高等学校试用教材

高等数学

下册

黄正中编

人民教育出版社

51.512
540
Z:2

高等学校试用教材

高 等 数 学

下 册

黄正中编

ZK599/29

中国科学院
化工冶金研究所图书

人民教育出版社

内容简介

本书是在 1961 年出版的《高等数学》基础上修订再版的. 此第二版分上、下两册. 上册内容包括函数与极限, 一元函数的微积分, 无穷级数, 空间解析几何等.

本书为下册, 内容包括多元函数微积分学, 曲线、曲面积分, 矢量分析, 一阶和高阶常微分方程, 一阶偏微分方程, 行列式和矩阵, 线性方程组和矢量空间, 矩阵代数及线性映射, 欧儿里得空间、酉空间及二次型, 此外还有一个附录: 一般方阵的若当法式. 可供综合大学和师范院校物理类专业高等数学课作为试用教材或教学参考用书.

高等数学

下册

黄正中编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

邯郸地区印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张15 12/16 字数378,000

1961年7月第1版

1978年9月第2版 1979年3月第4次印刷

印数56,000—211,000

书号 13012·0203 定价 1.15 元

下册目录

第七章　多元函数的微分学

34566

第八章 重 积 分

第九章 曲线积分·曲面积分

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第十章　矢量分析

第十一章　反常积分

第十二章　一阶常微分方程

第十三章　高阶常微分方程

第十四章　一阶偏微分方程

第十五章　行列式和矩阵

第十六章　线性方程组·矢量空间

第十七章 矩阵代数·线性变换

第十八章 欧几里德空间·酉空间·二次型

附录：一般方阵的若当法式

第七章 多元函数的微分学

§69. 二元函数的极限和连续性

本章研究两个以上变量的函数. 为了便于理解, 先讨论两个自变量的函数(二元函数)

$$z=f(x,y),$$

然后把它的若干性质推广到多个自变量的函数(多元函数). 在平面上引进直角坐标后,读者容易看出,两个不等式

$$|x-x_0|<a, \qquad |y-y_0|<b$$

表示一个矩形的内部, 矩形的四边不在内,称为**开矩形域**,(x_0,y_0)是它的对称中心. 同样,不等式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<a$$

表示一个圆的内部, 中心在(x_0,y_0), 半径等于a,边界也不包含在内,我们称它为**开圆形域**. 若把边界也包含在内,则**闭矩形域**应该表示为

$$|x-x_0|\leqslant a, \qquad |y-y_0|\leqslant b;$$

闭圆形域应该表示为

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\leqslant a.$$

显然, 固定以(x_0,y_0)为中心, 每一个开圆形域包含无数多个闭矩形域;同样,每一个开矩形域包含无数多个闭圆形域,如图 7-1.

A表示平面上一些点的集合, 简称为**点集**. 若P为属于A的一点, 则写作$P\in A$. 若点集B的点全属于点集A, 则写作$B\subset A$. 因此, 若$A\subset B, B\subset A$同时成立, 必然有$A=B$, 或者说: $A\subset B$,

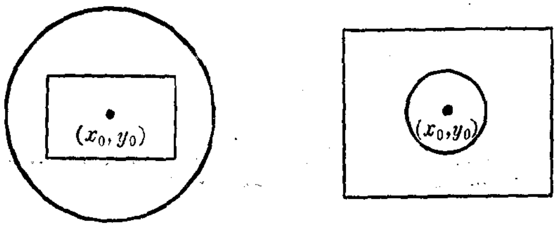

图 7-1

$B \subset A \Longrightarrow B = A$.

今后把以 P_0 为中心，r 为半径的开圆形域记作$B(P_0;r)$. 平面上任意给定一个点集 M，P_0 为M中一点，若存在一个正数 $r>0$，使圆形域 $B(P_0;r)\subset M$，便说 P_0 是M的**内点**. 若M中每一点都是它的内点，便说M是一个**开集**. 请读者自己验证，开矩形域和开圆形域都是平面上的开集. 平面上任何包含 P_0 作为内点的点集称为 P_0 的**邻域**. 若一点的邻域本身是开集，便称这邻域为**开邻域**. 请读者自己验证下列事实：

1. 若 V_1 与 V_2 都是点 P_0 的邻域，则 V_1 与 V_2 的一切公共点的集合(记作 $V_1 \cap V_2$)也是 P_0 的邻域；

2. 若 V_1 是 P_0 的邻域，$V_1 \subset V_2$，则点集 V_2 也是 P_0 的邻域；

3. 若 P, Q 为平面上两个不同的点，则 P，Q 分别有邻域 U，V，使 U 与 V 没有一点公共(简记作 $U \cap V = \phi$).

