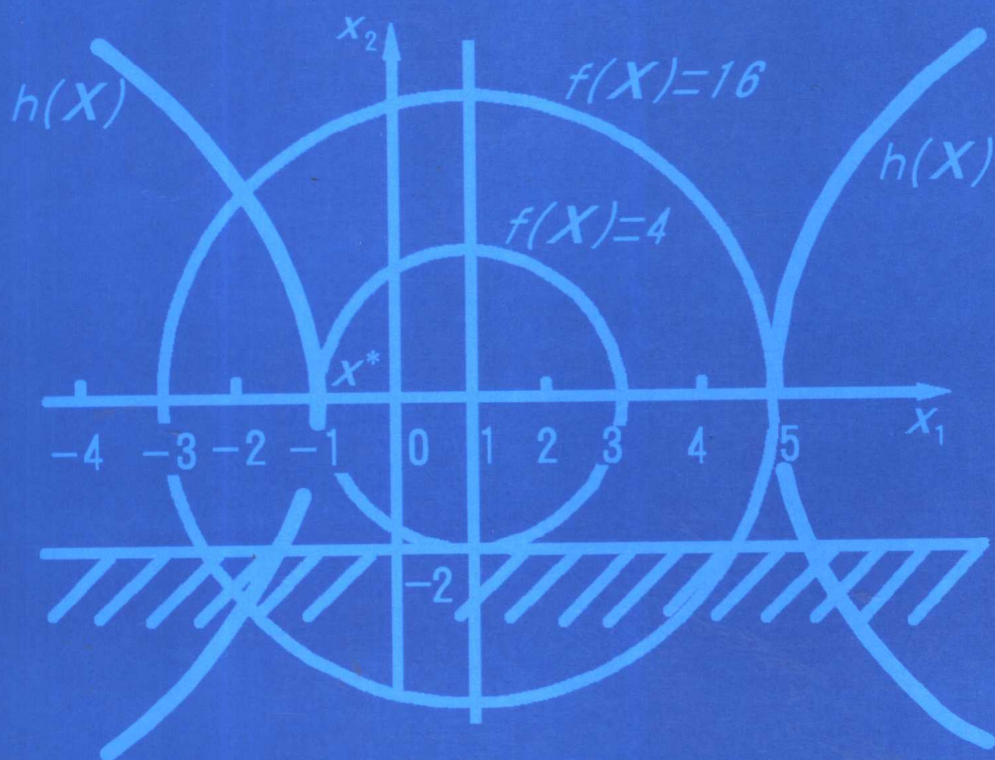


机械优化理论与设计

叶元烈 主编



中国计量出版社

机械优化理论与设计

叶元烈 主编

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

机械优化理论与设计/叶元烈主编. —北京:中国计量出版社,2000.12

ISBN 7-5026-1389-7

I. 机… II. 叶… III. 机械设计:最优设计 IV. TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 54245 号

内 容 提 要

本书详尽介绍了机械优化理论的基本概念和优化设计的主要方法,并附有优化方法的数学基础知识及常用优化方法参考程序和复习题。不仅内容丰富,而且通俗易懂,既是高等院校机械设计类专业本科生、研究生的理想教材,也是工程设计人员进行优化设计的重要参考书。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话 (010)64275360

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 11.5 字数 273 千字

2001 年 1 月第 1 版 2001 年 1 月第 1 次印刷

*

印数 1—5 000 定价:18.00 元

前 言

优化设计是现代设计方法的重要组成部分,是工程技术人员的基本职业训练项目。机械优化设计是机械设计类专业的一门必修课程,其目的是使学生树立优化设计的思想,掌握优化设计的基本概念和基本方法,获得解决机械优化设计问题的初步能力。

全书共七章,包括优化设计总论、一维优化方法、无约束优化方法、约束优化方法、机械设计中的多目标问题、离散变量的优化问题和机械优化设计实例等。另编写有附录一:优化方法的数学基础知识;附录二:常用优化方法参考程序及复习思考题等。

本书编写力求通俗易懂,强调物理概念及几何解释,以利学以致用,可作为高等院校机械设计类专业的本科生、研究生教材。为了配合本教材的使用,我们通过长期的探索研究,初步完成了与本教材相配套的相关教学软件。

参加本书编写工作的有叶元烈(第一、四、六章)、张学昌(第二、七章)、秦东晨(第三章)、叶青玉(第五章、附录一)、陈江义(附录二、复习思考题),由叶元烈统稿并担任主编。限于编者的水平和经验,不当之处敬请读者指正。

