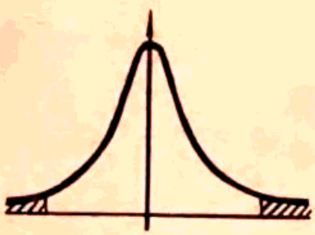
经济数学基础

概率统计

安徽财贸学院应用数学教研室　编



中国商业出版社

(京)新登字 073 号
责任编辑：于清良

内容提要

本书依据高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲第三部分《概率统计》编写，全书分概率论与数理统计两大部分共七章，介绍了随机事件与概率，随机变量的分布和数字特征，随机向量，抽样分布，统计估计，假设检验，回归分析的基本理论和方法。

本书内容适当，概念清楚，语言通顺，各章节选配了一定数量的练习和习题，书末附有参考答案，便于教学。可作为高等学校财经类专业及相关专业的本科生、函授生，自考生的教材，也可作为财经、经济管理工作者的自学用书。

经济数学基础
（概率统计）
安徽财贸学院应用数学教研室
*
中国商业出版社出版发行
北京市宣武区报国寺 1 号
新华书店经销
安徽省蚌埠坦克学院印刷厂印刷
安徽省蚌埠粮校激光照排印刷厂照排
*
开本：787×1092　1/16　印张：13.13　字数：288 千字
1994 年 11 月第 1 版 1994 年 11 月第 1 次印刷
印刷：00001－4500

IBSN7－5044－2783－7/G·196　定价：9.00 元

前　言

《概率统计》是高等学校财经类专业核心课程《经济数学基础》的第三部分。为了适应我院本科各专业多种形式的教学需要，我们根据国家教委审定的教学大纲编写了这本教材。参加编写的同志有：葛恒林、赵魁君、钱晓莉、苏孝正。

限于编者的教学水平和业务水平，书中不当之处在所难免，敬请有关专家和读者不吝赐教。

安徽财贸学院应用数学教研室

1994 年 8 月

目　录

第一章　随机事件与概率

在自然界里，在人类社会的各种活动中，人们能够观察到各种现象。有一类现象，在一定的条件下其结果有确定性，即必然发生（或必然不发生）。例如，向上抛出的物体必然会下落；在一个大气压下水加热到100℃必然会沸腾，而在40℃时就不会沸腾；等腰三角形的两底角必然相等，等等。这类现象称为确定性现象或**必然现象**。在自然界和社会上还存在着另外一种现象，这种现象与必然现象不同，在一定的条件下，其结果有偶然性，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果。例如，掷一枚均匀的硬币，落下后，可能正面向上，也可能反面向上；一射击运动员打一枚飞碟，可能打中也可能打不中；新生的婴儿可能是男，也可能是女；一火车站在相同条件下运营，每天发送的旅客数却并不完全相同，等等。这类现象称为偶然性现象或**随机现象**。

对随机现象进行一次或少几次观察，其结果具有不确定性，但是在相同条件下进行大量观察时，它的结果却呈现出某种规律性，例如，根据各个国家各个时期的大量人口统计资料，新生婴儿中男婴和女婴的比例大约总是1:1；均匀的硬币抛掷多次，落下后，正面向上的次数大约占抛掷次数的一半，等等。这种规律性称为随机现象的**统计规律性**。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

概率统计的理论和方法应用十分广泛，目前已涉及几乎所有科学技术领域及国民经济的各个部门。在经济管理科学日趋定量化的今天，概率统计已成为现代经济管理工作者必须掌握的基本工具技能课程。

