图　　论

F. 哈拉里　著
李　慰　萱　译

上海科学技术出版社

图　论

F. 哈拉里 著

李慰萱 译

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　江苏扬中印刷厂印刷
开本850×1156 1/32　印张10　字数260,000
1980年1月第1版　1981年3月第2次印刷
印数10,001—20,000
书号：13119·785　定价：1.10元

序

当我是个十四岁的孩子时，我的父亲是如此愚昧无知，使我简直不能和他待在一起。但当我长到二十一岁时，我十分惊讶地发现，这位老人在七年内竟然学到了那末多的东西。

——马克·吐温

有好几方面的原因促进了人们对于图论的兴趣。现在，时常可以听到关于图论在物理学、化学、通讯科学、计算机技术、电气和土木工程、建筑学、运筹学、生物遗传学、心理学、社会学、经济学、人类学和语言学等学科的某些领域内都有应用的议论。这个理论也与数学本身的许多其他分支密切有关，这些分支包括群论、矩阵论、数值分析、概率论、拓扑学和组合学等。事实上，图论为任何一个包含了一种二元关系的系统提供了一个数学模型；部分地，也因为使用了图解式的表示法，图就具有一种直观的和符合美学的外形。在这个领域内，虽然有许多结果在本质上是初等的，但其中也有大量的十分错综复杂的问题可以难住最老练的数学家。

自从密歇根大学数学系在1956年开设图论和组合论的正规课程以来，本书的蓝本已经用过几次。我们发现，从教育学的观点来看，不将所有定理的证明都写进去是有好处的。比起其他方案来，这种办法可以将更多的定理写进去。从而，本书可以作为因袭“莫尔(Moore)方法”传统的一种教材，即让学生去证明那些只有叙述而不加以证明的定理来培养他们的数学能力。然而要注意，某些略去的内容是既困难又冗长的。掌握了本书内容的读者将适

于继而进行专题研究和将图论应用到其他领域中去。

我们尽力以合乎逻辑的次序来提出图论的各项论题，也尽力指出历史的背景，并且用图形来说明概念和结果以使得解释明晰。此外，还有三个附录提供了图、有向图和树的图解。本书的重点始终在于定理而不在于算法和应用，然而偶而也提到它们。

各道习题的水平有着极大的差别。困难且思路曲折的习题其序号用黑体数字标出，而特别困难的习题则再加*号。希望读者对每一个习题都加以考虑，以便熟悉包含在其中的材料。在读者没有研读过某一章的内容之前，它的许多"比较容易"的习题也许会成为非常困难的。

我们告诫读者不要陷入第二章和它的大量习题中去，只要这一章就可以给大学一年级或中学高年级的学生用作图论的一个初级简明教程。教师可以从本书中选取材料来作为一个学期的图论课程，而全书则够一年之用。后面的某几章适合于作为高级讨论班的课题。由于阅读本书的前提实在仅仅是不可捉摸的所谓"数学上的成熟"，所以本书既可以作为大学毕业班的教材也可以作为研究生的教材。熟悉一点初等群论和矩阵论对于学习最后四章将会有所帮助。

F. H.

1968 年 7 月

目　　录

我讨厌寻章摘句。你知道什么就说什么!

——R·W·爱默生

第一章 发　　现!

我找到了!

——阿基米德

历史上,图论曾经被好多位数学家各自独立地建立过,因为图论本身就是应用数学的一部分*,所以这种情况并不是偶然的巧合。事实上,提到这个主题的文字记载最早是出现在欧拉(Euler)的著作中,虽然他所考虑的原始问题似乎是一个颇为无聊的难题,然而这个问题确实有其实际的背景。后来,克希霍夫(Kirchhoff)和凯莱(Cayley)在图论上的新发现也各自有其实际的根源。克希霍夫对于电网络的研究导致他发展了图论的基本概念和关于图中的树的定理;而凯莱则是为了计数有机化学中的同分异构物而考虑树。另外一个与图有关的难题是哈密顿(Hamilton)提出来的,它同样是促进了图论的发展。后来,著名的四色猜想出现了,并且至今一直作为一个解决不了的难题闻名于世。本世纪内,图论方面已经有了大量的新发现,在这个按年代排列的概论中我们只能作一个最简短的叙述。