编 者

2000 年 8 月

目 录

第一章 优化设计总论	(1)
§ 1—1 优化设计在工程设计中的作用	(1)
§ 1—2 优化设计应用实例	(1)
§ 1—3 优化设计数学模型的建立	(6)
§ 1—4 优化设计问题的几何描述	(8)
§ 1—5 优化设计的基本解法	(11)
第二章 一维优化方法	(13)
§ 2—1 函数的单峰区间及其确定	(13)
§ 2—2 一维搜索的基本思想及方法分类	(16)
§ 2—3 黄金分割法(俗称 0.618 法)	(18)
§ 2—4 Fibonacci 法	(20)
§ 2—5 二次插值法	(23)
第三章 无约束优化方法	(28)
§ 3—1 概述	(28)
§ 3—2 坐标轮换法	(28)
§ 3—3 Powell 法	(32)
§ 3—4 单纯形法	(37)
§ 3—5 梯度法	(40)
§ 3—6 牛顿法	(44)
§ 3—7 DFP 变尺度法	(48)
第四章 约束优化方法	(55)
§ 4—1 约束最优解及其一阶必要条件	(55)
§ 4—2 约束坐标轮换法	(60)
§ 4—3 随机方向法	(60)
§ 4—4 复合形法	(64)
§ 4—5 惩罚函数法	(70)
第五章 机械设计中的多目标问题	(81)
§ 5—1 多目标优化设计问题的提出	(81)
§ 5—2 多目标优化问题的解	(81)
§ 5—3 主要目标法	(82)
§ 5—4 统一目标法	(83)

第六章 离散变量的优化问题	(89)
§ 6—1 离散变量和离散空间的基本概念	(89)
§ 6—2 混合离散变量优化算法概述	(93)
§ 6—3 约束非线性离散变量的优化方法	(94)
第七章 机械优化设计实例	(107)
§ 7—1 承受轴向载荷紧螺栓联接的优化设计	(109)
§ 7—2 圆柱螺旋压缩弹簧优化设计	(111)
§ 7—3 圆柱齿轮传动的优化设计	(115)
§ 7—4 普通 V 带传动的优化设计	(121)
§ 7—5 曲柄连杆机构连杆曲线轨迹拟合的优化设计	(125)
附录一 优化方法的数学基础知识	(128)
§ F1—1 矩 阵	(128)
§ F1—2 矢 量	(132)
§ F1—3 函数梯度	(134)
§ F1—4 集 合	(137)
§ F1—5 共轭方向与共轭矢量	(140)
附录二 常用优化方法参考程序	(143)
§ F2—1 进退法子程序	(143)
§ F2—2 黄金分割法子程序	(145)
§ F2—3 二次插值法子程序	(147)
§ F2—4 Powell 法子程序	(150)
§ F2—5 DFP 变尺度法子程序	(153)
§ F2—6 约束随机方向法子程序	(157)
§ F2—7 复合形法子程序	(160)
§ F2—8 内点惩罚函数法子程序	(166)
§ F2—9 外点惩罚函数法子程序	(168)
复习思考题	(170)
参考文献	(175)

第一章 优化设计总论

§ 1—1 优化设计在工程设计中的作用

优化设计是现代设计方法的重要内容之一。它以数学规划为理论基础,以电子计算机为工具,在充分考虑多种设计约束的前提下,寻求满足预定目标的最佳设计。

优化设计能比较好地把现代设计理论和经过长期实践验证的设计内容结合起来。这种技术在设计领域中具有巨大的应用潜力,它的推广应用,对促进我国设计工作现代化,起到良好的作用。

一般工程设计都有许多种可行的设计方案。如何根据设计任务和要求,从众多的可行方案中,寻求一个最好的方案,即最优方案,是设计工作者的首要任务。要完成这样一个困难的任务,必须掌握可靠的先进设计方法。

然而长期以来,机械设计工作者一直沿用着经验类比的设计方法。这种传统设计方法的设计过程可概括为“设计——分析——再设计”的过程,即首先根据设计任务及要求进行调查研究和搜集有关资料,参照相同或类似任务现有的、已完成的较为成熟的设计方案,凭借设计者的经验,辅以必要的分析计算,确定一个合适的设计方案,并通过估算,初步确定有关参数;然后对初定方案进行必要的分析及校核计算;如果某些设计要求得不到满足,则可进行设计方案的修改,设计参数的调整,并再一次进行分析及校核计算,如此多次反复,直到获得满意的设计方案为止。显然,这个设计过程是人工试凑与类比分析的过程,不仅需要花费较多的设计时间,增长设计周期,而且只限于在少数几个候选方案中进行分析比较。

随着电子计算机技术的发展与应用,50年代发展起来的以线性规划与非线性规划为主要内容的新的数学分支——数学规划被应用于解决工程设计问题,形成了工程设计的新理论和新方法,即工程优化设计理论与方法。

优化设计理论与方法用于工程设计是在60年代后期开始的,我国则从70年代中期才开始有关研究。20余年的工程优化设计理论与方法的研究和实践,使传统的工程设计方法发生了根本性变革,从而把经验的、感性的、类比的传统设计方法转变为科学的、理性的、立足于计算分析的设计方法。特别是近年来,随着有限元素法、可靠性设计、计算机辅助设计(CAD)的理论与方法的发展及与优化设计方法的结合应用,使整个工程设计过程逐步向自动化、集成化、智能化发展,其前景是令人鼓舞的。因而,工程设计工作者必须适应这种发展变化,学习、掌握和应用优化设计理论与方法。

