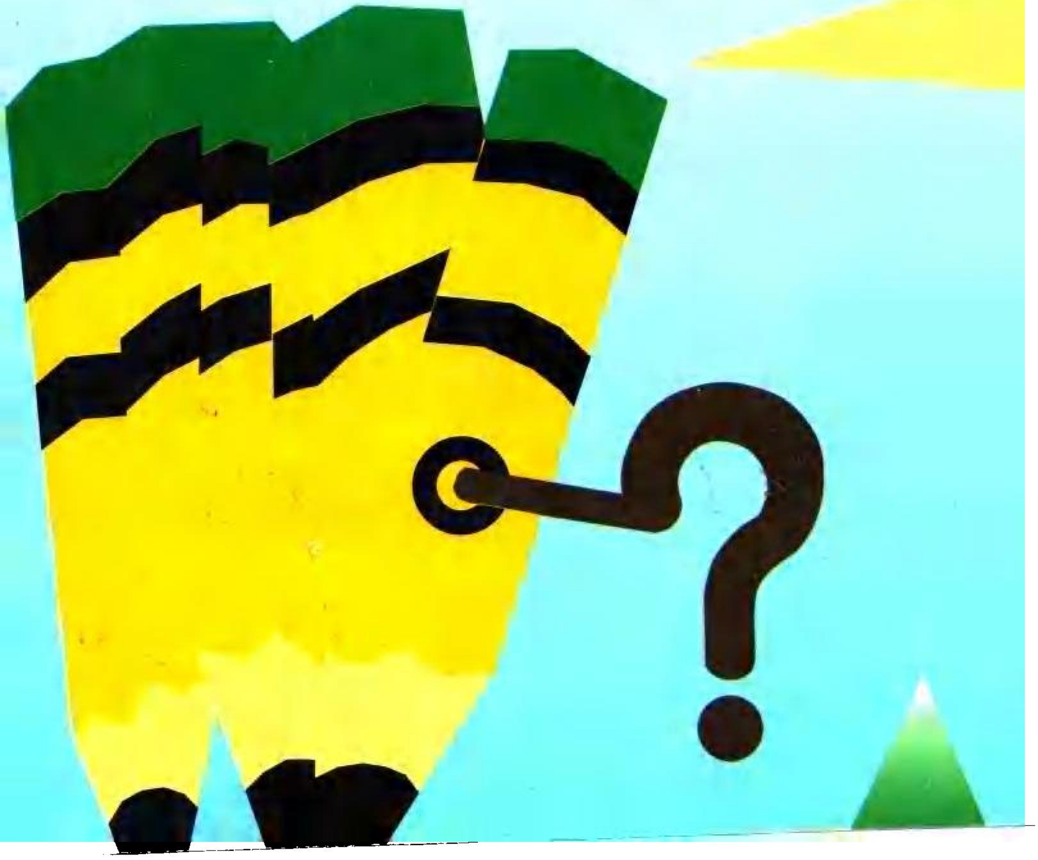
线性代数与解析几何

俞正光 李永乐 詹汉生 编

清华大学出版社



（京）新登字 158 号

内 容 提 要

本书是在清华大学同名讲义的基础上修改而成的。书中系统地介绍了线性代数与解析几何的基本理论和方法，把代数与几何有机地结合起来. 本书层次清晰，论证严谨，联系实际，例题丰富。内容包括行列式、矩阵、向量代数、空间解析几何、线性空间与欧几里得空间、特征值与特征向量、二次型等，并配有适量习题供读者练习。

本书可作为高等院校理、工、经管等专业的教材及教学参考书，也可供自学读者及有关科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何/俞正光等编．—北京：清华大学出版社，1998.5

ISBN 7-302-02854-0

Ⅰ．线…　Ⅱ．俞…　Ⅲ．① 线性代数 ② 解析几何

Ⅳ．① O151 ② O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 02280 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
　　　　因特网地址：www.tup.tsinghua.edu.cn

