下，水力工程技术在实踐方面所受到的局限性，使流体力学的发展受到一定程度的影响。

很显然，要能促进流体力学的不断发展，不断滿足生产实际的需要。对流体必須采用理論与实际相結合的研究方法。目前有这样一种趋势，即使水力学与流体力学逐步接近而成为一門理論与实踐紧密結合的科学。

十月革命后，世界上第一个社会主义国家——苏联在水力事业方面以巨大的规模和极快的速度向前蓬勃发展着。由于生产发展的需要，再加上辯証唯物主义观点的指导，使得苏联在流体力学方面取得了巨大的成就，并跃居世界前列。

我們偉大的祖国在解放后的十年来，特别是大跃进的三年来，由于党的領导和全国人民的努力，在水力事业方面取得了极为輝煌的成就：在水利工程方面，有著名的治淮工程，根治黄河工程，……；在水电事业方面，我国修建了一系列大型、中型水电站，制造了許多巨型水輪机和各种类型的水泵，……；在农田水利方面，更是气象万千，遍地开花……。这些巨大的实踐成果及在規划中的更加偉大的远景要求，必将大大丰富和发展各有关科学部門，特别是作为其理論基础的流体力学。在党的英明領导之下，在三面紅旗的光輝照耀之下，我国人民必将在流体力学和其他一切科学技术的发展中作出杰出的貢献，使我国的科学技术事业登上珠穆朗瑪峰。

§1-2 关于流体作为連續介质的概念

液体是由分子所組成。由于分子力的作用，这些分子总是不断作混乱而又无規則的热运动。因此，如果要从研究每一个分子的运动出发，进而掌握整个流体平衡与运动的規律，那是很困难的。因为每一个分子的运动是很复杂的，而且即使在一个很小的体积内所包含的分子数目也是特别的多，要列出这些分子的运动方程式几乎是不可能的。既然这条道路行不通，那就只能另找出路了。

因此在流体力学的研究中，我們将流体加以理想化。我們不认为流体是由大量分子所組成，而认为是一种假想的、无間隙的充滿了它所占据的空間的連續介质，而且这种連續介质仍然具有流体的一切基本力学性质。

我們将流体认为是一种連續介质，这是否可能呢？我們知道，虽然流体是由大量分子所組成，但是在工程上所研究的流体总是具有一定的体积，即使在很小的体积中（例如1

厘米^3）也包含有大量的分子。在这块小体积中，如果研究一下其中各部分（例如1/10厘米^3），其分子数目及其性质也可认为是完全相同的。因此我們在研究中可以不考虑其分子組成。另外，更重要的在于从工程实用的观点来看，主要要求研究与掌握流体的宏观运动规律，而关于流体的分子运动是沒有什么实用意义的。例如說，在桌子上放一杯水，如果从分子运动的观点来看，水中分子始終在不断运动，因此这杯水不是靜止的；如果从宏观的角度来看，从把流体看成連續介质的角度来看，它幷沒有运动，因此这杯水是靜止的。很显然，从工程实用的观点来看，后者才是具有实用意义的。由此可見，我們在研究流体的宏观机械运动的时候，完全有可能把它当作連續介质来处理。

把流体当作連續介质以后，不但使我們撇开了流体內部复杂的分子运动，而仅考虑流体在外力作用之下宏观的机械运动，便于我們抓住客观事物的本质。同时使我們可以认为流体中的速度、压力等运动要素是連續分布的，可以应用連續函数来描述，因此在研究中可以利用根据連續函数得出的一系列数学成果来解決流体力学中的各类問題。

綜合上述，可以看出，将流体看成是一种連續介质不仅是必要的，而且是完全可能的，同时在研究中将具有极大的优越性。因此在今后的研究中，我們不再将流体看成是由分子組成的了，而认为是一种連續介质，这种連續介质本身是由无穷多个連續分布的微小流体团所組成，这种微小的流体团我們称之为流体质点，也有称之为流体微团的。

