

# 数值天气预报教程

田永祥 沈桐立 编著  
葛孝贞 陆维松

气象出版社

# 数值天气预报教程

陈维明 陈朝华 编著  
陈维明 陈朝华 主编

气象出版社

北京广安门内大街137号 100045

# 数值天气预报教程

田永祥 沈桐立 编著  
葛孝贞 陆维松

alc

1992. m

95-97

气象出版社

(京)新登字 046 号

## 内 容 简 介

本书是一本系统讲述数值天气预报原理及其应用的教科书。经中国气象局高等学校气象类教材编审领导小组审查,确认本书为大学本科通用教材。

本书的内容主要有:数值天气预报基础知识;数值天气预报模式;初始条件、边界条件的类型和给定方法;大气边界层物理过程和湿热力过程的参数化;大尺度和中小尺度天气系统的数值模拟。

本书可作为大专院校气象专业的教材,也可供气象科技工作者阅读。

## 数值天气预报教程

田永祥 沈桐立 葛孝贞 陆维松 编著

责任编辑:康文骥 黄丽荣 终审:纪乃晋

封面设计:文禾 责任技编:刘祥玉 责任校对:王 珏

\*

气象出版社出版

(北京海淀区白石桥路 46 号 邮政编码:100081)

北京怀柔王史山印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销

开本:850×1168 1/32 印张 15 字数:388 千字

1995 年 11 月第一版 1995 年 11 月第一次印刷

印 数:1-2600

ISBN 7-5029-1972-4/P·0751(课)

定价:15.00 元

# 前 言

《数值天气预报教程》是一本系统讲述数值天气预报原理及其应用的教科书。本书经中国气象局高等学校气象类教材编审领导小组审查,确认为大学本科通用教材。

本书的内容主要有:(1)数值天气预报基础知识,其中包括各种坐标系中的大气运动基本方程组和数值计算方案。(2)数值天气预报模式,其中有正压和斜压过滤模式,正压和斜压原始方程模式,正压涡度方程谱模式。(3)初始条件、边界条件的类型和给定方法。(4)大气边界层物理过程和湿热力过程的参数化。(5)大尺度和中小尺度天气系统的数值模拟。

本书的编写力求反映国内外数值天气预报理论研究和业务应用的新进展;力求条理清晰、深入浅出、适合教学;注重理论与实践相结合,全书每章都设有习题或思考题,第四、五、六章增设数值天气预报实习的内容。我们期望本书能使读者在加深理解数值天气预报原理、提高制作数值天气预报能力方面起到一定的作用。

本书第一、二、四、五、八章由田永祥编写,第三章由葛孝贞编写,第六、七、九、十一章由沈桐立编写,第十章由陆维松编写。

在编写和出版本书的过程中,得到南京气象学院气象系、教务处,南京大学大气科学系,以及气象出版社的大力支持。本书初稿完成后,由南京大学大气科学系党人庆教授审查定稿。本书的全部插图由孙素兰同志绘制。这里,谨向他们表示诚挚的谢意!

由于作者学识水平所限,书中缺点和错误在所难免,希望读者批评指正。

编著者

1995年6月

AAH127 / 11

# 目 录

## 前言

第一章 大气运动基本方程组 .....	(1)
§1 旋转坐标系中的基本方程组 .....	(1)
§2 球坐标系中的基本方程组 .....	(13)
§3 局地直角坐标系中的基本方程组 .....	(19)
§4 $p$ 坐标系中的基本方程组 .....	(23)
§5 $\sigma$ 坐标系中的基本方程组 .....	(32)
§6 大气运动基本方程组的简化 .....	(38)
§7 涡度方程和散度方程及其简化 .....	(49)
习题 .....	(61)
第二章 地图投影坐标系中的大气运动基本方程组 .....	(63)
§1 地图投影 .....	(63)
§2 普遍的正交曲线坐标系中的基本方程组 .....	(76)
§3 普遍的地图投影坐标系中的基本方程组 .....	(83)
习题 .....	(89)
第三章 数值计算方案 .....	(92)
§1 差分方法概论 .....	(92)
§2 时间积分方法 .....	(110)
§3 时间积分格式 .....	(113)
§4 平流方程的空间差分格式及其误差分析 .....	(121)
§5 非线性方程的计算稳定性 .....	(133)
习题 .....	(141)
第四章 准地转模式 .....	(143)
§1 准地转正压模式及其积分性质 .....	(143)
§2 准地转正压模式的数值解法 .....	(150)