若平面上的点集M具有性质：只要两点 P, Q 都属于M，则一定有一条连续的曲线[①] C 连接 P, Q，并且 C 上的点全部属于 M，便说M是连通的.

平面上连通的开集称为**开域**，或简称为**域**. 显然开矩形域和开圆形域都是连通的，因此都是域.

给定平面上一个点集M，若一点 P_0 具有性质：不管正数 r 取

① 连续的曲线是指用方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 代表的曲线，其中 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$，$\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 均为 t 的连续函数.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

得如何小，圆形域 $B(P_0;r)$ 内总有属于 M 的点，也有不属于 M 的点，便说 P_0 是 M 的**边界点**. M 的一切边界点的集合称为 M 的**边界**. 开域连同它的一切边界点所成集合称为**闭域**.

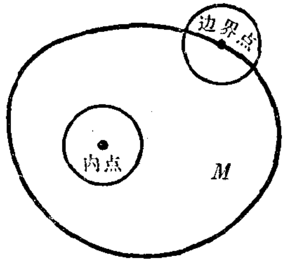

图 7-2

若点集 M 的任何两个点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 间的距离

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

不超过某一定数 K，便说这点集 M 是有界的. 有界域添上其边界成为闭域后，其中相隔的最远两点间的距离称为此域的**直径**.

设对应于域 G 内的每一点 P，变量 z 都有一个确定的值，便说 z 是域 G 上点的函数，或说函数 z 是定义在域 G 上，它可表示为

$$z=f(P).$$

倘用 (x,y) 表示点 P 的坐标，则此函数又可表示为

$$z=f(x,y).$$

这函数关系有两个不同的直观解释：(1)若把 z 当作是实数轴上一点，则函数 f 实际上是域 G 到此实数轴内的映射；(2)若把 xy 平面认作是空间直角坐标系的坐标平面，则域 G 中每一点 (x,y) 对应于空间一点 $(x,y,f(x,y))$，空间这些点组成一曲面，其方程为

$$z=f(x,y).$$

这曲面称为函数 f 的图. 此曲面在 xy 平面上的射影便是域 G.

例如，在正方形 G: $0\leqslant x\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$, $0\leqslant y\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$ 上定义的函数

$$z=+\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

在空间的图便是上半球面(图 7-3)：

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ (z>0)$$

的一部分，这部分在 xy 平面上的投影就是正方形 G.

现假定 $z=f(x,y)$ 是定义在某个域 G 上的函数，点 (a,b) 是域 G 内部或边界上一点. 如果有一数 l 具有这样的性质：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，不论如何小，总能相应地找到 $\delta>0$，对 G 内任何点 (x,y)，只要它满足条件

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta,$$

即有 $$|f(x,y)-l|<\varepsilon,$$

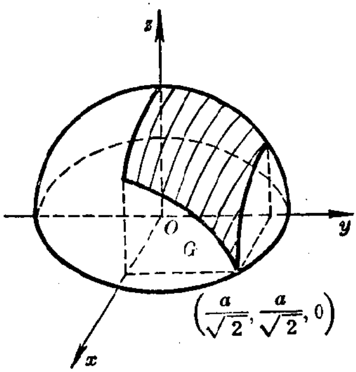

图 7-3

便说点 $(x,y)\to(a,b)$ 时（或说 $x\to a$, $y\to b$ 时），函数 $f(x,y)$ 的极限值为 l，此事实常写作

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=l, \tag{1}$$

这定义的条件内已经包括：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总有相应的 $\delta>0$，使 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$|f(x,b)-l|<\varepsilon,$$