§1-3 流体的主要力学性质、理想流体与实际流体

我們在研究流体的平衡与运动的时候，必須知道作为連續介质的流体所具有的主要力学性质。下面我們就流体的几个主要力学性质分别加以介紹：

一、流体具有质量，具有重量

流体的这个性质和剛体是相同的，都是具有质量，具有重量。

关于流体质量的大小，通常用密度 ρ 来加以描述。

在均质流体中，所謂密度 ρ 是指单位体积流体所具有的质量，即：

$$\rho = \frac{\text{质量}M}{\text{体积}V}\left[\text{公斤-秒}^2/\text{米}^4\right] \tag{1-1}$$

在非均质的流体內，按上式計算的結果只能表示流体的平均密度。对于流体中某一点的密度，可表示为：

$$\rho = \frac{dM}{dV} \tag{1-2}$$

式中 dM 为流体中某一微小体积所具有的质量；

dV 为具有上述微小质量的流体体积。

关于流体重量的大小，通常以重度 γ 来加以描述。

在均质流体中，所謂重度 γ 是指单位体积流体所具有的重量，即

$$\gamma = \frac{\text{重量}G}{\text{体积}V}\left[\text{公斤}/\text{米}^3\right] \tag{1-3}$$

在非均质流体中某点处的重度可表示为

$$\gamma = \frac{dG}{dV} \tag{1-4}$$

密度 ρ 和重度 γ 之間的关系为：

$$\gamma = \rho g \tag{1-5}$$

式中　g 为重力加速度。

二、流体的压缩性和膨胀性

当作用在流体上的压力增加时，其所占体积就会减小，流体的这种特性称为压缩性。流体的压缩性通常用体积压缩系数 β_p 或弹性系数 E_0 来表示。

压缩系数 β_p 是表示当温度不变时，压力每升高 1 $^{公斤}/_{厘米^2}$ 时流体体积的相对变化，即：

$$\beta_p = \frac{-\frac{dV}{V}}{dP} \left[厘米^2/公斤\right] \tag{1-6}$$

式中　dP 为压力的增值；

V 为流体原来所占的体积；

dV 为流体体积的变化；

$\frac{dV}{V}$ 为流体体积的相对变化。

弹性系数 E_0 是压缩系数 β_p 的倒数，即：

$$E_0 = \frac{1}{\beta_p} = \frac{-dP}{\frac{dV}{V}} \tag{1-7}$$

在表（1-1）中列举了当温度为 0 ℃时，不同压力之下水的压缩系数值。

表1-1　0℃时水的压缩系数β_p值

压力(大气压)	5	10	20	40	80
β_p(厘米²/公斤)	0.529×10^{-4}	0.527×10^{-4}	0.521×10^{-4}	0.513×10^{-4}	0.505×10^{-4}

由表上可以看出，压力每升高一个大气压时，水的体积只改变万分之零点五左右。因此在一般情况下（某些压力变化很大的情况除外）可以认为水是不可压缩的。其他液体的情况也与此类似。

此外，当温度变化时，流体改变其体积的特性称为膨胀性。流体的膨胀性通常用温度膨胀系数 β_t 来表示。

膨胀系数 β_t 是表示当压力不变时，温度每升高 1 ℃时流体体积的相对变化，即：

$$\beta_t = \frac{\frac{dV}{V}}{dt} \tag{1-8}$$

式中　dt 为温度的增值；

$\frac{dV}{V}$ 为体积的相对变化。

在表（1-2）中列举了在不同温度与压力之下，水的膨胀系数 β_t 值。

表1-2　水的膨胀系数 β_t 值

压力(大气压)	温　度　(℃)				
	1～10	10～20	40～50	60～70	90～100
1	14×10^{-6}	150×10^{-6}	422×10^{-6}	556×10^{-6}	719×10^{-6}
100	43×10^{-6}	165×10^{-6}	422×10^{-6}	548×10^{-6}	704×10^{-6}

由表上可以看出，在溫度較低的情况下（0°～20℃），溫度每升高1℃，水的体积最大只改变万分之一点五；在溫度很高的情况下（90°～100℃），溫度每升高1℃，水的体积也只改变万分之七左右。因此在工程实用上，一般可以不考虑水的膨脹性。对于其他液体的情况也是相类似的。