印刷者：中国科学院印刷厂

发行者：新华书店总店北京科技发行所

开　本：850×1168 1/32　**印张**：13 1/8　**字数**：340 千字

版　次：1998 年 5 月 第 1 版　1998 年 5 月 第 1 次印刷

书　号：ISBN 7-302-02854-0/O・192

印　数：0001～5000

定　价：13.50 元

前　言

随着科学技术的不断发展，对科学技术人员的数学修养的要求也越来越高。数学本是几何、代数、分析有机结合的整体，但对于不同的研究对象又有不同的研究方法，因此又分成几何、代数、分析等不同的学科，它们之间既有区别又有联系。线性代数是讨论有限维空间的线性理论的课程，有较强的抽象性和逻辑性。由于线性问题广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域，某些非线性问题在一定条件下也可以转化为线性问题来处理。尤其在计算机普遍推广应用的情况下，线性代数的概念和方法，广泛地应用在各个科技领域，成为从事自然科学和工程技术工作的不可缺少的工具。几何问题更是广泛存在于自然科学和技术科学乃至日常生活之中。电影电视中引人入胜的动画的制作，工程技术中正在日益推广的计算机辅助设计(CAD)，科学计算的可视化等，它们的基本数学工具都是解析几何和线性代数。因此掌握解析几何与线性代数的基本概念和基本方法对每个科技人员来说是必需的。

解析几何的研究对象是用代数方法解决几何问题，而线性代数讨论的有限维线性空间源于二维、三维空间中的向量代数，又进一步抽象推广出来的。代数的许多基本概念和方法都有很强的几何背景，这两门课程本来就有紧密的联系。现在我们把这两部分内容合成一门课程，目的在于通过它们之间的联系，使读者更好地掌握代数方法和几何方法去处理科学技术中遇到的各类问题。

本书共分七章。第1章在中学的二、三阶行列式的基础上引入

n 阶行列式的概念，并通过例子介绍行列式计算的基本方法和各种技巧。矩阵是线性代数中最基本的工具，在第 2 章介绍矩阵的代数运算、矩阵的初等变换和相抵标准形，以及矩阵分块的技巧，为以后进一步学习线性代数打好基础。第 3 章介绍几何空间中的向量代数，引入仿射坐标系和直角坐标系，改变过去只在直角坐标系下讨论几何问题为在一般仿射坐标系下讨论几何问题，本章最后还讨论了平面与直线问题。第 4 章引入 n 维向量的概念，讨论向量组的线性相关性，并引入矩阵的秩这个重要的参数。线性方程组是线性代数的一个极其重要的内容。有关线性方程组理论的研究及应用始终贯穿课程的始末，在这里，通过解空间结构的研究以及它们和矩阵秩之间的关系，给出了有关线性方程组解的结构之完整的理论。第 5 章讨论一般线性空间的定义和性质，线性变换的概念。通过矩阵来描述线性变换，从而建立了线性变换与矩阵间的联系。最后通过引入内积建立了欧几里得空间。第 6 章讨论科学技术中非常有用的特征值问题，并由此引入矩阵相似的概念，通过讨论矩阵可对角化的条件介绍利用特征值简化矩阵计算的方法，并通过几个实际例子介绍特征值问题的应用。最后在第 7 章中介绍二次齐次函数即二次型的化简及实二次型的正定性。由于三元二次齐次函数的几何背景是二次曲面，通过二次型的主轴化方法把一般二次曲面的方程化为直角坐标系下的标准方程，从而对二次曲面进行分类。

本书力求做到代数方法和几何方法的结合，通过用矩阵方法来研究和解决线性代数和几何中的一系列基本问题，使问题处理得更加简洁明了。另一方面对代数方法的几何背景有更深入的了解。对一些抽象的概念，通过平面和三维空间中具体例子加以说明，增强了抽象概念的实际背景和几何背景，从低阶到高阶逐步提高抽象思维与演算的能力。但是代数和几何的内容是很丰富的，这里只是介绍线性代数和解析几何的基本内容，对抽象思维和逻辑

推理能力的培养也是初步的，关于概念和方法的应用还需要其他知识，这里介绍的只是一些粗浅的例子。所学到的知识还有待后续课程来巩固和应用，各种能力也有待进一步培养与提高。有关线性空间和线性变换的理论，以及近世代数的基本概念和方法等更深入的知识，读者可以在本书的续篇《理工科代数基础》一书中找到。

本书是在清华大学同名讲义的基础上修改而成的。讲义初稿第 1 章由詹汉生编写，第 2，6，7 章由俞正光编写，第 3，4，5 章由李永乐编写，全书的修改和定稿由俞正光完成。清华大学应用数学系的汪国柄、何坚勇、王飞燕、周耀耀、王思群等老师在使用过程中对讲义提出许多宝贵意见，王飞燕、周耀耀老师做了部分题解，在此一并表示感谢。