1. 哥尼斯堡七桥问题

欧拉(1707~1782)在1736年解决了一个当时还没有解决的著名问题,称为*哥尼斯堡*(Königsberg)*七桥问题*,从而使他成了图论和拓扑学的创始人。有七条桥将普莱格尔(Pregel)河中的两个

* 西勒维斯脱(Sylvester)较早就指出了图论的基本的组合属性和它具有广泛应用的一些理由,他说:"分歧(ramification)的理论是一种纯学院式的理论,因为它不管大小和位置;它使用几何的线,但是,这种线比起用在家系表上表明生育关系的线来没有更具体的意义。"

岛及岛与河岸联结起来，如图1.1所示。问题是要从这四块陆地中的任何一块开始，通过每一条桥正好一次，再回到起点。很容易通过试验摸索去尝试解决这个问题，然而，任何尝试都决不可能成功，因为欧拉得到的重要结果指出：在这种情形下是不可能有解的，见参考文献[E5]。

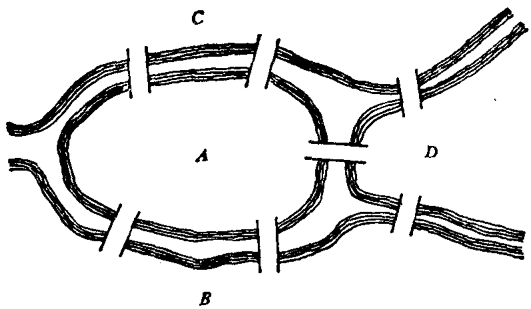

图1.1　哥尼斯堡的一个公园(参看文献[E5])。

为了证明这个问题没有解，欧拉将每一块陆地用一个点来代替，将每一条桥用联结相应的两个点的一条线来代替，从而得到了一个"图"。这个图*见图1.2，其中，各个点用与图1.1中的四块陆地相应的记号标出。证明这个问题没有解等价于证明图1.2中的图不能以某种方式走遍。

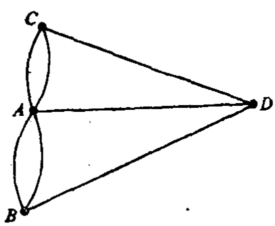

图1.2　哥尼斯堡七桥问题的图。

欧拉并不限于处理这种特殊情形，他推广了这个问题，并且对于一个给定的图可以如此走遍给出了一个判定法则；就是说，这个图必须是连通的，并且每个点都与偶数条线相关联。图1.2中的图虽然是连通的，但并不是每个点都与偶数条线相关联。

2. 电网络

克希霍夫[K7]在1847年为了解一类线性联立方程组而发展

* 实际上，如我们将在第二章中见到，这是一个"多重图"。

了树的理论。这个线性方程组是描述一个电网络的每一条支路中和环绕每一个回路的电流的。他虽然是一个物理学家，但他象数学家那样地思考问题。他把一个电网络和其中的电阻、电容、电感等等抽象化了。他用一个只由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络而并不指明每条线所代表的电气元件的种类。这样一来，克希霍夫实际上是把每个电网络用它的基本图来代替。他还证明，为了解这个方程组，并不需要分别考虑一个电网络的图中的每个圈。与此相反，他用一个简单而有力的构造法指出，只要考虑一个图的任何一个"生成树"所决定的那些独立圈就够了。他的这个方法现在已成为一个标准的方法。图 1.3 中画出了一个设计好了的电网络 N、它的基本图 G 和一个生成树 T。