綜合上述，可知在一般情况下，液体的压縮性与膨脹性很小，可以略去不計，因此其密度以及重度也是不变化的，可以看作常数，这种流体我們称之为不可压縮流体。反之，如果当流体的压縮性与膨脹性比較大，其密度与重度不能看成是常数，这样的流体称为可压縮流体。

三、流体的粘性

由于分子运动的影响，当流体的各部分之間具有相对运动时，就会产生摩擦切应力来阻止这种相对运动的特性，称之为流体的粘性，或称粘滞性。

关于流体的粘性一般用粘性系数 μ 来加以描述。它是比較复杂的，影响系数 μ 的因素很多，与流体的性质、溫度的高低以及相对速度的大小等很多因素有关。我們在本书第五章将詳細討論。

摩擦阻力是流体粘性的表現形式。而且只有当流体的各部分之間具有相对运动的时候，流体的粘性才会表現出来；如果当流体是静止的，或者各部分之間沒有相对运动速度的时候，流体的粘性就不会表現出来，也即这时流体內部不会有摩擦阻力存在。这就說明，流体的静摩擦力是不存在的，这一点流体与固体大不相同。对于静止的固体，必須作用以足够的力量克服其静摩擦力以后，它才会开始运动；可是流体却不然，由于它不存在有静摩擦力，我們只要在静止流体上稍稍加上一点外力，它就会开始流动，因此我們說流体具有极大的易流动性。

四、凝聚力与表面張力

流体中分子間相互作用的結果就产生了凝聚力。凝聚力是內力，且互相平衡。只有在流体的边界上，这种力才表現出来。流体的凝聚力很小，实用上可以忽略不計，认为流体不能抵抗拉伸。水抵抗拉伸的阻力仅为 3.6×10^{-4}公斤/厘米^{2}左右。

液体是具有自由表面的。位于自由表面的液体由于分子之間相互作用的結果，因而就产生了表面張力。在液体表面上好像形成了具有独特形状的薄膜，要使其破裂，必須加上某些外力。水在20℃时的表面張力为 7.4×10^{-3}公斤/米左右。

由于流体的凝聚力及表面張力都很小，对于水力机械专业范圍內所遇到的一些水力現象而言，是沒有什么实际意义的，因而可以忽略不計。

五、理想流体和实际流体

綜合上面的討論，我們知道，所有流体都具有质量、重量、粘性，以及压縮性、膨脹性与凝聚力、表面張力等。不过对于液体而言，在一般情况下，后者都是比較小的，因而在实际研究中可以忽略不計，而仅須考虑其质量、重量与粘性。

但是，由于流体的粘性是比較复杂的，影响因素很多。我們对流体进行解析研究的时候，如果要考虑流体的粘性将是极为困难的，甚至无法进行。因此我們引入了一个新的概念，即所謂理想流体的概念。

所謂理想流体是一种假想的不具有粘性的流体。但在自然界中所有实际存在的，是具

有粘性的流体称之为实际流体，或称为粘性流体。

引入理想流体的假設，是为了将我們所研究的对象——流体加以簡化，便于应用解析的研究方法得出最終完善的結果。这样做，对于一些粘性很小，或者相对运动速度很小的流动情况而言，研究結果与实际情况出入不大；而对于一些粘性比較大，或者相对运动速度比較大的流动情况而言，誤差就比較大了。这时就必須通过实驗研究的办法将理論分析結果加以修正，以求达到与实际情况相一致。

§1-4 作用在流体上的力

作用在流体上的力大致可以分为三类：

一、內力 所謂內力是指我們所研究的流体体积內，流体质点之間相互的作用力，在流体內部是互相平衡的。例如凝聚力、內摩擦力和表面張力等均屬于这一类。

二、表面力 所謂表面力是指作用在我們所研究的流体体积表面上的力，是由与这块流体相接触的其他物体（流体或固体）的作用而产生的。

表面力又可以分为两类：一类是与流体表面相垂直的法向力；一类是与流体表面相切的切向力，切向力即是由于流体粘性所引起的摩擦力，因此对于靜止流体以及理想流体的表面上，是沒有切向力存在的，仅仅只有法向力。

