高等学校教学用书

工程数学
数学物理方程

潘祖梁 陈仲慈
陈士良 姚文苏 编

浙江大学出版社

前　言

数学物理方程是研究具有物理背景的偏微分方程(组)，它在自然科学、工程技术中有着广泛的应用。近十几年来，随着科学技术的发展和教学内容的更新，工科院校中有更多的专业开设了《数理方程》这门课程，有的专业对本课程的要求比以前有所提高，由于这种需要，我们编写了这本教材。为了使它适应的专业面广一些，使用时对内容的取舍更灵活些，本教材在广度和深度上比部颁大纲规定的要求有所加强。我们把阐述基本概念，基本原理，解定解问题的基本方法与技巧作为重点，而不过份追求数学理论的严密性，完备性，因而它又不同于数学(理科)专业的教材。我们希望本书能适应数学专业以外各理、工专业的不同要求，使用时各专业可以根据自己的需要对内容进行取舍。

我们知道不同物理现象往往归结为不同类型的方程，而它的基本理论和定解问题都与方程类型分不开的，因此我们按方程的类型讲述各种定解问题和它的解题技巧，而不同于一般工程数学的数理方程讲法。这样也便于学生掌握各种典型方程求解方法，并将它推广到较为一般的同类方程。

本书第一章是方程的导出与定解问题，从实际的物理问题出发，介绍如何用微元分析法建立数学模型——偏微分方程及定解条件。鉴于变分原理的广泛应用，在§1.3中扼要地介绍了Hamilton 原理及其在经典方程推导中的应用。第二章是波动方程，重点介绍了分离变量法及非齐次方程，非齐次边界条件的

处理，对于波动方程的Cauchy问题，介绍了行波法，降维法。第三章是热传导方程，重点介绍积分变换法，以Fourier变换为主。第四章是柱函数与球函数，介绍这两类特殊函数的由来、基本性质，以便将分离变量法推广到高维空间。第五章是调和方程，重点介绍Green函数法，同时讨论调和函数的基本性质及边值问题的分离变量法。第六章介绍二阶线性方程的分类，定解问题的适定性，分离变量法的理论基础。第七章介绍一阶偏微分方程组的特征理论，分类及狭义双曲组Cauchy问题的特征线解法。附录中列出了有关的数表及公式，便于读者查阅。

本书承蒙国家教委高等学校工科高等数学教材编审委员会委员周茂清教授审阅，周茂清教授和郭竹瑞教授对本书出版给予大力帮助，出版社的贾吉柱同志及教研室许多老师对书稿也提出了不少宝贵意见，在此一并表示谢意！

参加本书编写工作的有潘祖梁（第一、四、七章），陈仲慈（第五、六章），陈士良（第二章），姚文苏（第三章），最后由陈仲慈、潘祖梁承担了全书的统稿工作。

在编写时我们力求深入浅出，通俗易懂，但由于我们水平有限，书中定有不少缺点，我们殷切期待读者和同行们的批评指正。

编者　　1987年2月

目　　录

第一章　数学物理方程的导出和定解问题

在这一章里，我们将通过弦振动、膜振动、热传导等物理模型，说明如何从实际问题导出数学物理方程，并相应地提出定解条件和定解问题等概念。它们将是本课程所介绍的理论与方法的主要研究对象。

§1.1　数理方程的导出

常微分方程中的未知函数都是单元函数，如质点的位移、电路中电流、电压等物理量均是时间 t 的函数，这些物理量的变化规律在数学上的表示就是常微分方程。如挂在弹簧上的物体在重力和弹性恢复力的作用下，其运动方程为

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{a}s=g,$$

这里 a 和 g 都是已知的常数，$s=s(t)$是未知函数，表示 t 时刻物体离开平衡位置的位移。

但在科学研究及工程技术中还有许多物理量不仅与时间 t 有关，还与空间的位置(x,y,z)有关。如声波在介质中的传播，电磁波的电场强度和磁感应强度随空间和时间的变化，物体内的温度分布等。研究这些物理量的变化规律时，就会得到含有