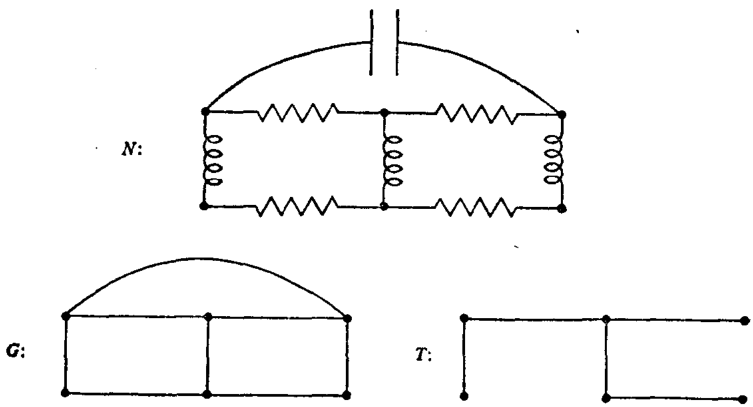

图 1.3　一个电网络 N，它的基本图 G 和它的一个生成树 T。

3. 化学同分异构物

1857 年，凯莱[C2]非常自然地在有机化学的领域里发现了一族重要的图，称为树。他从事于计数有给定的碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的同分异构物，如图 1.4 所示。

当然，凯莱抽象地重新叙述了这个问题：求有 p 个点的树的数目，其中每个点的度等于 1 或 4. 他没有能够立即成功地解决这个问题，所以他改换了这个问题，逐步计数了：有根树（其中有一个

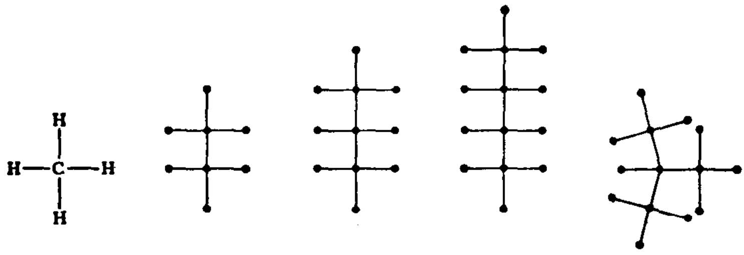

图 1.4　最小的饱和碳氢化合物。

点与其余各点有区别的树)、树、每个点的度至多等于4的树。最后,他还是数出了每个点的度等于1或4的树,从而解决了那个化学问题,见[C3]。后来,约当(Jordan)作为一个纯数学的对象独立地发现了树(1869)。西勒维斯脱写道(1882):约当这样做"一点也没有察觉到它与现代的化学学说有关,"见[K10, p. 48]。

4. 绕行世界

威廉·哈密顿爵士在1859年发明了一种游戏*。这种游戏用一个规则的实心十二面体,它的二十个顶点标以有名的城市的名字,要求游戏者找一条沿着各边通过每个顶点正好一次的闭回路,即"绕行世界"。哈密顿以25个金币的代价把他的设计卖给了一个玩具商。然而,这是一笔滑头生意,因为这个游戏在经济上并不成功。

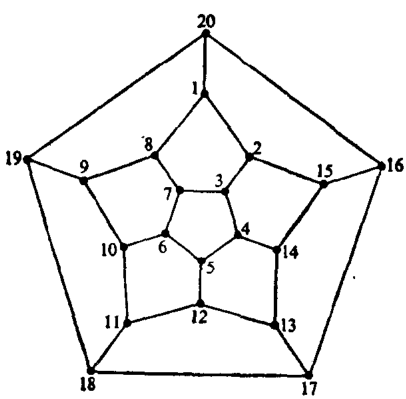

图 1.5　"绕行世界"。

用图的语言来说,游戏的目的是在十二面体的图中找一个生成圈。这个图画在图 1.5 中。图中的点记以 1, 2, …, 20(而不写阿姆斯特坦,安亚

* 更完整的叙述见鲍尔(Ball)和考克斯特(Coxeter)[BC1, p. 262]。

柏，柏林，布达佩斯，都柏林，爱丁堡，耶路撒冷，伦敦，墨尔本，莫斯科，新西伯利亚，纽约，巴黎，北京，布拉格，里约热内卢，罗马，旧金山，东京和华沙)，从而有一个生成圈就可以明显地看出来。