三、质量力（或称为体积力） 所謂质量力是指作用在流体內部每一个质点上的力，其大小与流体质量成正比。

质量力可以分为两种：一种是由与我們所研究的流体不相接触的其他物体对所研究的流体每一个质点上的作用力，例如重力。这一类力也有称之为引力的；另一种为由于流体作加速运动或曲綫运动所引起的作用于流体每一个质点上的力，这一类力也有称之为惯性力的。例如离心力就屬于这一类。

在今后的研究中，我們用单位质量流体所受质量力的大小来表征流体的质量力。并且用 X、Y、Z 来表示单位质量流体所受的质量力在三个座标方向的分力。假設有某一体积为 V、质量为 M 的流体所受的质量力为 F，則单位质量流体所受的质量力在三个座标方向的分力可分別表示为：

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{F_x}{\rho V} = \frac{F_x}{M} \\ Y &= \frac{F_y}{\rho V} = \frac{F_y}{M} \\ Z &= \frac{F_z}{\rho V} = \frac{F_z}{M} \end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

式中 F_x、F_y、F_z 为质量力 F 在三个座标方向的分力。

第二章　流体靜力学

流体靜力学的基本問題是研究流体在外力作用下力学靜止平衡时的規律，以及这些規律的实际应用。

应該注意的是在靜止的流体內流体是不显示粘滯性的。所以本章的一切結論不管对理想流体还是粘性流体都是适合的。而且本章討論的流体只限于不可压縮流体（$\rho=$常数）。

此外，流体作为連續介质。因此本章討論的所有未知函数皆可以认为是空間座标的連續函数。这样可以有利于应用連續函数数学工具。

§2-1　流体靜压力及其特性

我們在力平衡状态的流体中取出某一个体积如图 2-1 所示。我們設想用平面 AB 将它分割成Ⅰ、Ⅱ两部分，并取去其中一部分。例如取去上部分Ⅰ，那么为了保持Ⅱ的平衡我們就必須加上一个力来代替被切割去的部分Ⅰ对Ⅱ的作用。而且这个力在分割面上是完全按某一定規律分布的。我們現在从分割面 AB 上圍繞 A 点取出一小块面积 ΔS 来加以研究，設作用在这小块面积 ΔS 上的力为 ΔP，我們称 ΔP 为作用在 ΔS 面积上的总流体靜压力。

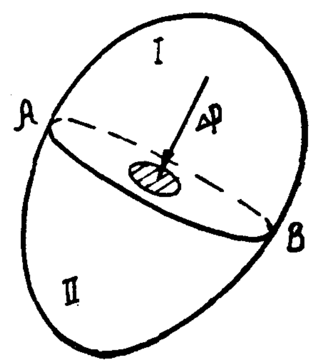

图　2-1

（一）流体靜压力的定量描述

我們划出的面积元素 ΔS，被取去的Ⅰ部分流体体积有一个力作用在这小面积 ΔS 上，这个力形成了 ΔS 面上的应力，以 p 表示之，而 ΔS 为力 ΔP 的作用面，这里“应力”是指作用于单位面积上的力。

我們称比值

$$\frac{\Delta P}{\Delta S}=p_{cp}$$

为作用在 ΔS 面积上的平均流体靜压力。

当把小面积 ΔS 无限的縮小到点 A 时这个比值的极限将表示在点 A 处的靜水压力，即

$$p=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta S}\text{——点 }A\text{ 靜水压力} \tag{2-1}$$

在均质的流体（指同一种流体）中靜水压力是点的座标的連續函数，$p=p(x, y, z)$，而且与流体的种类及它的物理性质有关。

（二）流体靜压力的特性

流体靜压力（压应力）的性质与固体应力有着本质的区别。大家知道，固体中应力可以是压应力或拉应力，也可能有垂直的和切向的分应力，并且随作用面在空間的方位（指位置和傾斜度）而变更的，而在平衡的流体中就特别簡单。