§ 1—2 优化设计应用实例

例 1-1 镗刀杆(销轴)结构参数优化

如图 1-1 所示。刀杆自由端作用有集中载荷(切削阻力) $p=10\ 000\text{ N}$,扭矩 $M=$

100 N·m, 悬臂伸出长度不小于 80 mm, 已知材料的许用弯曲应力 $[\sigma]=120 \text{ N/mm}^2$, 许用扭转剪应力 $[\tau]=80 \text{ N/mm}^2$, 允许挠度 $[f]=0.1 \text{ mm}$, 弹性模量 $E=200\,000 \text{ N/mm}^2$ 。试在满足强度、刚度条件下, 设计一个用料最省的方案。

根据上述问题, 其物理表达式为

(1) 用料最省, 即体积最小

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 l \rightarrow \min$$

(2) 满足的条件

强度条件:

$$\text{弯曲强度式} \quad \sigma_{F\max} = \frac{Pl}{0.1d^3} \leq [\sigma]_F$$

$$\text{扭转强度式} \quad \tau_{\max} = \frac{M}{0.2d^3} \leq [\tau]$$

$$\text{刚度条件: 挠度表达式} \quad f = \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{64Pl^3}{3E\pi d^4} \leq [f]$$

结构尺寸边界条件: $l \geq l_{\min} = 80 \text{ mm}$

将题意的有关已知值代入, 按优化数学模型的规范形式, 归纳为下述数学模型:

设 $x_1 = d$, $x_2 = l$

设计变量 $X = [x_1 \quad x_2]^T$

$$\text{目标函数的极小化} \quad \min f(X) = \frac{1}{4} \pi x_1^2 x_2 = 0.7854 x_1^2 x_2$$

$$\text{约束条件} \quad g_1(X) = [\sigma]_F - \frac{Px_2}{0.1d^3} = 120 - \frac{10^5 x_2}{x_1^3} \geq 0$$

$$\text{或} \quad g_1(X) = x_1^3 - 833.3x_2 \geq 0$$

$$g_2(X) = [\tau] - \frac{M}{0.2d^3} = 80 - \frac{5 \times 10^5}{x_1^3} \geq 0$$

$$\text{或} \quad g_2(X) = x_1^3 - 6250 \geq 0$$

$$g_3(X) = [f] - \frac{64Pl^3}{3E\pi d^4} = 0.1 - \frac{0.34x_2^3}{x_1^4} \geq 0$$

$$\text{或} \quad g_3(X) = x_1^4 - 3.4x_2^3 \geq 0$$

$$g_4(X) = x_2 - l_{\min} = x_2 - 80 \geq 0$$

注意: 1) 此问题为具有两个设计变量, 四个约束条件的非线性规划问题。

2) 非线性规划问题的判断是看目标函数和约束函数是否均为线性函数, 若均为线性函数, 则称为线性规划问题; 若其中之一为非线性函数, 则称为非线性规划问题。

例 1-2 用薄铁板制造一体积为 5 m^3 , 长度不小于 4 m 的货箱(图 1-2), 要求该货箱的钢板耗费用最少, 试确定货箱的长、宽和高的尺寸。

钢板的耗费用与货箱的表面积成正比。如果货箱不带上盖, 设货箱长、宽、高分别为 x_1 、

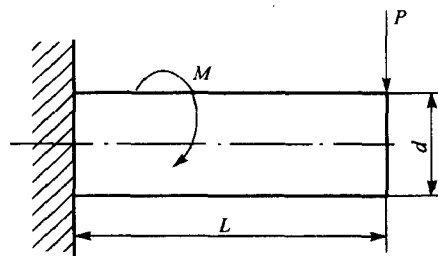


图 1-1

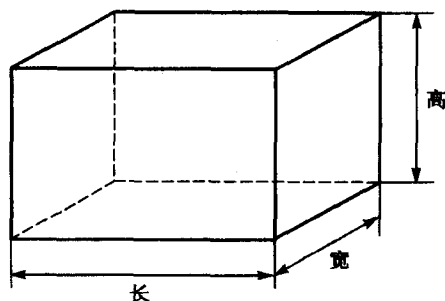


图 1-2

x_2, x_3 。则可写出下述数学模型：

设计变量

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

目标函数的极小化

$$\min f(X) = x_1 x_2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3)$$

约束条件

$$g_1(X) = x_1 - 4 \geq 0$$

$$g_2(X) = x_2 \geq 0$$

$$g_3(X) = x_3 \geq 0$$

$$h(X) = x_1 x_2 x_3 - 5 = 0$$

由等式约束可知，三个设计变量中只有两个是独立参变量，即 $x_3 = \frac{5}{x_1 x_2}$ 。该问题的优化数学模型应写为：

$$X = [x_1 \quad x_2]^T$$

$$\min f(X) = x_1 x_2 + 2(x_2 x_3 + x_1 x_3) = x_1 x_2 + 10 \left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \right)$$

$$s. t. \quad g_1(X) = x_1 - 4 \geq 0$$

$$g_2(X) = x_2 \geq 0$$

注意：1) 构造优化数学模型时，设计变量的确定应是独立参数。从本例分析可知：若有一个等式约束，则在原则上可以减少一个设计变量，当然这时被消除的那个设计变量必须以显式的形式表达出来。