5. 四色猜想*

在图论中，也许是在全部数学中，最出名的没有解决的问题是著名的四色猜想。任何一个数学家可以在五分钟之内将这个非凡的问题向马路上的一个普通人讲清楚。在讲清楚以后，虽然两个人都懂得了这个问题，但是要解决它，可谁也无能为力。

下面这一段话引自梅(May)的总结性的历史文献[M5]，它叙述了四色猜想并且阐明了这个猜想所起的作用：

(这个猜想说)在一个平面或球面上的任何地图能够只用四种颜色来着色，使得没有两个相邻的国家有相同的颜色。每个国家必须由一个单连通域构成，而两个国家相邻是指它们有一段公共的边界线(而不仅仅只有一个公共点)。这个猜想在数学的一个称为组合拓扑学的分支中起了催化剂的作用。它也与当前流行的图论密切有关。半个多世纪以来，由许多(有人说是全部)数学家的工作，已对一些特殊情形作出了证明……。普遍的看法是：这个猜想是正确的，但是未必可以普遍地证明。看来，在一段时间内，它还是要作为一个最简单和最诱人的没有解决的数学问题而存在。

四色猜想有一段有趣的历史，但它的起源仍然有点模糊。有些报告说麦比乌斯(Möbius)在1840年就熟悉这个问题，但是，可以肯定的仅仅是这个问题约于1850年由格思里(Guthrie)转告给德·摩根(De Morgan)。1879年，肯普(Kempe)[K6]给出了这个猜想的许多个错误“证明”中的第一个“证明”。1890年，希伍德(Heawood)[H38]发现了它的一个错误。然而，希伍德指出，如果“四”换成“五”这个猜想就对了。最近，奥尔(Ore)和斯坦普尔

* 四色猜想已在1976年由美国的阿普尔(K. Appel)，黑肯(W. Hakan)和考齐(J. Koch)等三人依靠电子计算机的帮助作出了证明。可参考G. B. Kolata, The Four-color Conjecture: A Computer-aided Proof, *Science*, **193**(1976,8), No. 4253.

——译注

(Stemple) [OS1] 对于少于 40 个国家的所有地图证明了这个猜想，所以，假如一旦找到一个反例，它一定是极其庞大和复杂的。

每个地图可以导出一个图，其中国家(和外部区域)都是点，当相应的两个国家相邻时这两个点用一条线来联结，所以四色猜想是图论中的一个问题。由一个地图导出的图显然可以画在平面上而且没有相交的线。于是，如果可以将每一个可平面图的点用四种或更少的颜色来着色，使邻接的点有不同的颜色，四色猜想就证明了。

6. 二十世纪的图论

1936 年，心理学家莱温(Lewin) [L2] 提出，一个人的“生活空间”可以用一张平面地图来代表*。在这样一张地图中，各个区域代表一个人的各种活动，例如他的工作环境，他的家和他的嗜好。可以指出，莱温所处理的实际上是图，如在图 1.6 中所表明。这种观点使得集体活动研究中心 (Research Center for Group Dynamics) 的心理学家们提出了图的另外一种心理学解释，其中，人们用一些点来代表，而人与人之间的关系用线来代表，这些关系包括爱、恨、交往和支配。实际上，就是因为这种方法，著者在心理学家弗斯定格(L. Festinger)和卡特赖特(D. Cartwright)的帮助和鼓励下，才对图论有所独到的发现。