§ 3	准地转斜压模式的基本方程组	(160)
§ 4	准地转两层模式及其动力学	(167)
§ 5	准地转两层模式的能量转换关系	(178)
习题		(180)
第五章	正压原始方程模式	(183)
§ 1	正压原始方程组及其积分性质	(184)
§ 2	正压原始方程组的线性计算稳定性	(189)
§ 3	正压原始方程模式的空间差分格式	(191)
§ 4	空间差分格式与地转适应	(201)
§ 5	正压原始方程模式的时间积分格式	(208)
§ 6	空间平滑滤波	(220)
§ 7	正压原始方程模式的数值解法	(224)
习题		(227)
第六章	斜压原始方程模式	(230)
§ 1	垂直坐标的选取	(230)
§ 2	斜压原始方程组的积分性质	(241)
§ 3	斜压原始方程模式的空间差分格式和时间积分方案	(249)
§ 4	斜压五层原始方程模式的数值解法	(258)
§ 5	斜压原始方程模式的模拟试验	(269)
习题		(274)
第七章	初始条件与边界条件	(275)
§ 1	数值天气预报中初值处理的类型	(276)
§ 2	四维同化问题	(291)
§ 3	边界条件的类型与给定方法	(298)
§ 4	嵌套网格的边界处理方案	(303)
习题		(312)
第八章	正压涡度方程谱模式	(313)
§ 1	球面谱模式的展开函数和因变量的选择	(313)
§ 2	球谐函数及其性质	(315)
§ 3	波数截断问题	(325)
§ 4	离散傅立叶变换 DFT (Discrete Fourier Transform)	(330)

§ 5	勒让德变换 (Legendre transform) .....	(333)
§ 6	正压涡度方程全球谱模式 .....	(341)
习题	.....	(349)
<b>第九章</b>	<b>大气边界层的参数化</b> .....	<b>(351)</b>
§ 1	平均运动方程及平均次网格尺度项 .....	(352)
§ 2	单层参数化处理办法 .....	(355)
§ 3	多层参数化处理办法 .....	(361)
§ 4	边界层高度的预报 .....	(366)
§ 5	边界层模式 .....	(369)
习题	.....	(375)
<b>第十章</b>	<b>湿热力过程的参数化</b> .....	<b>(377)</b>
§ 1	湿热力过程和积云对流的基本理论 .....	(377)
§ 2	大尺度凝结过程 .....	(381)
§ 3	四种对流参数化方案 .....	(388)
§ 4	四种对流参数化方案的比较 .....	(417)
习题	.....	(417)
<b>第十一章</b>	<b>中小尺度天气系统的数值模拟</b> .....	<b>(418)</b>
§ 1	描述中小尺度天气系统的基本方程组 .....	(419)
§ 2	描述中小尺度天气系统的线性方程组的动力学特性 .....	(430)
§ 3	模拟中小尺度天气系统应考虑的物理因子 .....	(437)
§ 4	一个中尺度数值模式简介 .....	(444)
§ 5	中尺度天气系统数值模拟实例 .....	(454)
习题	.....	(456)
<b>附录</b>		
I	正交曲线坐标系中矢量的运算 .....	(457)
II	准地转正压模式预报实习 .....	(461)
III	正压原始方程模式预报实习 .....	(463)
IV	斜压原始方程模式预报实习 .....	(470)
<b>参考文献</b>	.....	<b>(471)</b>



# 第一章 大气运动基本方程组

大气运动遵循牛顿第二定律、质量守恒定律、热力学能量守恒定律、气体实验定律和水汽守恒定律等物理定律。这些物理定律的数学表达式分别为运动方程、连续方程、热力学方程、状态方程和水汽方程等基本方程。它们构成支配大气运动的大气运动基本方程组。

所谓数值天气预报,就是在给定初始条件和边界条件的情况下,数值求解大气运动基本方程组,由已知的初始时刻的大气状态预报未来时刻的大气状态。因此,大气运动基本方程组是制作数值天气预报的基础。