2) 约束条件 $g_2(X) = x_2 \geq 0$ ，是表示设计变量不得取为负值，否则优化结果无实用价值。在工程设计的优化数学模型的编制时应引起注意。

例 1-3 螺栓组联接的优化

图 1-3 所示为一压力容器，该容器缸体与缸盖间有密封垫，采用普通螺栓将其联接。

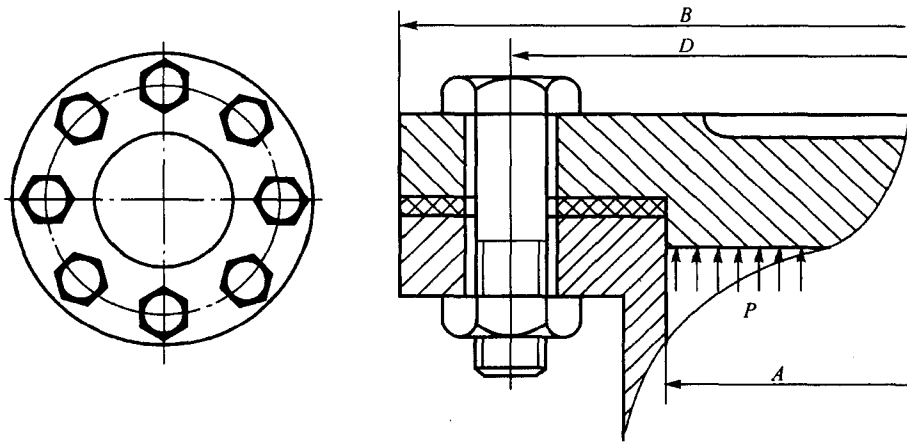


图 1-3

现需从安全、可靠、经济的角度来选择螺栓的个数和确定螺栓的尺寸。设计分析：(1)从经济性考虑，螺栓数量少些、尺寸小些为好，但数量少会影响容器的密封性，尺寸小强度低，不能保证安全可靠的工作；(2)从安全、可靠考虑，螺栓数量多一些、尺寸大一些为好，显然经济性差，且会造成安装扳手空间过小，操作困难。为此，该问题的设计思想应是：在保证工作安全、可

靠的前提下,尽量降低成本。

根据上述分析,该问题可归纳为如下的数学模型:

设计变量 $X = [x_1 \ x_2]^T = [d \ n]^T$

d ——螺栓直径, n ——螺栓个数

目标函数 全部螺栓的总成本最低

$$C_n = n \cdot c$$

C_n ——全部螺栓的总成本(元)

c ——单个螺栓的价格(元)

单个螺栓价格是由材料及螺栓尺寸规格所决定的,其值应在社会调查统计的基础上,进行回归分析得到。表 1-1 所示的是材料为 35 号钢,长度为 50 mm,半精制螺栓的单价:

表 1-1

直径 d (mm)	10	12	14	16	18	20	...
单价 C (元)	0.052	0.091	0.142	0.174	0.228	0.251	...

根据表 1-1 数据画出成本 c —直径 d 的点例,如图 1-4 所示。从点列分布可用直线近似描述。运用线性回归分析可得 d — c 关系式为:

$$c = 0.020\ 5d - 0.151\ 8$$

由此可得螺栓总成本:

$$C_n = n \cdot (0.020\ 5d - 0.151\ 8)$$

约束条件

(1) 强度条件 保证在工作压力 p 作用下,能安全、可靠地工作。设单个螺栓允许的轴向载荷为 F ,则有

$$K \cdot \frac{\pi A^2}{4} \cdot p \leq nF, \text{ 或 } nF - K \cdot \frac{\pi A^2}{4} \cdot p \geq 0$$

式中 K —安全系数, $K > 1$

单个螺栓允许的轴向载荷在同一材料时,只与螺栓直径有关。如 35 号钢的螺栓见表 1-2。

表 1-2

螺栓直径 d (mm)	6	8	10	12	16	20	24	...
许用轴向载荷 F	(kg)	400	740	1 180	1 720	3 300	5 200	7 500
		310	580	920	1 320	2 500	4 000	5 800

由表 1-2 可画出 F — d 的点列,用指数函数 $F = ad^b$ 近似描述,经回归分析,对有预紧力的螺栓可得:

$$a = 7.063\ 020\ 1, \quad b = 2.113\ 536\ 9$$

故得单个螺栓允许的轴向载荷的表达式:

$$F = 7.063\ 020\ 1d^{2.113\ 536\ 9}$$

则有强度约束条件 $7.063\ 020\ 1nd^{2.113\ 536\ 9} - K \frac{\pi A^2}{4} \cdot p \geq 0$

(2) 安装条件 保证扳手空间及压力容器的密封性

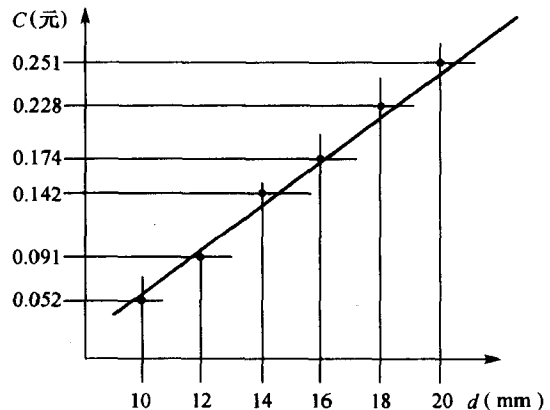


图 1-4 c — d 点列图

为保证必要的扳手空间,螺栓间距不应小于 5 倍的螺栓直径;为保证联接的密封性,螺栓间距不应大于 10 倍的螺栓直径。即

$$\frac{\pi D}{n} - 5d \geq 0, \quad 10d - \frac{\pi D}{n} \geq 0$$

设 x_1 表示螺栓直径 d , x_2 表示螺栓个数 n 。根据上述分析可写成规范化优化数学模型:

设计变量

$$X = [x_1 \quad x_2]^T$$

目标函数极小化

$$\min f(X) = x_2(0.0205x_1 - 0.1518)$$

约束条件

$$g_1(X) = 7.0630201x_2x_1^{2.1135369} - K \frac{\pi A^2}{4} p \geq 0$$

$$g_2(X) = \pi D/x_2 - 5x_1 \geq 0$$

$$g_3(X) = 10x_1 - \pi D/x_2 \geq 0$$

$$g_4(X) = x_1 \geq 0$$

$$g_5(X) = x_2 \geq 0$$

注意: 1) 本例优化数学模型表达的问题是二个设计变量,五个约束条件的非线性规划问题;

2) 本例的设计变量均为离散性整数,故该问题又属整数规划问题;

3) 本例在构造目标函数和第一个约束函数时,无法引用现成的公式,是利用观测值进行回归分析(或称曲线拟合)获得经验表达式。

例 1-4 综合优化一个四杆机构以实现给定的连杆曲线(图 1-5)。

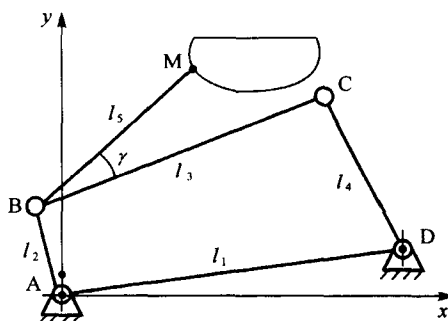


图 1-5

连杆上 M 点的轨迹给定坐标值如表 1-3 所示。

表 1-3

	1	2	3	4	5	6	7	8
XM_i	26	23	20	17	13	10	20	30
YM_i	16	17	17	16	15	11	6	12
$\Delta\theta_i$	0	22	44	66	88	129	221	314

目标函数的建立:采用坐标误差的均方根值最小

$$\min f(X) = \left\{ \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 [(XX_i - XM_i)^2 + (YY_i - YM_i)^2] \right\}^{1/2}$$

式中的 XX_i 和 YY_i 可由图 1-5 推出:

$$\begin{aligned}
XX_i &= l_2 \cos \theta_i + l_5 \cos \Psi_i \\
YY_i &= l_2 \sin \theta_i + l_5 \sin \Psi_i \\
\theta_i &= \theta_1 + \Delta \theta_i \\
\Psi_i &= \gamma + \eta_i - (\varepsilon_i - \beta) \\
\varepsilon_i &= \tan^{-1} \left[\frac{l_2 \sin(\theta_i - \beta)}{l_1 - l_2 \cos(\theta_i - \beta)} \right] \\
\eta_i &= \cos^{-1} \left\{ \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - l_4^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta_i - \beta)}{2l_3 [l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\theta_i - \beta)]^{1/2}} \right\}
\end{aligned}$$

设计变量: 考虑到曲柄铰链 A 作为坐标原点。

$$X = [l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, \beta, \gamma, \theta_1]^T$$

式中 θ_1 为曲柄相对于机架第一个位置的转角。

约束条件: 除设计变量边界条件外应设置下列条件

(1) 曲柄存在的条件

- ① 曲柄为最短杆;
- ② 最短杆与最长杆之和小于或等于其他两杆长度之和。

(2) 机构传动性能条件(即最小传动角条件)

$$\delta_{\min} = \cos^{-1} \left[\frac{l_3^2 + l_4^2 - (l_1 - l_2)^2}{2l_3 l_4} \right] \geq 40^\circ$$