§1·1　随机事件

一　随机试验

为了研究随机现象的统计规律性，我们把对随机现象进行的观察和所做的科学实验，统称为一个试验，用字母E表示。下面是一些试验的例子。

E_1：抛一枚硬币，落下后，观察正面、反面出现的情况。

E_2：掷一枚骰子，观察出现的点数。

E_3：记录某商店一天内接待的顾客数。

E_4：从一批灯管中任取一只，测试其寿命。

E_5：射手进行射击，击不中再击，直至击中为止，观察射击情况。

E_6：记录某条河流一年中的最低水位和最高水位。

以上所举六个试验的例子，都有一些共同的特点：

1、在相同的条件下，可以重复进行；

2、每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确所有可能的结果；

3、在试验进行之前，不能确定预言哪一个结果会出现。

在概率论中，我们把具有重复性，明确性，随机性三个特点的试验称为**随机试验**，简称试验，以后所说试验均为随机试验。我们是通过随机试验来研究随机现象的。

二 随机事件

在一次随机试验中可能出现也可能不出现而在大量重复试验中具有某种规律性的事件，称为**随机事件**，简称**事件**。一般用大写拉丁字母 A、B、C…等表示。例如在试验 E_1 中 A＝{出现正面}；B＝{出现反面}。在试验 E_4 中 C＝{寿命为 800 小时}；D＝{寿命大于 1000 小时}等都是随机事件。

随机试验中，每一个可能出现的结果都是一个随机事件，它们是这个试验中最简单，不可再分的事件，称为**基本事件**。例如在试验 E_1 中{出现正面}，{出现反面}；在试验 E_2 中{出现 1 点}，{出现 2 点}，…，{出现 6 点}都是基本事件。由基本事件组合而成的事件称为**复合事件**。在 E_2 中{点数大于 4}是一个复合的随机事件，它是由{出现 5 点}，{出现 6 点}这两个基本事件所组成，只要这两个基本事件中有一个发生，{点数大于 4}这一事件就发生。

在一次试验中必然会发生的事件叫做**必然事件**，记为 Ω，在一次试验中必然不会发生的事件叫做**不可能事件**，记为 Φ。例如，在试验 E_2 中{点数不大于 6}是必然事件，{点数大于 6}是不可能事件；在试验 E_5 中，{至少射击 1 次}是必然事件，{射击次数小于 1}是不可能事件。

必然事件和不可能事件都是确定性事件，实际上并不是随机事件，但是为了以后讨论方便，我们把它们当作特殊的随机事件。

三 样本空间

前面已经提出，基本事件就是随机试验的每一个可能的结果 ω 组成的单点集{ω}。每一个可能的结果 ω 称为随机试验的一个样本点，由随机试验 E 的所有样本点组成的集合，称为试验 E 的**样本空间**。对于任何一个随机试验，其结果必定是全部基本事件中的一个，这样，样本空间作为一个事件一定是必然事件，所以也用 Ω 表示。样本空间的元素是由试验 E 的内容所确定的。

以下是前面六个试验的样本空间：

$\Omega_1=\{$正，反$\}$

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega_3=\{0,1,2\cdots\}$

$\Omega_4=\{T|T\geqslant 0\}$

$\Omega_5=\{+,-+,--+,\cdots\}$这是“＋”表示击中，“－”表示没击中。

$\Omega_6=\{(x,y)|Ho\leqslant x<y\leqslant H_1\}$，这里 x 表示最低水位，y 表示最高水位，并且历史上该河水位不会低于 H_o(若有断流则 $H_o=0$)，不会高于 H_1。

因为样本空间是集合，因而，可以用集合表示事件，例如在 E_2 的样本空间 Ω_2 中，基本事件{出现 1 点}，{出现 2 点}…，{出现 6 点}可以用单点集{1}，{2}，…{6}表示，而复合事件{点数大于 4}是由基本事件“5”，“6”所组成，是 Ω_2 的子集{5，6}。

特别要指出的是，样本空间 Ω 就是必然事件，空集 Φ 不包含任何样本点，作为样本空间 Ω 的子集，就是不可能事件。

四 事件间的关系和运算

因为研究事件及其概率的需要，有必要引入事件之间的一些重要关系和运算。由于随机事件是

样本空间 Ω 的子集，所以事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的，这样，我们常用集合的关系和运算来分析事件的关系与运算。

1. **事件的包含与相等**　若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件** A，记为 $B \supset A$，或 $A \subset B$。

如果事件 B 包含事件 A，并且事件 A 也包含事件 B，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$。

2. **事件的和(并)**　事件 A 与事件 B 至少有一个发生，即"A 或 B"，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A \cup B$ 或 $A+B$

3. **事件的积(交)**　事件 A 与事件 B 同时发生，即"A 且 B"，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A \cap B$ 或 AB。