本章首先导出旋转坐标系中一般形式的大气运动基本方程组。为了制作数值天气预报和对大气环流进行数值模拟,紧接着给出球坐标系、 $z$ 坐标系、 $p$ 坐标系和 $\sigma$ 坐标系中大气运动基本方程组的具体形式。为了设计在数学上便于求解的数值天气预报模式,随后对大气运动基本方程组中的各基本方程及其变形方程(即涡度方程和散度方程)进行尺度分析和简化。最后,简单地介绍数值天气预报模式的分类。

## § 1 旋转坐标系中的基本方程组

在动力气象学中,一般采用固定在地球上的旋转坐标系中的基本方程组来研究大气的运动。本节首先把运动方程由惯性坐标系转换到非惯性坐标系;然后导出旋转坐标系中的其它基本方程,即连续方程、状态方程、热力学方程和水汽质量守恒方程;最后给出旋转坐标系中的大气运动基本方程组。

## 一、运动方程

大气运动遵守牛顿第二运动定律。对于惯性坐标系(亦称静止坐标系或绝对坐标系),例如相对于某个恒星是静止的或作匀速直线运动的坐标系就是一个惯性坐标系,牛顿第二运动定律可表示为

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (1.1)$$

式中  $\mathbf{F}_i$  是作用于单位质量气块上的外力;  $d_a/dt$  为在惯性坐标系中的全微商;  $\mathbf{V}_a$  为绝对速度,  $d_a \mathbf{V}_a/dt$  为绝对加速度。

实际观测到的大气运动都是对于地球表面的相对运动。因而在气象学中一般都是应用固定在地球上的坐标系来研究大气运动。地球本身除了围绕太阳公转以外,还以常值角速度  $\Omega$  自西向东绕地轴自转。因此,固定在地球上的坐标系是一个非惯性系。由于地球对恒星的加速度主要是由地球的自转引起的,所以可以把地球视为一个对惯性坐标系作纯粹旋转运动的物体。为了应用相对于非惯性系统的变量(即在旋转地球上所观测到的变量)来描述大气运动,需要把运动方程由惯性坐标系转换到非惯性坐标系,即固定在地球上的旋转坐标系。

### 1. 旋转坐标系和惯性坐标系中的全微商

把运动方程转换到旋转坐标系,需要建立一个惯性坐标系中矢量的全微商与旋转坐标系中矢量的全微商之间的关系式。

令  $i, j, k$  为惯性坐标系中沿直角坐标轴的单位矢量,而  $i', j', k'$  为旋转坐标系中的单位矢量。在这两种坐标系中,任意一矢量  $\mathbf{A}$  可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x i + A_y j + A_z k \\ &= A'_x i' + A'_y j' + A'_z k' \end{aligned}$$

在惯性坐标系中,矢量  $\mathbf{A}$  的全微商为

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d_a A_x}{dt} i + \frac{d_a A_y}{dt} j + \frac{d_a A_z}{dt} k$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{dA'_x}{dt}i' + \frac{dA'_y}{dt}j' + \frac{dA'_z}{dt}k' \\
 &+ A'_x \frac{di'}{dt} + A'_y \frac{dj'}{dt} + A'_z \frac{dk'}{dt}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

式中  $\frac{dA'_x}{dt}i' + \frac{dA'_y}{dt}j' + \frac{dA'_z}{dt}k' \equiv \frac{dA}{dt}$

为旋转坐标系中矢量  $A$  的全微商。由于  $i'$  是旋转坐标系中的单位矢量，所以  $di'/dt$  是  $i'$  的转动速度。不难求得  $di'/dt = \Omega \times i'$ 。同理，有  $dj'/dt = \Omega \times j'$ ， $dk'/dt = \Omega \times k'$ 。于是(1.2)式可改写为

$$\frac{d_a A}{dt} = \frac{d_r A}{dt} + \Omega \times A \tag{1.3}$$

上式即为惯性坐标系中矢量的全微商与旋转坐标系中矢量的全微商之间的关系式。其中  $\Omega$  为地球自转角速度矢量， $\Omega = |\Omega| = 7.292 \times 10^{-5} \text{ 秒}^{-1}$ 。