因此 $$\lim_{x\to a} f(x,b)=l,$$

同样 $$\lim_{y\to b} f(a,y)=l.$$

因此从(1)可以推知：点 (x,y) 沿直线 $y=b$ 趋近于 (a,b)，或沿直线 $x=a$ 趋近于 (a,b) 时，$f(x,y)$ 的极限都是 l. 非但如此，点 (x,y) 沿 G 内任何曲线趋近于 (a,b) 时，$f(x,y)$ 的极限值都是 l. 读者注意，尽管

$$\lim_{x\to a} f(x,b)=l=\lim_{y\to b} f(a,y),$$

但这并不保证 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$ 存在. 因为无论直线 $x=a$ 和直线 $y=b$，它都只代表一条到达 (a,b) 的**特殊路线**. 当点 (x,y) 沿这两条特殊路线趋向于 (a,b) 时，$f(x,y)$ 以 l 为极限；没有理由说，点 (x,y) 以

任何方式趋近于(a,b)时，$f(x,y)$都有同样的极限.

在特殊情况，点(a,b)属于$f(x,y)$的定义域G，若$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$存在，且这极限值恰好是$f(a,b)$时，便说$f(x,y)$在点$(a,b)$**连续**. 因而$f(x,y)$在点$(a,b)$连续的条件是**对于任意给定的$\varepsilon>0$，总有相应的$\delta>0$，只要定义域$G$内的点$(x,y)$满足条件**

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta,$$

便有
$$|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon.$$

把f当作域G到实数轴R上的映射，则满足不等式

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

的一切点(x,y)形成点(a,b)在G中的一个邻域；由不等式

$$|u-f(a,b)|<\varepsilon$$

定义的一切点u形成点$f(a,b)$在R内的一个邻域；连续性的定义又可按现行术语改写如下：

设f是xy平面上的域G到实数轴R中的一个映射，

$$f:\qquad G\longrightarrow R;\qquad (x,y)\longrightarrow u=f(x,y),$$

它使点$(a,b)\in G$变为$f(a,b)\in R$. 若f具有性质：给定$f(a,b)$在R中任何一个邻域W（例如$f(a,b)-\varepsilon<u<f(a,b)+\varepsilon$（图 7-4）），总存在$(a,b)$在$G$中的一个邻域$V$：$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$，只要$(x,y)\in V$，则$f(x,y)\in W$，便说映射$f$在点$(a,b)$是连续的.

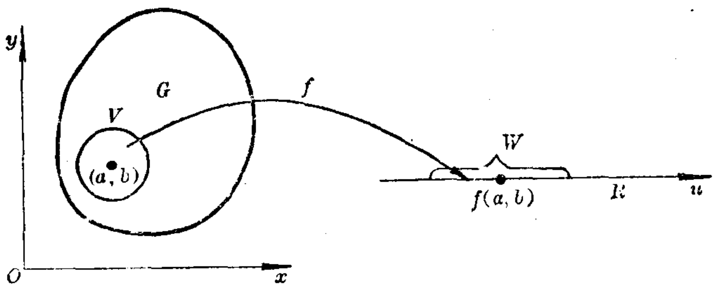

图 7-4

若把二元函数 $f(x,y)$ 认作是两个变量 x，y 的函数，它在点 (a,b) 是连续的，则一元函数 $f(x,b)$ 在 $x=a$ 和 $f(a,y)$ 在 $y=b$ 也都是连续的．事实上，上述条件已经包括：给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $|x-a|<\delta$，便有

$$|f(x,b)-f(a,b)|<\varepsilon,$$

又只要 $|y-b|<\delta$，便有

$$|f(a,y)-f(a,b)|<\varepsilon.$$

例 1.　$f(x,y)\equiv\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 没有极限值．

事实上，当点 (x,y) 沿直线 $x=\rho\cos\lambda$，$y=\rho\sin\lambda$ 趋近于 $(0,0)$ 时，$\rho>0$，且

$$f(\rho\cos\lambda,\rho\sin\lambda)=\frac{\rho^2\sin\lambda\cos\lambda}{\rho^2(\cos^2\lambda+\sin^2\lambda)}=\cos\lambda\sin\lambda,$$