事件的和与事件的积都可以很容易推广到任意有限多个，以至可列无限多个事件上去。①

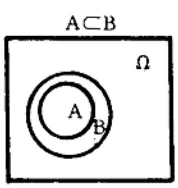
4. **事件的差**　事件 A 发生而事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为 $A-B$。

5. **互不相容事件**　若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B **互不相容(互斥)**，基本事件是两两互不相容的。

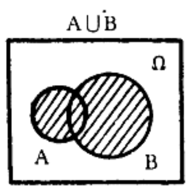
6. **对立事件**　如果事件 A 与事件 B 满足 $A \cup B=\Omega$　$AB=\Phi$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件(逆事件)**，事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，显然 $\overline{\overline{A}}=A$。对立事件一定是互不相容的，反之，互不相容事件不一定是对立事件。

7. **完备事件组**　n 个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 两两互不相容，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n=\Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个**完备事件组**。样本空间 Ω 的全体基本事件构成一个完备事件组。

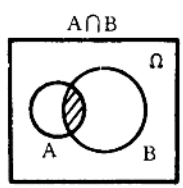
与集合一样，事件间的关系和运算可以用图 1—1～图 1—6 直观地表示。例如，在图 1—1 中矩形表示样本空间 Ω，圆 A 和圆 B 分别表示事件 A 和事件 B，且事件 B 包含事件 A。其他各图中的阴影部分表示事件 A 与事件 B 的各种关系和运算。



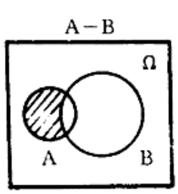
(图 1—1)



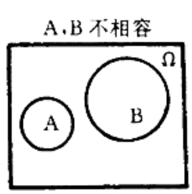
(图 1—2)



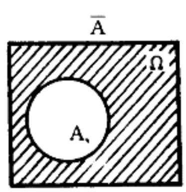
(图 1—3)



(图 1—4)



(图 1—5)



(图 1—6)

① 一个集合，如果其中的元素能与自然数集 $N=\{1,2,\cdots,n\cdots\}$ 的元素组成 1——1 对应关系，则称该集合为可列集。显然可列集是一个无限集合。

随机事件的运算满足以下算律：

交换律：$A\cup B=B\cup A$

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

分配律可以推广到有限或无限多个事件的情形，即

$$A\cup(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i)$$

$$A\cup(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i(A\cup A_i)$$

摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

摩根律也可以推广到有限或可列无限多个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}\qquad\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$$

例 1 掷一枚硬币两次，A＝{第一次出现正面}，B＝{第二次出现正面}，把下列各事件用 A、B 表示出来。

(1)两次至少有一次出现正面；

(2)两次都是正面；

(3)两次都是反面；

(4)至少有一次出现反面。

解 (1)$A\cup B$

(2)AB

(3)$\overline{A}\,\overline{B}$

(4)$\overline{A}\cup\overline{B}$ 或 $\overline{AB}$

例 2 甲、乙、丙三人射击同一目标，设 A、B、C 分别表示甲、乙、丙击中，用事件 A、B、C、表示下列各事件

(1)三人都击中；

(2)三人都未击中；

(3)甲击中，乙、丙未击中；

(4)三人至少有一人未中；

(5)三人中至多有一人击中。

解 (1)ABC

(2)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$

(3)$A\overline{B}\,\overline{C}$

(4)$A\cup B\cup C$

(5)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}$

例 3 设 A、B、C 为三事件，下列各事件表示什么意思：

(1)$A\overline{B}\,\overline{C}$ (2)$(A\cup B)\overline{C}$

(3)$\overline{B}\,\overline{C}$ (4)$\overline{A}\cup\overline{B}$

(5)$\overline{ABC}$ (6)$AB\cup BC\cup AC$

解 (1)$A\overline{B}\,\overline{C}$ 表示 A 发生且 B、C 都不发生；

(2)$(A\cup B)\overline{C}$表示 A 和 B 至少有一个发生且 C 没有发生；

(3)$\overline{B}\,\overline{C}$表示 B,C 都没有发生；

(4)$\overline{A}\cup\overline{B}$表示 A、B 中至少有一个没发生；

(5)$\overline{ABC}$表示 A,B,C 中至少多有两个发生；

(6)$AB\cup BC\cup AC$表示 A,B,C 中至少有两个发生。

例 4 证明 $A-B=A\overline{B}$

证 事件 $A-B$ 是事件 A 与 B 的差，它表示事件 A 发生并且事件 B 不发生。事件 $A\overline{B}$ 表示事件 A 与 B 的对立事件的积，也表示 A 发生并且 B 不发生，因而 $A-B$ 与 $A\overline{B}$ 是同一个事件，故有