## 2. 相对加速度与绝对加速度之间的关系

首先寻求相对速度  $V$  与绝对速度  $V_a$  之间的关系。将(1.3)式应用于旋转地球上任意一气块的位置矢量  $r$ ，

得 
$$\frac{d_a r}{dt} = \frac{d_r r}{dt} + \Omega \times r \tag{1.4}$$

式中  $d_a r/dt \equiv V_a$ ， $d_r r/dt \equiv V$ 。于是上式可改写为

$$V_a = V + \Omega \times r \tag{1.5}$$

上式表明，在自转地球上，气块的绝对速度等于该气块相对于地球的速度加上由于地球自转而引起的牵连速度。

应用关系式(1.5)易于求得相对加速度与绝对加速度的关系。把(1.3)式应用于绝对速度  $V_a$ ，

得 
$$\frac{d_a V_a}{dt} = \frac{d_r V_a}{dt} + \Omega \times V_a \tag{1.6}$$

将(1.5)式代入上式的右端，

得到 
$$\begin{aligned}
 \frac{d_a V_a}{dt} &= \frac{d_r}{dt}(V + \Omega \times r) + \Omega \times (V + \Omega \times r) \\
 &= \frac{d_r V}{dt} + 2\Omega \times V - \Omega^2 R
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

这里已应用了矢量恒等式

$$\Omega \times (\Omega \times r) = \Omega \times (\Omega \times R) = -\Omega^2 R$$

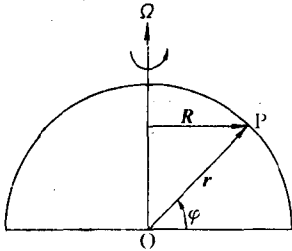


图 1.1 气块位置矢量  $r$  与矢量  $R$  的关系

式中  $R$  为气块所在的纬圈平面内从地轴到该气块的距离矢量,其大小为  $R = r \cos \varphi$  (参见图 1.1)。(1.7) 式表明,在惯性坐标系中,绝对加速度  $d_a V_a / dt$  等于相对加速度  $d_r V / dt$ 、科里奥利 (Coriolis) 加速度  $2\Omega \times V$  与向心加速度  $-\Omega^2 R$  三项之和。

根据达朗贝尔 (D'Alembert) 原理,方程(1.1)中的  $d_a V_a / dt$  可移到等式的右端作为惯性力来看待。因此,(1.7) 式中的各加速度项都可以看作是惯性力。但是,一般只把  $-d_r V / dt$  称为惯性力,而把  $-2\Omega \times V$  和  $\Omega^2 R$  分别称为科里奥利力 (简称科氏力) 和惯性离心力。

### 3. 作用在空气微团上的外力

作用在空气微团上的外力可以分成两类。一类为表面力,它是周围空气介质作用在空气微团表面上的力,表面力与作用面的大小成比例。另一类为质量力或体积力,这种力作用在组成空气微团的所有质点上,它与空气微团的质量或体积成比例,而与空气微团以外的空气介质的存在无关。气压梯度力和摩擦力属于表面力,而地球引力和重力属于质量力。

(1) 气压梯度力。气压梯度力是周围空气介质作用在空气微团表面上压力的合力。单位质量空气微团所受的气压梯度力为

$$F_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.8)$$

式中  $\nabla$  为三维微分算子,负号表示气压梯度力的方向是由高压指向低压。上式表明,只有在非均匀的气压场中气压梯度力才不为零。

(2) 摩擦力。摩擦力分为外摩擦力和内摩擦力。外摩擦力是指运动的空气与静止的下垫面之间的相互作用对空气运动产生的阻力。内摩擦力是指空气内部由于分子运动或湍流运动而引起的动量交换的力学效应。通常称内摩擦力为粘性力。

(a) 分子粘性力。分子粘性力是周围空气作用在空气微团表面上的内摩擦力。空气是一种粘性介质,当某一层空气对邻近一层空气有相对运动时,就会产生这种内摩擦力。从分子运动论的观点来看,这种内摩擦力的产生乃是具有不同速度的两层空气之间分子动量交换的结果。

根据纳维尔(Navier)和斯托克斯(Stokes)的分子粘性理论,作用于单位质量空气微团的分子粘性力为

$$F_2 = \frac{\nu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.9)$$

式中  $\nu = \mu/\rho$  为运动的分子粘性系数,  $\mu$  为动力的分子粘性系数,而  $\nabla^2$  为三维拉普拉斯(Laplace)算子。对于不可压缩的流体,(1.9)式右端第一项为零。