未知函数及其偏导数的关系式，即偏微分方程，又称**数学物理方程**。下面我们以几个典型方程的推导为例，说明如何从实际的研究对象出发，抓住主要因素，利用已知的物理定律，建立起偏微分方程。

例1 弦的微小横振动

弓在乐器的弦上来回拉动时，接触的只是一小段。但弦是拉紧的，各小段之间有拉力，即张力。若弦是柔软的，则张力沿着切线方向作用。在张力的作用下，一小段弦的振动就会引起邻近小段的振动，这种振动的传播现象称为**波**。现在来研究弦的微小横振动，如图1-1所示。

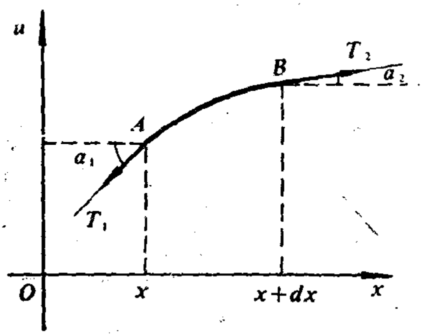

图1-1

取弦的平衡位置为 x 轴。所谓横振动指弦上各点的振动发生在同一平面内，且与 x 轴垂直。$u=u(x,t)$ 表示横坐标为 x 的点在 t 时刻离开平衡位置的位移。我们取弦上的任一小段 AB 来分析。因 dx 很小，AB 段的重量与所受的张力相比可忽略不计。AB 段无纵向（x 轴方向）运动，故有

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0. \qquad (1.1)$$

考虑的是微小的横振动，不妨认为在振动过程中，每一小段的弦几乎没有伸长，即 $ds\approx dx$。而 $ds=\sqrt{1+u_x^2}dx$，可见在微小横振动的情况下，$|u_x|$ 与 1 相比，可忽略不计。且不妨认为 $\alpha_1\approx 0$，$\alpha_2\approx 0$，$\cos\alpha_1\approx 1$，$\cos\alpha_2\approx 1$，$\sin\alpha_1\approx \mathrm{tg}\alpha_1 = u_x|_x$，

$\sin\alpha_2 \approx \mathrm{tg}\,\alpha_2 = u_x|_{x+\Delta x}$。由牛顿第二定律，得横向的运动方程：

$$T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1 = (\rho\Delta x)u_{tt}, \qquad (1.2)$$

其中 ρ 为线密度。由(1.1)得 $T_1 = T_2$，前已假定 $ds \approx dx$，由虎克定律知张力T与时间 t 无关，故张力T为常数，记为 T_0。对(1.2)用微分中值定理，令$\Delta x \to 0$，得

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt},$$

记$a^2 = T_0/\rho$，就有弦的微小横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1.3)$$

其中空间变量只出现 x，该方程又称为**一维波动方程**。

若弦在振动过程中还受到外力作用，且作用在单位长度弦上的横向力为$F(x, t)$，则在(1.2)左边加上一项 $F(x, t)dx$，得

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \qquad (1.4)$$

其中$f(x, t) = F(x, t)/\rho$，称为**弦的强迫振动方程**。

例2 膜的微小横振动

与例 1 的情形类似，我们假设膜是柔软且有弹性的，膜的重量远比膜的张力为小，膜的位移任一处的切线斜率与 1 相比可忽略不计。若取膜的平衡位置为xoy平面（见图1-2），我们只考虑膜的横向（u 轴方向）的微小横振动。在这些条件下，膜上各点所受的张力为常数，记单位长度所受的张力为T。

设 t 时刻，膜上(x, y)处的位移是 $u = u(x, y, t)$。在膜上任取一小片ΔS，分析它在横向的受力情况。如图 1-2知，ΔS边缘 $\overset{\frown}{CD}$ 受邻近膜的张力是$T\Delta x$，张力的方向落在曲面的切平