我們来叙述它的两个特性，并証明其正确性。

1．流体静压力的方向总是和所研究的面的内法綫方向重合

现在用反証法来証明这一特性，因为我們研究問題的前提条件为流体是静止的，因此我們假設在静止流体表面上作用一任意方向的力 P' 并将它分解为沿外法綫方向的 P_n 及沿切綫方向的 P_τ 两个分量（如图 2-2 所示）。

我們現在静止流体表面上切向分量 P_τ 是不可能存在的，因为静止流体中的静摩擦力是不存在的。流体完全不能抵抗由于剪切应力所引起的变形，如果有 P_τ 存在則流体要产生滑动，这就与流体是静止的前提条件相矛盾。

同时，在静止流体表面上沿外法綫方向的力 P_n 也是不可能存在的。因为流体完全不能抵抗由于拉力所引起的变形，如果有 P_n 存在則流体必然要运动。这也与流体是静止的前提条件相矛盾。

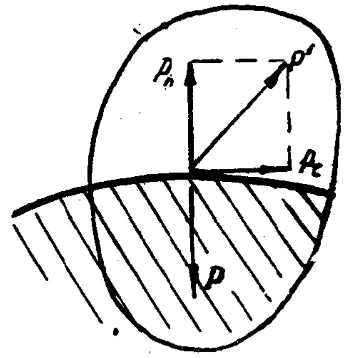

图 2-2

既然在静止流体表面上不可能有外法綫方向的及切綫方向的力作用，那么作用在静止流体表面上的力只可能沿内法綫方向，即如图 2-2 P 所示的方向。

2．静止流体内任何一点处的流体静压力在各个方向都是相等的。也就是説，如果通过 A 点（图2-3）任意画出两个面 1-1 和 2-2，在二个面上分别取微小面积 ΔS_1 和 ΔS_2，A 点在面积 ΔS_1 和 ΔS_2 上，那么作用在这两个微面积上的流体静压力（p_1 和 p_2）的数值是相等的，即

$$|p_1| = |p_2| 。$$

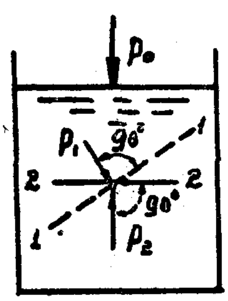

图 2-3

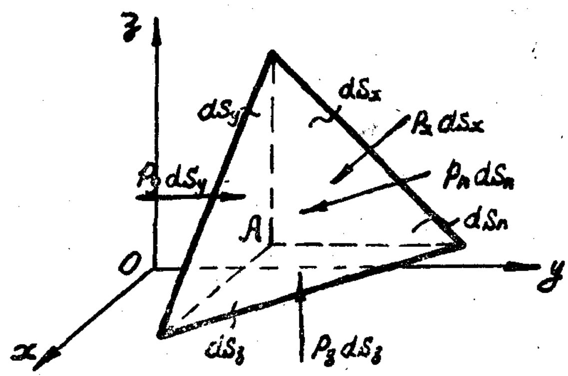

图 2-4

为了証明这一关系我們在图 2-3 所示的静止流体内圍繞 A 点取出一无限小的四面体，使他通过点 A 的三个棱分别平行于座标系 $oxyz$ 的三个軸，設他的边长分别是 dx，dy，dz（图2-4）。

对静止流体其内摩擦力是不存在的，作用在四面体上的力只有表面力和质量力两类：設作用在斜面上的表面力为 $p_n dS_n$；作用在与座标平面平行的其他三个表面上的表面力分别为 $p_x dS_x$；$p_y dS_y$；$p_z dS_z$。根据流体静压力的第一个特性，这些力都是沿各个作用面的内法綫的方向，作用在这四面体上的质量力設为 $F(X, Y, Z)$。