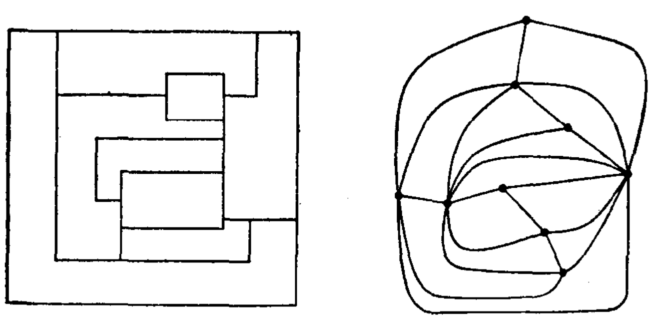

图 1.6 一个地图和与它相应的图。

* 莱温只用平面地图，因为他总是将他的图形画在平面上。

因为理论物理学研究的需要，所以在这个学科内不止一次地发现过图论。乌伦伯克(Uhlenbeck)[U1]在统计力学的研究中用点来代表分子，两个点的邻接表示存在某种物理形式的最邻近的相互作用，例如磁的吸力或斥力。在李政道和杨振宁[LY1]的类似解释中，点代表欧几里得空间的小立方体，其中每一个立方体可能被一个分子占有或者不被分子占有。于是，两个点邻接就表示两个空间都被占有。另外，物理学还用图论来作为一种图形的表示方法。在范曼(Feynmann)[F3]提出的图解中，点代表物理粒子，线代表粒子碰撞后的路线。

在概率论中的马尔可夫链的研究中(例如，见弗勒(Feller)[F2, p. 340])引进了有向图，它的意思是：点代表事件，一条从一个点到另外一个点的有向线表示这两个事件直接相继有正的概率。在书[HNC1, p. 371]中，直接定义一个马尔可夫链是一个网络，其中，从每一个点出发的所有有向线的值的和是1。有向图的一种类似的表示法出现在数值分析的矩阵求逆和特征值计算的部分中，瓦尔加(Varga)[V2, p. 48]给出了一些例子。对于一个给定的方阵，特别是"稀疏的"方阵，可以用如下的方式构成一个有向图。用点来代表给定的方阵的行与列的指标，当方阵的 i, j 元非零时有一条从点 i 到点 j 的有向线。马上就可以看出这种方法与处理马尔可夫链的方法的类似性。

线性规划与运筹学的各个飞速发展的领域里也以研究网络上的流的形式利用图论的方法。福特(Ford)和富尔克逊(Fulkerson)[FF2]，瓦达(Vajda)[V1]，贝尔热(Berge)和戈拉-霍里(Ghouila-Houri)[BG2]的书中都以这种方式包含图论。一个图的点表示某种货物可以储藏或装船的实际位置，从一处到另一处的一条有向线和记在这条线上的一个正数代表一条运输货物的水道和它的能力，这个能力给出可以同时通过的最大允许数量。

在纯粹数学中，图论在维布伦(Veblen)的关于拓扑学的先驱著作[V3, pp. 1～35]中就有研究。一个单纯复形(或简称为复形)被定义为由"点"的一个集 V 和预先给定的 V 的非空子集的一个

集 S 所构成，集 S 的元素称为"单形"，并且满足下列两个条件：

1. 每个点是一个单形。

2. 一个单形的每个非空子集也是一个单形。

一个单形的维数比其中的点的数目少 1；一个复形中维数最大的单形的维数称为这个复形的维数。用这种术语，一个图可以定义为维数等于 1 或 0 的一个复形。我们称一个 1-维单形为一条线。我们再注意到，一个复形是 0-维的当且仅当它只是由点的一个集所组成，而不包含线或其他维数更高的单形。除了这些"全不连通图"外，每一个图是一个 1-维复形。就是为了这个理由，为图论写的第一本书[K10]的副标题是"线复形的组合拓扑学"(Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe)。