最小传动角出现在曲柄与机架共线处(图 1-6)。

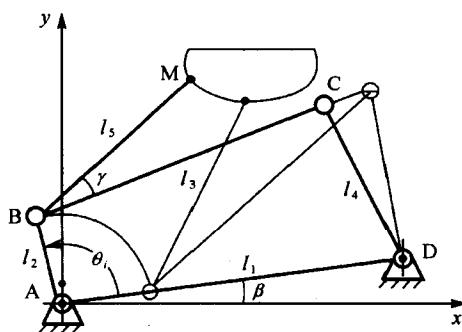


图 1-6

§ 1—3 优化设计数学模型的建立

优化设计的数学模型, 就是描述优化问题的设计内容、变量关系、有关设计条件和优化意图的数学表达式。

建立数学模型是优化设计的基础, 数学模型能否严密而准确地反映优化问题的实质, 是优化设计成败的关键。

一、优化设计数学模型三要素

1. 设计变量

(1) 必须是作为变量处理的独立参数。如例 1-2 只能取两个参数。

(2) 一般工程设计问题都是需要确定一组设计参数,工程设计优化问题的设计变量都是一组,也就是多变量优化问题。设计变量的个数就是优化问题的维数。如前例 1-1、例 1-2、例 1-3 中设计变量写为 $X=[x_1 \ x_2]^T$, 表示该类问题为二维优化问题。例 1-4 中设计变量写为 $X=[x_1 \ x_2 \ x_3 \cdots x_8]^T$, 表示该类问题为八维优化问题。 $X=[x_1 \ x_2]^T$ 为一列阵, 对应着一个以坐标原点为始点的矢量, 如图 1-7(a) 所示。矢量的端点就是这组设计变量, 称为设计点。同理, $X=[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ 表示一个三维空间矢量。如图 1-7(b) 所示。

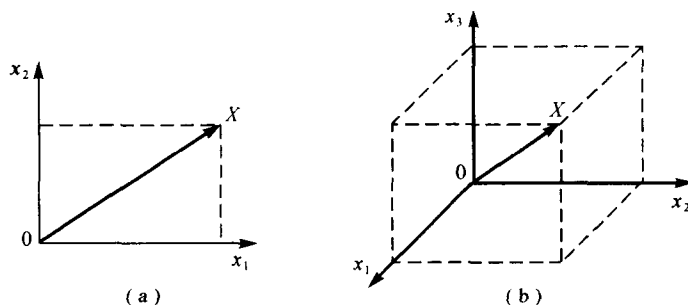


图 1-7

设计点的集合称为设计空间。对工程设计问题设计变量均属实数,设计空间称为实欧氏空间,记作 E^n , n 为维数。用集合概念可写为 $X \in E^n$, 对于三维优化问题可写为 $X \in E^3$ 。

(3) 一般设计变量可以全部为连续变量,或全部为离散变量,也可以部分为连续变量,部分为离散变量,后者通常称为混合离散变量。

2. 目标函数

建立目标函数,是整个优化设计中比较重要的问题,它既要反映用户的要求,又要敏感地、直接地反映设计变量的变化。一般情况下,目标函数与设计变量应有明显的函数关系。由于目标函数可以直接用来评价优化方法的好坏,所以又称它为评价函数。

在机械产品设计中,目标函数主要按设计准则来建立。在机构优化设计中,这种准则可以是运动学和动力学的性质;在零件和部件设计中,可以用重量、体积、效率、可靠性、承载能力等表示;对于产品设计,也可以将成本、价格、寿命等作为所追求的目标。

在某些设计中,可能存在两个或两个以上的优化设计目标,如设计一台机器时,期望得到最低的造价和最小的维护费用等。具有两个或两个以上的设计目标的优化设计,称为多目标优化设计。

优化问题一般统一用极小化来描述。即

$$\min f(X) = \min f(x_1 \ x_2 \ x_3 \cdots x_n)$$

实际工程设计问题中有追求极大化的,如效率最高、容积最大、承载能力最高等。这时可转化为

其负值最小问题来处理。如

$$\max f(X) = \min[-f(X)]$$

3. 约束条件

约束条件是设计变量间或设计变量本身应该遵循的限制条件的数学表达式:

(1) 设计的约束条件可表示为两种,即

$$\text{不等式约束} \quad g_j(X) \geq 0, \quad j=1,2,\dots,p$$

$$\text{等式约束} \quad h_k(X)=0, \quad k=1,2,\dots,q$$

(2) 设计的约束条件是由实际的设计要求导出的,一般可分为边界约束和性能约束两种。边界约束(又称区域约束)主要限制设计变量的取值范围(最大允许值和最小允许值)。性能约束(或称性态约束),是由某种设计性能导出的一种约束。

(3) 约束条件的确定,以满足设计要求为原则,应注意约束条件选取越多,优化问题越难求解。选取约束条件时,特别要注意避免重复的约束、矛盾的约束和约性相关的约束。

二、优化问题的分类及问题的最优解

(1) 无约束优化问题 其数学模型表达为:

$$\min f(X), X \in E^n$$

(2) 约束优化问题 其数学模型表达为:

$$\begin{aligned} \min f(X), \quad X \in D \subset E^n \\ \text{s. t.} \quad g_j(X) \geq 0, j=1,2,\dots,p \\ h_k(X) = 0, k=1,2,\dots,q \end{aligned}$$

即由 q 个等式约束和 p 个不等式约束所规定的可行域 D 。可行域 D 属于 n 维欧氏空间 E^n 的一个子集。

(3) 通过优化方法对数学模型求解,可得一组设计变量

$$X^* = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \cdots x_n]^T$$

使得目标函数 $f(X)$ 达到最小 $f(X^*)$

设计点 X^* 称为最优解,目标函数值 $f(X^*)$ 称为最优值。两者合称问题的最优解。

§ 1—4 优化设计问题的几何描述

为了进一步阐明优化设计的某些概念,现用二维优化问题的几何图形直观地描述优化设计原理。

例 1-5

$$\begin{aligned} \min f(X) &= (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \\ X &= [x_1 \quad x_2]^T \in D \subset E^n \\ \text{s. t.} \quad g_1(X) &= x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ g_2(X) &= -x_1^2 + x_2 - 1 \geq 0 \\ g_3(X) &= x_1 \geq 0 \\ g_4(X) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