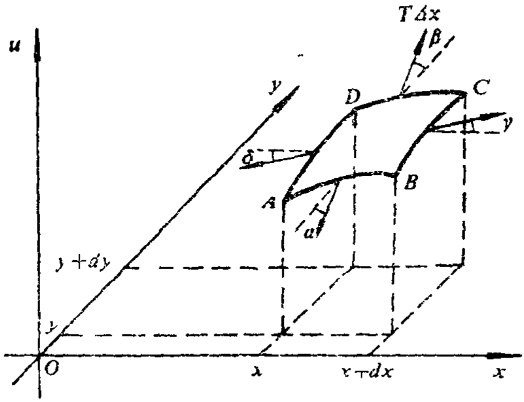

图1 2

面上且与$\overset{\frown}{CD}$的切线垂直，张力与 y 轴正向的夹角为 β. 则沿$\overset{\frown}{CD}$所受张力在 u 方向的分力为 $T\Delta x\sin\beta$, 对其他边缘所受的张力可类似地分析，故ΔS上所受张力沿 u 方向的分力为：

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha - T\Delta y\sin\delta + T\Delta y\sin\gamma,$$

因为是小振动，故有

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = u_y(x_1,\ y),$$

$$\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta = u_y(x_2,\ y+\Delta y),$$

$$\sin\delta \approx \operatorname{tg}\delta = u_x(x,\ y_1),$$

$$\sin\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = u_x(x+\Delta x,\ y_2),$$

其中x_1及$x_2 \in (x,\ x+\Delta x)$, y_1及$y_2 \in (y,\ y+\Delta y)$.

由牛顿第二定律，得横向的运动方程为：

$$T\Delta x[u_y(x_2, y+\Delta y) - u_y(x_1, y)]$$

$$+ T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_2) - u_x(x, y_1)] = \rho\Delta x\Delta y u_{tt},$$

其中 ρ 为面密度，当膜均匀时，ρ 为常数。将上式除以$\rho\Delta x\Delta y$,

利用中值定理，令Δx，$\Delta y\to 0$，记$a^2=T/\rho$，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right], \tag{1.5}$$

即 $$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),$$

称为**二维波动方程**。若膜还受到横向外力作用，且设单位面积所受的外力为$F(x, y, t)$，则得膜的受迫振动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t), \tag{1.6}$$

其中$f(x,y,t)=F(x,y,t)/\rho$，称为**方程的自由项**（或非齐次项）。若考察声波或电磁波在空间传播时，我们就会得到三维的波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x,y,z,t), \tag{1.7}$$

或 $$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})。 \tag{1.8}$$

若记 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\nabla^2 u=\Delta u$，这里$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$称为 Laplace 算子。则一般的波动方程为

$$u_{tt}=a^2\nabla^2 u+f(P,t), \tag{1.9}$$

其中 P表示区域内任一点的坐标(x,y,z)。

例3 热传导方程

混凝土在冷却过程中会产生温度应力，应力过大就会产生裂缝，为防止裂缝就要计算温度应力的分布情况。通过确定温度场，得到温度梯度，从而算出温度应力。工程技术上还有不少传热问题都归结为研究物体的温度分布。下面我们根据热传导的Fourier定律和热量守恒定律来推导温度$u(x,y,z,t)$所满足的偏微分方程。在物体内任取一面元ΔS，其法线方向记为$\mathbf{n}$，

指向温度升高的方向，如图1-3。由热传导的 Fourier 定律，在Δt内流经ΔS的热量为

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta S\Delta t,$$

其中 k 是(x,y,z)处的热传导系数。设物体均匀且各向同性，这时 k 为正的常数。等式右边的负号表示热流的方向与温度梯度方向相反，因为热流总是由温度高的一侧流向温度低的一侧。

在物体 G 中任意划出一个封闭曲面 S， S 的外法线方向为$\mathbf{n}$，则从t_1到t_2时间内流入的热量为

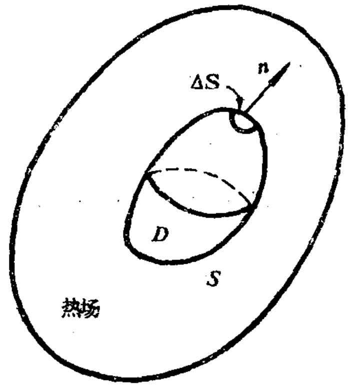

图1-3

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left(\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS\right)dt.$$