正因为点与线这两个词的传统用法是作为几何结构的公理系统中不定义的名词，我们才选用了这种术语。当我们说到作为欧几里得空间的子集的"几何的"单纯复形时，与上面定义的抽象复形不同，我们将用顶点与边这两个词。第二章中，我们将要谈到术语问题以及图论的某些基本概念和初等定理。

第二章　图

叫什么名字
　　还不都是一样？
我们不管把玫瑰花
　　叫成什么，
它闻起来还是那么甜香。
——W·莎士比亚：《罗密欧与朱丽叶》

大多数图论学者在他们的书、论文和演讲中都使用各人自己的一套术语。为了在有关图论的讨论中避免歧义，最好是每人都预先说清楚他所使用的图论语言。甚至就是“图”这个词的意义也是不统一的。有的作者实际上将一个“图”定义为一个图*，而另一些作者则用它来指多重图、伪图、有向图或网络。我们相信，图论的术语是决不可能统一的，而且，也没有这个必要。

但是为了可以利用图论的基本概念和术语，还必须下许许多多的定义。此外，我们还要初步介绍完全子图、极图理论(它探讨有禁用子图的图)、交图(其中点代表集，而非空的交决定邻接性)和图的一些有用的运算。

1. 图簇

在定义一个图之前，我们在图 2.1 中画出有四个点的全部 11 个图。我们就会看到：

i）每个有四个点的图与其中的一个图同构；

ii）虚线左边的五个图是不连通的；

---

* 最常见的习用的开头是：“本文中我们仅考虑有限、没有环和多重边的无向图”。

iii）虚线右边的六个图是连通的；

iv）最后一个图是完全图；

v）第一个图是全不连通的；

vi）第一个有四条线的图是一个圈；

vii）第一个有三条线的图是一条道路。

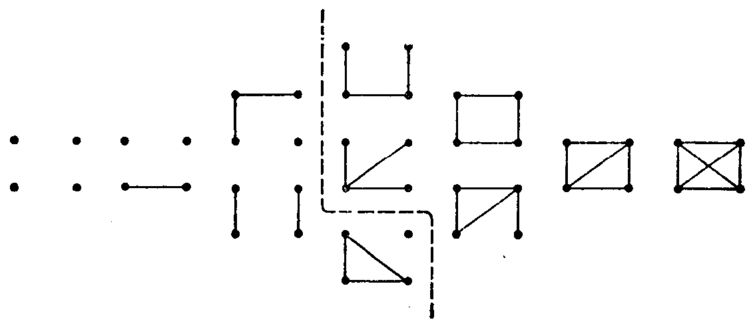

图 2.1 有四个点的图。

下面我们要一个接一个，不厌其烦地对一些基本概念下定义，但不再对这些概念的引伸继续作直观的发展。一个图 G 是由有 p 个点*的非空有限集 $V=V(G)$和预先给定由 V 中不同的点的 q 个无序对构成的一个集 X 组成。X 中的每个点对 $x=\{u, v\}$称作 G 的一条线*，又称 x 是联结 u 和 v 的。我们记 $x=uv$，且称 u 和 v 是邻接的点（有时记作 u adj v）；点 u 与线 x 是互相关联的，v 与 x 也关联。若两条不同的线 x 和 y 与一个公共的点关联，则称 x 与 y 是邻接的线。一个有 p 个点与 q 条线的图称为一个(p, q)图。(1, 0)图是平凡的。

习惯上用一个图解来代表一个图，并且将它看作就是这个图。于是，在图 2.2 中的图 G 中，点 u 与点 v 是邻接的，而 u 与 w 不邻接；线 x 和 y 是邻接的，而 x 与 z 不邻接。虽然线 x 和 z 在图解中

---

* 下表的横行中给出曾在文献中出现过的同义词，但并不总是按照所列的上下次序配对：

point, vertex, node, junction, 0-simplex, element;

line, edge, arc, branch, 1-simplex, element.