由于水平有限，不妥之处实属难免，敬请读者批评指正。

编　者

1997 年 5 月于清华园

目　录

第1章 行列式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学中有广泛的应用，而且在其它学科中也经常会碰到它．在初等代数中，为求解二元和三元线性方程组，引入了二阶和三阶行列式．本章的目的是在二阶和三阶行列式的基础上，进一步建立 n 阶行列式的理论，并且讨论 n 阶行列式对求解 n 元线性方程组的应用．

1.1 引　言

在讨论 n 阶行列式之前，先对二阶和三阶行列式的定义以及如何利用它们求解二元和三元线性方程组，作一简单的回顾．

1.1.1 二阶行列式

对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

进行消元，可得

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x = d_1b_2 - b_1d_2,$$
$$(a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1d_2 - d_1a_2.$$

若 $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$，则方程组(1.1)有唯一解

$$
\left.\begin{aligned}
x &= \frac{d_1b_2 - b_1d_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \\
y &= \frac{a_1d_2 - d_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}
$$

为了便于记忆这些解的公式，我们引入**二阶行列式**

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}
$$

其中 a_{ij} 叫做行列式的**元素**，用两个下标表示该元素的位置，第一个下标 i 叫行指标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫列指标，表示位于第 j 列. 利用二阶行列式，(1.2)式可表示为

$$
x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.
$$

其中分母是由方程组(1.1)的系数按原来位置排列成的行列式，称为方程组(1.1)的**系数行列式**. 于是可以把方程组(1.1)的解法总结为：若线性方程组(1.1)的系数行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.4}
$$

则方程组(1.1)有唯一解

$$
x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D},
$$

其中

$$
D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix},
$$

它们是将系数行列式(1.4)中的第 1 列和第 2 列分别换成方程组(1.1)中的常数项 d_1, d_2 所得到的行列式.

例 1.1 解方程组

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 5x - 7y = 29. \end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -31 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解，又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix} = -93,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = 62.$$

故方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-93}{-31} = 3,$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{62}{-31} = -2.$$

1.1.2 三阶行列式

为了得出关于三元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

的类似解法，我们引入**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

这是一个包括六项的代数和，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，其中有三项前面带正号，另三项前面带负号.

通过类似于对方程组(1.1)所作的讨论，可以得到方程组(1.5)的下述解法.若线性方程组(1.5)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.7}$$

则方程组(1.5)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}, y=\frac{D_2}{D}, z=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

它们是将系数行列式(1.7)中第1,2,3列分别换成方程组(1.5)中的常数项所得到的行列式.

例 1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &=1\times 1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1) \\ &\quad +1\times 2\times 1-1\times 1\times(-1) \\ &\quad -(-2)\times 2\times(-1)-1\times(-3)\times 1 \\ &=-5\neq 0, \end{aligned}$$

所以方程组有唯一解.经计算可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

从上面的例子可以看出，对于未知量个数与方程组个数相等的线性方程组(1.1)和(1.5)，如果它们的系数行列式不等于 0，用行列式求解是方便的.

在实际应用中，遇到的线性方程组所包含的未知量常常是多于三个，而且在某些理论研究中往往需要考虑 n 个未知量的线性方程组的求解问题，我们自然希望能把上面二元和三元线性方程组的解法推广到包含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组. 为此首先要把二阶和三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念.

1.2 排　　列

n 阶行列式的定义和研究，需要用到排列的某些事实. 作为预备知识，本节介绍排列的基本性质.

1.2.1 排列与逆序数

把 n 个不同的元素按一定顺序排成一行，叫做这 n 个元素的

一个**排列**. 为了方便起见，用 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 代表 n 个不同的元素来讨论有关排列的性质.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列**(permutation). 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

如 2341 是一个四阶排列，25134 是一个五阶排列. n 阶排列共有 $n!$ 个. $12\cdots n$ 是一个 n 阶排列，它具有自然顺序，称为**自然排列**，在这个排列中的任何两个数，小的数总排在大的数的前面.

定义 1.2 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 以后用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例 1.3 在四阶排列 2341 中，共有逆序 21,31,41，即 $\tau(2341)=3$，所以 2341 是奇排列.

在五阶排列 25134 中，共有逆序 21,51,53,54，即 $\tau(25134)=4$，所以 25134 是偶排列.

例 1.4 自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数 $\tau(12\cdots n)=0$，所以 $12\cdots n$ 是偶排列，而 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数

$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots 21) &= (n-1)+(n-2)+\cdots+1 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1),\end{aligned}$$

所以当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是偶排列，而当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots 21$ 是奇排列.