因为該四面体是平衡的，那么作用在这四面体上的所有外力在各个座标方向的投影之和必皆为零，即可以写出在各个座标方向的力学平衡方程式：

在 x 軸方向上有$\Sigma X_i=0$，X_i 为在 x 軸方向上的各作用力。即

$$p_x dS_x - p_n dS_n \cos(\widehat{n,x}) + X\rho dV = 0 \tag{2-2}$$

式中　ρ 为流体的密度；$dS_x=\frac{1}{2}dydz$；

$dS_n\cos(\widehat{n,x})=dS_x=\frac{1}{2}dydz$；

$dV=\frac{1}{6}dx\cdot dy\cdot dz$——为小四面体之体积。

将上面各式代入（2-2）之后得到

$$p_x\frac{1}{2}dydz-p_n\frac{1}{2}dydz+X\rho\cdot\frac{1}{6}dxdydz=0$$

化簡，消去$\frac{1}{2}dydz$可得出：

$$p_x-p_n+\frac{1}{3}X\rho d\cancel{x}=0$$

若使小四面体无限縮小到点 A，則 dx 趋近于零，于是得

$$p_x-p_n=0,\ \text{或}\ p_x=p_n,$$

表示在点 A 无論是 x 軸方向还是法綫 n 方向的流体静压力值是相等的。

同理可得出

$$p_y=p_n;\ p_z=p_n$$

由此可知

$$p_x=p_y=p_z=p_n \tag{2-3}$$

这就証明了，在力平衡的流体內任一点处的流体静压力值沿各个方向都是相同的。这就是流体静压力与其作用面的方向的无关性。

由这一特性可知，决定在某一点的压力有一个数值就够了。据前所論，很明显压力 p 就表示作用在单位面积上的力。

§2-2　流体平衡的微分方程式、等压面、质量力的势

本节来討論流体处于静止平衡时它所受的力应滿足的条件。

在充滿空間的静止流体中划出一个无限小的平行六面体（图2-5），使六面体頂点 A 与座标系 $oxyz$ 的原点相重合，而其各边之长为 dx，dy 和 dz 分別与各座标軸相重合。

使 A 点的静水压力为 P，按照上节中所讲的理由可以认为，在与 yz 座标面相重合的微小面上各点中其静水压力也等于 p。

記住静水压力是座标的連續函数：$p=p(x, y, z)$如我們将函数 p 按泰勒級数展开并取該級数之前两项，我們就能够写出与 yz 座标面平行的六面体的另一面上各点的压力表示式：

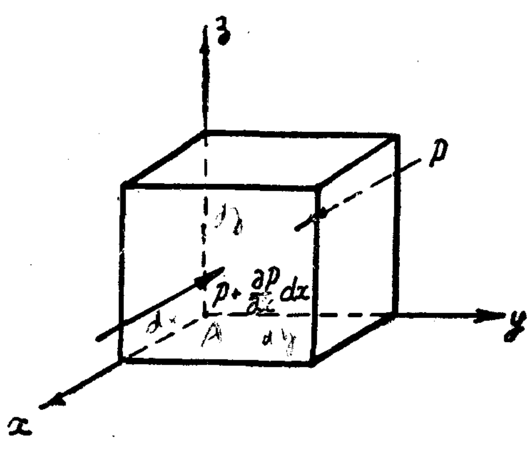

图　2-5

$$p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\cdots\cdots \tag{2-4}$$

要注意偏导数$\frac{\partial p}{\partial x}$本身表示在空間里压力沿 x 軸方向的单位长度上的变化。$\frac{\partial p}{\partial x}$之値

称做該点（点 A）在 x 軸上（或沿 x 軸）的“压力梯度”。必須注意到任何数量的梯度是具有一种方向的矢量，其方向平行于在导数分母中指出的軸向。

显然，压力梯度 $\frac{\partial p}{\partial x}$ 与梯度方向一致的长度 dx 的乘积 $\frac{\partial p}{\partial x}dx$ 等于这长度上的压力的全部变化（增量）。

这样，利用压力梯度的概念，就是不記住函数 p 的展开式，也可以写出上述的压力表示式（2-4）。

同时可以写出作用在平行六面体其余面上的压力表示式。

記住充滿在平行六面体的流体处在平衡状态，我們写出作用在这流体上的所有的力（表面力和质量力）在 X 軸上的投影之和为零的条件

$$p\cdot dydz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz+X\rho dxdydz=0$$