记 S 所围的区域为 D， P 表示 D 内任一点的坐标(x,y,z)，则在同一时间内，D 内升高温度所需的热量为

$$Q_2 = \iiint_D c\rho[u(P,t_2) - u(P,t_1)]dV$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c\rho u_t dVdt,$$

其中 c 是比热， ρ 是体密度，当物体均匀时，它们均为常数。若物体内没有热源或热汇，由热量守恒定律得

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dSdt = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_D c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dVdt, \qquad (1.10)$$

对右边的面积分用奥氏公式，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\iiint\limits_D\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u\right)dV\right]dt=0.$$

由于时间区间$[t_1,t_2]$及区域D是任意取的，所以有

$$u_t=a^2\Delta u, \tag{1.11}$$

其中$a^2=k/c\rho$，上式称为**三维的热传导方程**。若D内有热源，设热源密度即单位时间内，单位体积发出的热量为$F(x,y,z,t)$，则在(1.10)左边应加上一项，记$f(x,y,z,t)=F(x,y,z,t)/c\rho$，得

$$u_t=a^2\Delta u+f(x,y,z,t), \tag{1.12}$$

式(1.11)及(1.12)统称为**热传导方程**。在无热源的热传导问题中，经过相当长时间以后，各点的温度随时间的推移而趋于稳定，称为温度分布趋于稳恒状态，这时 $u_t=0$，方程为

$$\Delta u=0, \tag{1.13}$$

上式称为**Laplace方程**。类似地若热源与时间 t 无关，且温度分布达到稳恒状态时，就有

$$\Delta u=f(x,y,z), \tag{1.14}$$

上式称为**Poisson方程**。如果我们考虑一条长为 l 的细杆，侧面绝热，这时$u=u(x,t)$，$u_y=u_z=0$，得一维的热传导方程

$$u_t=a^2u_{xx}, \tag{1.15}$$

或

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t). \tag{1.16}$$

从上述的几个例子看出，推导数理方程实质上就是找物理规律的数学表示。与推导常微分方程类似，要建立适当的坐标

系，明确哪一些是自变量，哪一个是因变量，即我们所研究的物理量 u。然后从所研究的系统中划出任意一小块，根据物理定律，着重分析这一小块与邻近小块之间的相互作用（抓住主要作用，略去次要因素），以及这种相互作用怎样在一个短时间内影响物理量 u，把这种影响用式子表示出来，经整理、化简就可得到数理方程。这也就是通常所说的建立数学模型（不限于数理方程一种形式）的工作。当然建立数理方程的途径不只这里介绍的一种。例如，弦的微小横振动可以看成一个变分问题，利用力学上的Hamilton 原理导出与(1.4)一样的方程。这种途径将在§1.3中介绍。

应当强调指出，虽然我们这里只对几个具体的物理问题推导出方程(1.4)，(1.6)，(1.12)，及(1.14)，但这些方程所反映的物理规律决不限于这几个具体问题，它们具有广泛的代表性。例如物质扩散时浓度的变化规律，长海峡的潮汐波的运动，土壤力学中的渗透方程等都具有热传导方程的形式。稳定的浓度分布，静电场的电位，流体的势及弹性理论中的调和位势等均满足Laplace方程；空间中的声波，导体中的电磁波及杆的扭转等均满足波动方程。总之，许多不同物理过程的变化规律，可以用同一数理方程来描述。这就使得我们能够抓住几个基本的方程进行深入的讨论，而所得的结果可以作不同的物理解释。

偏微分方程的一般形式为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, \cdots, u_{x_1x_2}, \cdots) = 0, \qquad (1.17)$$

其中 $u = u(x_1, \cdots, x_n)$ 是未知函数，F 为其变元的已知函数。方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为**方程的阶**。若 F 对 u 及其各阶偏导数来说是线性函数，则称该方程是**线性方**

程。

n个自变量二阶线性方程的一般形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \qquad (1.18)$$