该模型几何描述见图 1-8。因为目标函数是非线性函数,它在三维空间中为一曲面。令 $f(X) =$

$(x_1-2)^2+x_2^2=C_i, i=1,2,\dots$ 。取不同的 C_i 可得一系列圆,其圆心为 $(2,0)$,半径为 $\sqrt{C_i}$,组成的一组同心圆族称为该目标函数的等值线。

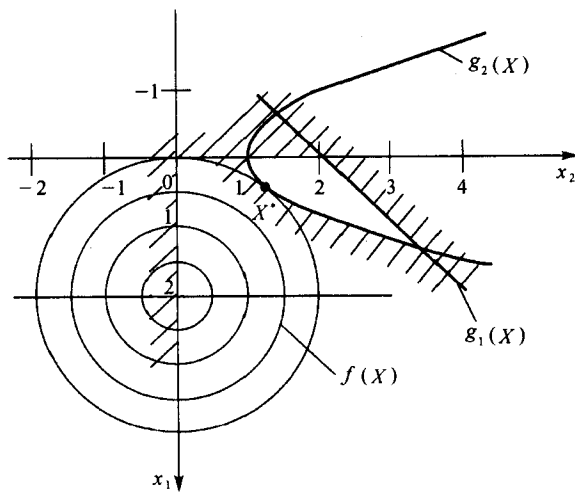


图 1-8

例 1-6

$$\min f(X) = x_1^2 + x_2$$

$$X = [x_1 \ x_2]^T \in D \subset E^n$$

$$s. t. \quad g_1(X) = 9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(X) = 1 - x_1 - x_2 \geq 0$$

该模型几何描述见图 1-9。

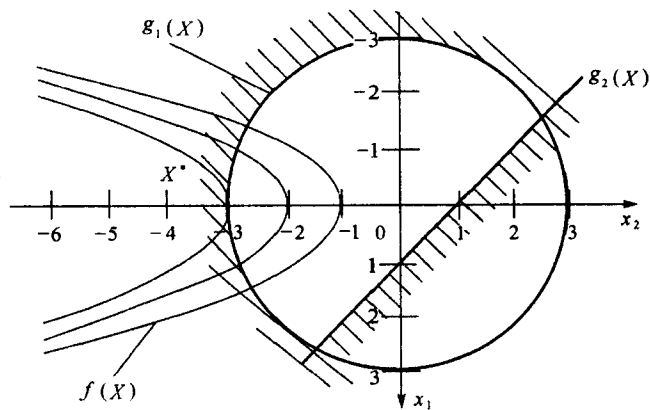


图 1-9

例 1-7

$$\min f(X) = x_1^2 + x_2$$

$$X = [x_1 \ x_2]^T \in D \subset E^n$$

$$s. t. \quad g_1(X) = 1 - x_1 + x_2^2 \geq 0$$

$$g_2(X) = 1 - x_1 - x_2 \geq 0$$

$$h(X) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$$

该模型几何描述见图 1-10。

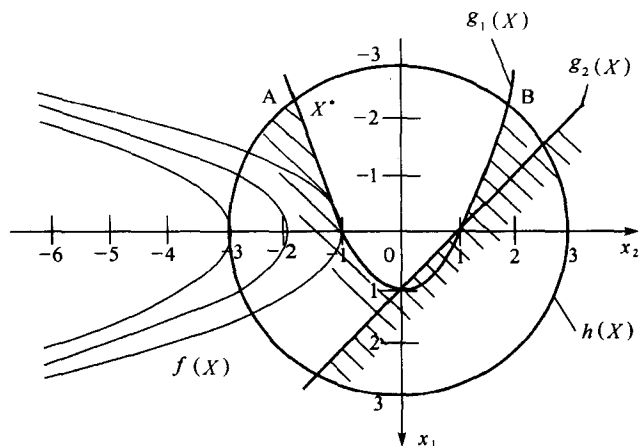


图 1-10

优化设计的几个基本概念:

(1) 目标函数等值线

例 1-5 为同心圆族, 例 1-6、例 1-7 为抛物线族。

一般来说, 对二维目标函数, 由极值理论可证明: 在极值点附近领域内的等值线是一族近似的同心椭圆, 椭圆族中心就是极值点。圆族等值线实际是椭圆族的特例。

(2) 可行域及可行点

由约束曲线共同包围的区域称为可行域。例 1-5 的可行域是由 $g_1(X)$ 、 $g_2(X)$ 、 $g_3(X)$ 共同包围的区域; 例 1-2 的可行域是由 $g_1(X)$ 、 $g_2(X)$ 共同包围的区域; 例 1-7 由于存在等式约束 $h(X)$, 它限制了设计点必须位于半径等于 3 的圆周上, 故该例的可行域仅为被 $g_1(X)=0$ 所截的一小段圆弧(AB)上。