将这方程之各項除以这平行六面体的流体质量 $\rho dxdydz$，即将各項变为对单位质量而言，則我們得：

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

依同理可得 y 和 z 軸方向的

$$\left.\begin{aligned}Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\ Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}5)$$

上式称为流体平衡微分方程式。它表明，在流体的平衡状态下作用在流体上的质量力与对应的表面力所平衡，利用流体平衡方程式可以解決流体静力学中的基本問題。如当已知质量力求流体內压力的分布或求流体在平衡状态下的自由表面的形状等。

从流体平衡微分方程式可見：流体并非对任何作用于其上的质量力均可达平衡，而是仅对滿足一定条件的质量力才可达到平衡，为此我們将微分方程式中各式分別乘以 dx，dy，dz，然后相加起来。这样我們就得到：

$$\rho(Xdx+Ydy+Zdz)=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\qquad(2\text{-}6)$$

由于 $p=p(x,y,z)$，所以方程式（2-6）右边是压力 p 的全微分：

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\qquad(2\text{-}7)$$

則（2-6）式化为：

$$dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)\qquad(2\text{-}8)$$

假如流体是不可压縮的，即 $\rho=$ 常数。則（2-8）式的左边既然是压力的全微分，那么右边也一定是某个函数 $U(x,y,z)$ 的全微分，否則該式不可能恒等。即有

$$dp=\rho dU=\rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)\qquad(2\text{-}9)$$

与（2-8）式比較得

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y};\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}\qquad(2\text{-}10)$$

显然，这个函数 $U(x,y,z)$ 对各个座标方向的偏导数正好等于作用在单位平衡质量流体上的质量力在該座标方向上的投影。我們称这种函数为势函数。滿足这种条件的力

称做有势的力。由上述討論可知：只有在有势的质量力的作用之下不可压縮流体才能处于力学平衡状态。

在大自然中的力，如重力，慣性力等都是有势的力。已知这些力在各个座标方向的分量就可以用积分方法求出其势函数。所以在重力，慣性力等作用下的流体都能处于力学平衡状态。

現在来研究所謂等压面的概念，流体中静压力相等之各点所組成的面称为等压面。显然，在等压面上 $p=$ 常数，亦即 $dp=0$。

前面已得出静止液体平衡的条件是

$$dp=\rho dU$$

故在等压面上有

$$dU=0 \quad \text{即} \; U(x, y, z)=\text{常数}$$

由此可見，在等压面上力的势函数值必等于常数，而势函数值等于常数的面称为等势面，所以在静止流体中等压面必与等势面相重合。

等压面的重要特性是：作用在静止流体中任一点的质量力垂直于通过該点的等压面。这一特性可以証明如下：

設在等压面上任取一微分綫段 dl，dl 在各座标方向的投影分别为 dx，dy，dz，則质量力沿 dl 所作的功为：

$$Xdx+Ydy+Zdz$$

由等压面上的条件 $dU=0$，并注意到（2-9）式則有

$$Xdx+Ydy+Zdz=0 \tag{2-11}$$

此式表明，质量力沿 dl 綫段所做的功等于零。这只有当质量力垂直于 dl 綫段时才有可能，而 dl 是在等压面上的，故质量力是垂直于等压面的。

等压面的例子如大气与湖水自由表面（两种不同流体的分界面），在这自由表面的所有各点上压力等于大气压力。

由于此种原因同时也由于每个等压面都可能广义的了解为流体的自由表面，只要是在其上面有相应的气体压力，所以等压面有时称为水准面。

等压面这一特性，可以用来解决某些問題。如等压面在空間中的位置就确定了质量力的方向，相反地，质量力場也确定了等压面在空間中的位置。

比如，静止液体（例如湖水面）的自由表面是一水平面。因为这种液体只在重力作用下，显然，与重力場垂直的面将是一些水平面，这些水平面就是不同的等压面。

再来討論一下，两种不相混的流体，它們为了保持力学平衡，不同流体的分隔面一定要是一个等压面。

为了証明这一点，我們取直綫位于两种流体的分隔面上，設一种流体，例如直綫下面的流体的密度为 ρ_1，而另一种在上面的流体的密度为 ρ_2。在分隔面上取两个无限接近的点1和2。設在这两点上的压力差分别是 dp_1 和 dp_2、势函数值差为 dU_1 和 dU_2。但是在这分隔面上，对于这两种流体，其压力差和势函数值差都应該是相等的，否則不会平衡的。即有