大气是低粘性流体,除在近地面几厘米的薄层内,由于风速的垂直切变很大,需要考虑分子粘性力以外,一般总是可以把它略去。

(b) 湍流粘性力。湍流粘性力类似于分子粘性力,它是由于具有不同运动速度的相邻两层空气之间湍流动量交换而产生的一种内摩擦力。应当指出,湍流粘性力与分子粘性力有本质的差别。分子粘性力决定于流体的物理属性(例如粘性),它是一种真实的力。湍流粘性力决定于流体的运动状态,通常称其为湍流虚粘性力。根据混合长理论,单位质量空气微团所受的湍流粘性力为

$$F_3 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (A_z \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}) \quad (1.10)$$

式中  $A_z$  为湍流交换系数。

虽然湍流粘性力比分子粘性力大得多,但是也只是在湍流运

动明显的大气边界层内考虑它的作用。在研究自由大气运动时，常常把湍流粘性力忽略。

(3) 地球引力和重力。根据万有引力定律，单位质量空气微团所受的地球引力为

$$F_4 = -\frac{GM}{r} \mathbf{r}$$

式中  $G = 6.668 \times 10^{-8}$  厘米<sup>3</sup>·克<sup>-1</sup>·秒<sup>-2</sup>，为引力常数， $M = 5.976 \times 10^{27}$  克为地球的质量， $r$  为空气微团的位置矢量。很显然，地球引力的方向指向地心。

作用于单位质量空气微团的惯性离心力为

$$F_5 = \Omega^2 \mathbf{R}$$

其方向与  $\mathbf{R}$  的方向相同，在纬圈平面上从地轴经空气微团指向外（参见图 1.1）。

把地球引力与惯性离心力合并，得到单位质量空气微团所受的重力，即重力加速度

$$\mathbf{g} = F_4 + F_5 = -\frac{GM}{r} \mathbf{r} + \Omega^2 \mathbf{R} \quad (1.11)$$

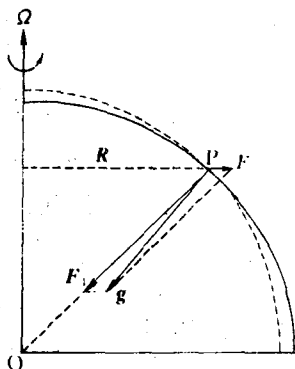


图 1.2 地球引力、惯性离心力与重力之间的关系

参见图 1.2，如果把地球视为完全的球体，则重力  $g$  的方向并不与地表面垂直。把惯性离心力  $F_5$  分解为两个相互垂直的分力。一个分力部分地抵消了地球的引力，另一个分力与地表面相切指向赤道。后一分力的存在促使地表面上的自由物体向赤道方向运动。因而这种作用力决定了地球上海洋表面的形状，在一定程度上也决定了陆地表面的形状。它使地球成为一个两极比较扁平的椭球体，从而重力与椭球面（海平面）相垂直，不再有向

赤道的分力。

由(1.11)式可知,重力或重力加速度随高度和纬度而变化。但计算结果表明,这种变化很小。因此,在气象学问题中可以把重力加速度的大小  $g$  视为常数,其值为  $980.665 \text{ 厘米} \cdot \text{秒}^{-2}$ 。

#### 4. 旋转坐标系中的运动方程

将(1.7)~(1.11)式代入(1.1)式,经整理后得到旋转坐标系中矢量形式的运动方程

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (1.12)$$

式中摩擦力  $\mathbf{F}$  为湍流粘性力与分子粘性力之和,标号“ $r$ ”(表明在旋转坐标系中进行全微商运算)已略写。运动方程(1.12)表明,在旋转坐标系中,单位质量空气微团的相对加速度等于它所受的气压梯度力、科氏力、重力、以及内摩擦力诸力的总和。

## 二、连续方程

大气运动遵守的另一个基本规律是质量守恒定律。取一质量为  $\delta M$  的空气微团。由于在运动过程中空气微团的质量是守恒的,所以有

$$\frac{d(\delta M)}{dt} = 0$$

将  $\delta M = \rho \delta \tau$  ( $\delta \tau$  是空气微团的体积)代入上式,

$$\text{得} \quad \frac{d(\rho \delta \tau)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \delta \tau + \rho \frac{d(\delta \tau)}{dt} = 0$$

将上式除以  $\delta \tau$ ,

$$\text{得到} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{\delta \tau} \frac{d(\delta \tau)}{dt} = 0$$