因而
$$\lim_{\rho\to+0}f(\rho\cos\lambda,\rho\sin\lambda)=\cos\lambda\sin\lambda.$$

此极限值与直线 $x=\rho\cos\lambda$，$y=\rho\sin\lambda$ 的方向角 λ 有关，故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，无论定义 $f(0,0)$ 之值为何，$f(x,y)$ 不可能在点 $(0,0)$ 连续．

例 2.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{当}(x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{当}(x,y)=(0,0).\end{cases}$$

求证这函数在 $(0,0)$ 连续．

证．命　$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,(0<\theta<2\pi)$，

则
$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho(\cos^3\theta+\sin^3\theta),$$
$$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)-f(0,0)|<2\rho.$$

给定 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho<\delta$ 时，便有

$$|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon.$$

因此，$f(x,y)$在原点连续.

类似于一元函数，连续的二元函数 $f(x,y)$也有下述性质:

(1) 有界闭域上的连续函数一定是有界的;

(2) 有界闭域上的连续函数一定在某点取它的最大值，在另一点取它的最小值，并取最大值和最小值中间的任何值至少一次;

(3) 有界闭域G上的连续函数一定是一致连续的，换句话说，给定 $\varepsilon>0$，总能找到一个公共的$\delta>0$，只要 G 内任何两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)满足条件

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta,$$

便有
$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

值得注意的是这里要求 δ 只依赖于 ε，而不依赖于两点(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 在域G内的位置，也就是说，它对域G内任何一对点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)都适用.

习 题 四 十 八

1. 计算下列函数在指定点的值.

(1) $x^2+y^2-3x^2y$ 在 $(1,2)$;

(2) $\operatorname{tg}\pi(2x+3y)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{9}\right)$;

(3) $x+ye^{x-y}$ 在 $(2,1)$;

(4) $\dfrac{4x^2-5y\ln x}{x+y}$ 在 $(e^2,1)$.

2. 指出上列函数(1)、(2)、(3)、(4)在 xy 平面上没有定义之点.

3. 用 ε-δ 语言说明: 若 $f(x,y)$与 $g(x,y)$在点(a,b)是连续的，则

$$f(x,y)\pm g(x,y) \quad 与 \quad f(x,y)\cdot g(x,y)$$

在(a,b)都是连续的. 假定 $g(a,b)\neq 0$，则商$\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$在(a,b)也是连续的.

由此推知: 第1题(1)，(3)，(4)中所给函数，在有定义的点上都是连续的.

4. 用映射和邻域概念说明下列事实:

设函数 $u=f(x,y)$ 与 $v=g(x,y)$ 定义在 xy 平面的域 G 上,相应的函数值 u, v 落在 (u, v) 平面的域 H 上, $\phi(u, v)$ 是定义在域 H 上的一个函数. 只要 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 是域 G 上的连续函数, $\phi(u, v)$ 是域 H 上的连续函数, 则 $\phi[f(x,y), g(x,y)]$ 必然是域 G 上的连续函数.

所以第 1 题(3)中的函数,在有定义的点上也是连续的.

5. 指出下列函数的定义域;在定义域的边界上,函数是否有极限值?

(a) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (b) $u=\dfrac{x+y}{x-y}$;

(c) $u=\ln(1-x^2-y^2)$; (d) $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

6. 已知 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在,

可是 $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\}=1$; $\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\}=-1$.

7. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left\{\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}$ 不存在.

§70. 偏微商的定义

设在 xy 平面的某域 G 上, $z=f(x,y)$ 是两个独立变量 x 和 y 的连续函数. 令 y 取常数值 y_0, 考虑一个变数 x 的函数

$$z=f(x, y_0),$$

设此函数在点 $x=x_0$ 具有微商,即极限值

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在,我们称它为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 对变量 x 的偏微商, 并记作

$$f_x(x_0, y_0), \text{或} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \text{或} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

当 x_0 和 y_0 变动时, 一般说 $f_x(x_0, y_0)$ 之值也随着变动, 换句话说,它是变量 x 和 y 的函数,此函数称为 $f(x,y)$ 对变量 x 的偏微

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com