$$dp_1=dp_2 \quad \text{和} \quad dU_1=dU_2=dU$$

注意到（2-9）式，得出

$$\rho_1 dU = \rho_2 dU \qquad (2\text{-}12)$$

因为 $\rho_1 \neq \rho_2 \neq 0$，故（2-12）式成立，只有当 $dU=0$ 时才有可能。这就表明，分隔面将是一等势面。因此，它也是一等压面。

两种不相混的流体处于力学平衡时，只有当密度大的流体在下面时平衡才是稳定的，否则平衡是不稳定的。此时稍加力平衡就会破坏。

§2-3 重力流体的平衡、流体静力学基本方程式、巴斯噶原理及其应用

我們現在来研究一种特殊的情形，即作用在液体上的有表面力和只有一种质量力——重力。在流体力学中，当作用于流体上的只有质量力中的重力时，該流体称为重力流体，从这定义很清楚地看出，流体力学中的名詞“重力流体”与所謂“重水”是沒有一点相同之处的（重水是以略大的比重区别于普通的水）。

假定在 x，y，z 座标系中（Z 軸鉛直向上）我們有静止重力流体的某一体积如图 2-6 所示。从上节中我們所研究过的例题中知道，静止重力流体的自由面須垂直于质量力（重力）的方向，故为水平面。設被研究的静止流体的水平自由面与 xy 座标面重合。我們知道，当流体平衡时等式（2-9）可以成立：

$$dp = \rho dU$$

上式可以写成展开式：

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \qquad (2\text{-}8)$$

显然对于重力流体来説：

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = -g。$$

式中 g 代表重力加速度。把单位质量力各个分量値代入方程式（2-8）中，得出：

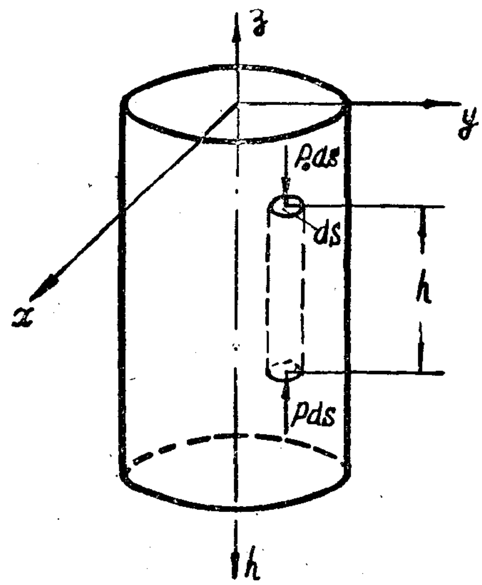

图 2-6

$$dp = -\rho g dz = -\gamma dz \qquad (2\text{-}13)$$

积分（2-13）式，得

$$p = -\gamma z + C \qquad (2\text{-}14)$$

如将方向向上的 z 軸，改换之为方向向下的 h 軸，今后的討論中会有更多的方便。即是由 h 代表該点流体自由表面以下的深度（称之淹深），可将（2-14）方程式中的 z 换之以 $-h$，得到如下形式：

$$p = \gamma h + C \qquad (2\text{-}15)$$

式中 C 为积分常数。当知道自由表面上压力 p_0 的値时，該常数就可确定。即当 $h=0$ 时 $p=p_0$ 是已知的。如代入方程式（2-15）中得出：

$$p_0 = C \qquad (2\text{-}16)$$

（2-16）式代入方程式（2-15）中，得出在静止重力流体內任何一点处的静水压力一般公式：

$$p = p_0 + \gamma h \qquad (2\text{-}17)$$