1.2.2 排列的奇偶性

在一个排列中，对换其中某两个数，而保持其余的数不动，就得到另一个排列. 这种操作称为一个**对换**.

例 1.5 五阶偶排列 25134 经过 2,5 对换变成排列 52134，容

易计算 $\tau(52134)=5$，所以 52134 是奇排列.

关于对换对排列奇偶性的影响，有下述一般性结论.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 先考虑一种特殊情形，即对换的两个数在排列中是相邻的，设排列

$$\cdots jk\cdots \tag{1.8}$$

经对换 j,k 变成排列

$$\cdots kj\cdots \tag{1.9}$$

这里"…"表示那些在对换下保持不动的数. 显然，这些数之间以及这些数与 j,k 之间是否构成逆序的情况在(1.8)和(1.9)中是相同的. 故只需考虑数对 j,k. 若 j,k 在(1.8)中构成逆序，则它们在(1.9)中不构成逆序；反之，若 j,k 在(1.8)中不构成逆序，则它们在(1.9)中构成逆序. 由此可知，无论是哪种情形，排列(1.8)和(1.9)的逆序数总相差 1. 因而排列(1.8)和(1.9)有相反的奇偶性.

再考虑一般情形. 设排列

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \tag{1.10}$$

经对换 j,k 变成排列

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots \tag{1.11}$$

不难看出，这样的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻两数的对换来实现. 例如

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \xrightarrow{s+1\text{ 次相邻两数的对换}} \cdots kji_1i_2\cdots i_s\cdots$$

$$\xrightarrow{s\text{ 次相邻两数的对换}} \cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots$$

由于 $2s+1$ 是奇数，且相邻两数的对换改变排列的奇偶性，因此(1.10)和(1.11)也有相反的奇偶性. ■

定理 1.2 在全部 n 阶排列中($n\geqslant 2$)，奇偶排列各占一半.

证 设在全部 n 阶排列中有 s 个奇排列和 t 个偶排列，须证 $s=t$.

将 s 个奇排列的前两个数对换，则这 s 个奇排列全变成偶排列，并且它们彼此不同，所以 $s\leqslant t$. 若将 t 个偶排列的前两个数对换，则这 t 个偶排列全变成奇排列，并且它们彼此不同，于是又有 $t\leqslant s$. 故必有 $s=t$. ■

定理 1.3 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

证 对排列的阶数 n 作数学归纳法，当 $n=1$ 时，结论显然成立. 设对 $n-1$ 阶排列结论成立，现在考虑 n 阶排列的情形.

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是任意一个 n 阶排列. 若 $j_n=n$，则 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是一个 $n-1$ 阶排列. 根据归纳假设，排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经过一系列对换变为自然排列. 因而排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 可经过一系列对换变为自然排列. 若 $j_n\neq n$，则在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中先对换 j_n 和 n，使排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $j'_1j'_2\cdots j'_{n-1}n$，这就归结为前面的情形. 根据前面的结论可知排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 也可经过一系列对换变成自然排列.

根据归纳法原理，对任意自然数 n，结论成立.

由于 $12\cdots n$ 是偶排列，且对换改变排列的奇偶性，所以将一个偶（奇）排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变为自然排列需要作偶（奇）数次对换. 即将排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成自然排列所作对换次数的奇偶性与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同. ■

1.3 n 阶行列式

1.3.1 n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先考察一下二阶和三阶行列式的定义是有益处的. 回顾(1.3)式和(1.6)式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

我们看到二阶和三阶行列式都是一些项的代数和.现在来看一下这些代数和中各项的构成以及各项前所带的正负号的确定有什么规律性.以三阶行列式为例,通过对展开式(1.6)的仔细观察,不难发现

1) 三阶行列式的展开式(1.6)中共有 3! =6 项,其中的每一项都是行列式中位于不同行不同列的三个元素的乘积,并且每个这样的乘积都出现在展开式(1.6)中.

2) 在展开式(1.6)中,前面带正号的项和带负号的项各占一半.不难直接验证,(1.6)中各项前所带的符号是由下述方式确定的.将(1.6)的一般项写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1.12}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列.于是,在行指标构成自然排列的情况下,当列指标所成的排列 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时,项(1.12)的前面带正号;而当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时,项(1.12)的前面带负号.

根据这些观察,三阶行列式的展开式(1.6)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$