其中a_{ij}，b_i，c，f均为区域$G\in \mathbb{R}^n$中的已知函数。在线性方程中，不带u及其偏导数的项称为**自由项**。如(1.18)中的$f=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。若$f\equiv 0$，方程(1.18)称为**线性齐次方程**，否则称为**线性非齐次方程**。若u及其各阶偏导数的系数均是常数，称为**常系数的线性方程**。如(1.18)，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$b_i=(i=1,2,\cdots,n)$，c均为常数时便是常系数方程。这样前面导出的几个典型方程：

波动方程 $u_{tt}=a^2\Delta u$，

或 $u_{tt}=a^2\Delta u+f$。

热传导方程

$u_t=a^2\Delta u$，

或 $u_t=a^2\Delta u+f$。

调和方程

$\Delta u=0$，（Laplace方程）

或 $\Delta u=f$。（Poisson方程）

它们都是二阶线性常系数方程。

若给出一个函数$u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，将它及其各阶偏导数代入(1.17)，使其在$\mathbb{R}^n$中的某一区域G内成为自变量的恒等式，则称$u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(1.17)的**解**。为区别近代发展起来的广义解的概念，我们把这种解称为**经典解**。若研究的物理模型中未知函数不只一个，它们应满足的关系式也不只一个，这样就得到所谓偏微分方程组。对于偏微分方程组，类似

有阶，齐次、非齐次，线性、非线性等概念，详见第七章。本书主要讨论二阶线性偏微分方程和一阶线性偏微组。

不同的方程，描述的物理规律不一样。如热传导是不可逆的，而声波的传播是可逆的。可以想象，方程解的性质也有很大差别。为反映这种差别和进行系统研究的需要，在数学上将方程及方程组进行分类。第六章将讨论二阶线性方程的分类，第七章讨论一阶偏微组的分类。我们将会看到波动方程，热传导方程及Laplace方程分别是双曲型，抛物型及椭圆型方程的典型代表。

§1.2 定解条件和定解问题

在常微分方程中，要确定一个具体的运动规律，除方程之外，还要加上一些附加条件，构成所谓初值问题或边值问题。对于偏微分方程也是如此。方程是反映某一类物理过程的共同规律。实际中提出的物理模型都有特定的"环境"和"起始状态"。如弦的微小横振动，两端固定和一端固定，另一端按已知规律在振动，这二种不同"环境"下所对应过来的振动规律 $u(x,t)$ 显然是不一样的。同样的弦，用薄的刀背敲一下，使它振动发出的声音就刺耳。而用手指弹拨使之振动发出声音就和谐，这种特定"环境"和"初始状态"的数学表示就是**"边界条件"**和**"初始条件"**。

先看边界条件，以细杆的热传导为例。设细杆的长度为 l，侧面绝热，内部没有热源，这时杆内的温度分布 $u(x, t)$ 满足一维热传导方程(1.15)。在区域的边界（现在是 $x=0, x=l$ 二个端点）上，$u(x, t)$ 所应满足的物理条件通常有下列三种：

(1) 杆在 $x=0$ 处保持与介质一样的温度 u_0，在 $x=l$ 处保持

与另一种介质一样的温度u_1，这样的“环境”用数学式子表示就是：

$$u(0,t)=u_0,$$

$$u(l,t)=u_1,$$

更一般的形式为

$$u|_{x=0}\equiv u(0,t)=f_1(t), \tag{1.19a}$$

$$u|_{x=l}\equiv u(l,t)=f_2(t). \tag{1.19b}$$

即未知函数在边界上的值是已知的，通常称为**第Ⅰ类边界条件**。

(2) 杆在$x=l$处“绝热”，由“绝热”这个条件不能推断该端点u的值，但“绝热”意味着该端点与周围介质没有热量交换，即该端点的热流强度为零。热流强度与温度梯度成正比。在$x=l$处，“区域”$[0,l]$的外法向就是x轴的正向，故有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

一般若单位时间内流经单位面元的热量已知，则有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=l}=g(t). \tag{1.20}$$

从数学上看，相当于未知函数沿“界面”外法向的方向导数已知，称这种条件为**第Ⅱ类边界条件**。

(3) 杆的一端处于“自由冷却”状态。从“自由冷却”这个物理条件既不能推出“界面”上u的值，也不能推出u_n的值。但“自由冷却”意味着在“界面”上细杆与介质有热量传