可行点为可行域内的设计点, 故可行域应为可行点的集合。

(3) 消极约束

例 1-5 构成可行域中的设计点必满足 $g_4(X)$, 而 $g_4(X)$ 不是构成可行域的约束曲线。故把 $g_4(X)$ 称为消极约束。例 1-7, 可行域是由 $h(X)$ 和 $g_1(X)$ 构成的圆弧(AB), 凡在圆弧(AB)上的可行点均满足 $g_2(X)$, 故 $g_2(X)$ 对构成可行域不起作用, 被称为消极约束。

(4) 最优点、最优值

以一元函数求极值为例

$$f'(x) = 0, f''(x) > 0 \text{ 有极小值}$$

$$f''(x) < 0 \text{ 有极大值}$$

函数 $f(x)$ 在极小点 x^* 附近的一切均满足不等式 $f(x) > f(x^*)$, 表明 x^* 为局部极小点, $f(x^*)$ 为局部极小值。目标函数在某一区域内的极小值称为全局极小值。

局部极小不一定就是全局极小, 只有函数具备某种性质时, 二者才等同。如 $f'(x)=0$, 而且 $f''(x)>0$ 时。说明函数具有凸性, 也就是函数 $f(x)$ 为凸函数。

对于有约束问题, 约束条件构成的可行域还必须为凸集。目标函数为凸函数, 可行域为凸

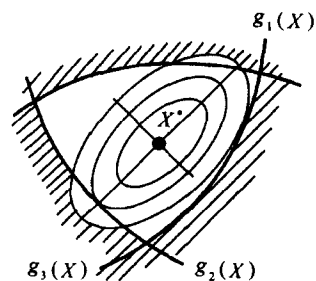


图 1-11

集的优化问题,称之为凸规划问题。对于凸规划问题的任何局部最优解均为全局最优解。

前例均为凸规划问题,故所得最优解均为全局最优解。

(5) 不起作用约束

某些约束优化问题,其约束最优就是无约束最优解(如图 1-11 所示)。例 1-5 中除 $g_2(X)$ 外,其余均为不起作用约束。例 1-6 中除 $g_1(X)$ 外,其余均为不起作用约束。例 1-7 $g_1(X)$ 和 $h(X)$ 两约束均为起作用约束。

§ 1—5 优化设计的基本解法

一、数值迭代法

无论是无约束优化问题还是约束优化问题,从实质上讲都是求极值的数学问题。但是优化计算中的求优方法与数学中的微分学求极值方法是不同的。优化计算求优方法的特点是:按照一定的逻辑结构进行反复的数值计算,寻求函数值不断下降的设计点,直到最后获得足够精度的近似解时就终止计算。具有这种特点的计算方法称为数值迭代法。显然,数值迭代法的计算工作量是很大的,所以优化计算必须借助电子计算机来进行运算。

现以二维优化问题的图形来说明优化算法的迭代过程,参看图 1-12(a)。

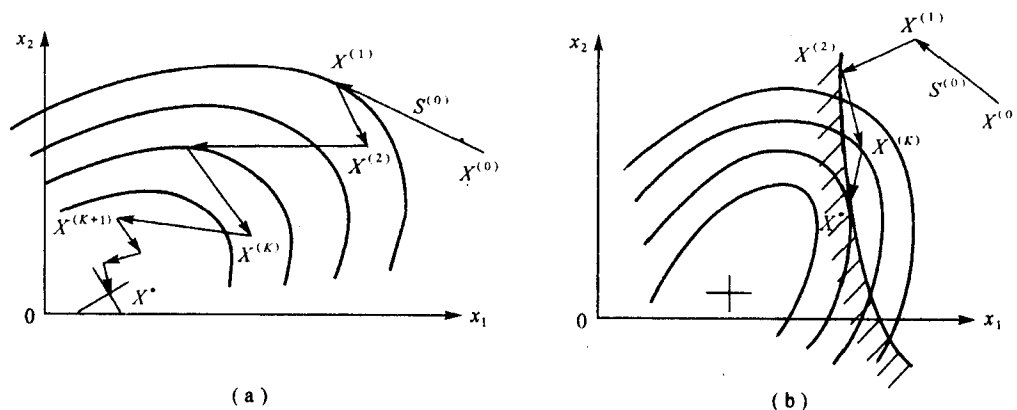


图 1-12 二维问题的迭代过程

从一个任选的初始点 $X^{(0)}$ 出发,沿某个方向 $S^{(0)}$ (此方向是按某种优化方法所规定的),以初选步长 $\alpha^{(0)}$ 去寻找一个新点 $X^{(1)}$,使函数值下降。即

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \alpha^{(0)} S^{(0)}$$

使满足

$$f(X^{(1)}) < f(X^{(0)})$$

则 $X^{(1)}$ 就是一个优于 $X^{(0)}$ 的新设计点。然后,以 $X^{(1)}$ 为新起点按类似的公式产生下一个新设计点。

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \alpha^{(1)} S^{(1)}$$

使满足