式中  $(1/\delta \tau)d(\delta \tau)/dt$  是体积  $\delta \tau$  的相对变化率,即速度散度  $\nabla \cdot \mathbf{V}$ ,

$$\text{于是有} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1.13)$$

上式即为连续方程。连续方程表明,在运动过程中,空气微团密度的变化是由于速度的辐散辐合引起的。

连续方程(1.13)可以改写为另一种形式,

$$\text{即} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.14)$$

上式表明,密度的局地变化是由于穿过单位体积表面流入流出的质量差  $\nabla \cdot (\rho V)$  (即质量通量散度或质量散度) 造成的。

应当指出, (1.13) 式或 (1.14) 式是旋转坐标系中连续方程的一般形式。以后将会看到, 对于在旋转地球上的任一坐标系 (例如球坐标系), 只要写出该坐标系中的速度散度  $\nabla \cdot V$  或质量散度  $\nabla \cdot (\rho V)$ , 便能得到这一坐标系中连续方程的具体形式。

### 三、状态方程

大气是一个热力系统。处于平衡态的热力系统其状态具有确定性。因此, 可以用一些宏观的物理量定量地描述该系统的状态。表征系统物理状态的宏观物理量称为状态参量。

各个部分物理性质完全相同的热力系统称为均匀系统。描述一定质量的均匀系统可用 3 个状态参量, 即压强  $p$ 、体积  $V$  和温度  $T$ 。但是这 3 个状态参量并不是孤立的, 它们之间存在如下的函数关系:

$$f(p, V, T) = 0$$

上式称为均匀系统的状态方程。应当指出, 状态方程仅适用于均匀系统。对于非均匀系统, 需要把它分为若干个均匀部分, 然后分别写出各个部分的状态方程。

在气象学要求的精度范围内, 可以把大气视为理想气体。理想气体是严格地遵守波义耳 - 查理 (Boyle-Charles) 定律的, 其状态方程的具体形式为

$$p = \rho RT \quad (1.15)$$

上式对于干空气或湿空气都适用。对于干空气, (1.15) 式中的  $R$  为干空气的气体常数,  $R = 2.870 \times 10^{-1}$  焦耳  $\cdot$  克 $^{-1}$   $\cdot$  开 $^{-1}$ 。对于湿空气, (1.15) 式中的  $R$  仍可取干空气的气体常数之数值, 但温度  $T$  应理解为虚温  $T_v$ 。虚温  $T_v$  的表达式为

$$T_v = (1 + 0.608q)T$$

式中  $q$  为比湿。因此, 湿空气的状态方程的形式应取为

$$p = (1 + 0.608q)\rho RT \quad (1.16)$$



#### 四、热力学方程

热力学方程或热力学第一定律描述能量守恒定律,它有多种表述形式。

##### 1. 一般形式的热力学方程

假设空气为理想气体。对于单位质量空气而言,热力学方程可写成

$$\frac{dE}{dt} + w = Q \quad (1.17)$$

式中  $Q$  为外界对空气微团的加热率,  $dE/dt$  为空气微团内能的变化,而  $w$  是由于空气膨胀对外界所做的功率。热力学方程(1.17)表明,在单位时间内,单位质量空气微团自外界获得热量的一部分用于加热空气微团使其内能发生变化,另一部分消耗于空气膨胀反抗外界压力而做功。

由于把空气视为理想气体,所以单位质量空气的内能  $E$  为  $c_v T$ 。对于干空气而言,定容比热  $c_v = 0.718$  焦耳·克<sup>-1</sup>·开<sup>-1</sup>。在可逆过程中,单位时间内单位质量空气膨胀所做的功为  $p da/dt$  ( $a = 1/\rho$  为比容)。于是热力学方程(1.17)可改写为

$$c_v \frac{dT}{dt} + A p \frac{da}{dt} = Q \quad (1.18)$$

式中  $A = 1/J = 0.23885$  卡·焦耳<sup>-1</sup> 为功热当量。

而  $J = 4.1868$  焦耳·卡<sup>-1</sup> 为热功当量。

应用状态方程(1.15),热力学方程(1.18)还可以改写成

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{ART}{p} \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.19)$$

式中  $c_p$  为定压比热,对于干空气而言,  $c_p = 1.005$  焦耳·克<sup>-1</sup>·开<sup>-1</sup>。

引用位温

$$\theta = \left( \frac{1000}{p} \right)^{AR/c_p}$$

取  $\theta$  的对数并对时间微商,

得

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{AR}{c_p p} \frac{dp}{dt}$$