$$A-B=A\overline{B}$$

练习 1·1

1、写出下列随机试验的样本空间：

E_1：掷一枚硬币两次，落下后，观察正，反面出现的情况。

E_2：掷两粒骰子，观察出现的点数。

E_3：记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数

E_4：一口袋中装有红、黄、兰三种颜色球，从袋中任取一只观察其颜色。

E_5：测量一辆汽车通过某路口的速度。

2、指出下列各题中哪些成立，哪些不成立。

(1)$A\cup B=(A\overline{B})\cup B$　　(2)$\overline{A}B=A\cup B$

(3)$\overline{A\cup B}C=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$　　(4)$(AB)(A\overline{B})=\Phi$

(5)若 $A\subset B$ 则 $A=AB$　　(6)若 $A\subset B$ 则 $A=A\cup B$

(7)若 $A\subset B$ 则 $\overline{B}\subset\overline{A}$　　(8)若 $B\subset A$ 则 $A=A\cup B$

3、设 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$，$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，具体写出下列各式

(1)$\overline{A}B$；　(2)$\overline{A}\cup B$；　(3)$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$；　(4)$\overline{A\overline{BC}}$　(5)$\overline{A(B\cup C)}$

4 从某单位任选一人，设 A 表示选到的人会英语，B 表示选到的人会日语，则以下各式表示选到什么样的人：

(1)$\overline{A}$　(2)$\overline{B}$　(3)$A-B$　(4)$\overline{(A\cup B)}$　(5)$\overline{AB}$

5、设三事件 A、B、C 满足 $ABC=\Phi$，问这三事件是否一定两两互不相容？画图说明。

§1·2　概率

一　频率与概率

一个随机事件，在一次试验中可能发生，也可能不发生，在大量试验中，我们总会发现有些事件发生的可能性大些，有些事件发生的可能性小些，因此，我们总是希望找到一个数量指标来表示事件发生可能性的大小，这个数量指标应该是事件本身所固有的，而不是人们臆测的一种客观的量度，当事件发生的可能性较大时，它的值就大，反之，当事件发生的可能性较小时，它的值就小。这个度量事件 A 发生可能性大小的数量指标，称为事件 A 的概率，记为 P(A)。下面，我们通过频率来讨

论概率。

在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数称为事件 A 发生的**频数**，记为 n_A，频数 n_A 与试验总次数 n 的比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**，记为 fn(A)，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

在 n 次试验中，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 有以下性质：

1. **非负性** $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$
2. **正则性** $f_n(\Omega)=1\quad f_n(\Phi)=0$
3. **可加性** 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 事件两两互不相容，则
$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

证 1. 因为 $0\leqslant n_A\leqslant n$ 所以有 $0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant 1$，即

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$$

2. 因为 Ω 是必然事件，在每次试验中必然发生，因此 $n_\Omega=n$；Φ 是不可能事件，在每次试验中都不可能发生，因此 $n_\Phi=0$，所以有

$$f_n(\Omega)=1\quad f_n(\Phi)=0$$

3. 只证 k=2 的情形。因为事件 $A_1\cup A_2$ 发生表示事件 A_1，A_2 至少有一个发生，又因为 A_1、A_2 互不相容，所以在 n 次试验中 $A_1\cup A_2$ 发生的频数等于事件 A_1 发生的频数与事件 A_2 发生的频数之和即 $n_{A_1\cup A_2}=n_{A_1}+n_{A_2}$，所以有

$$f_n(A_1\cup A_2)=\frac{n_{A_1\cup A_2}}{n}=\frac{n_{A_1}+n_{A_2}}{n}=f_n(A_1)+f_n(A_2)$$

事件 A 发生的频率是它发生的频数与试验次数之比，它的大小表示事件 A 在试验中发生的频繁程度，反映了事件 A 发生的可能性的大小。因此，很自然的想法是用频率来反映概率，历史上有很多人做过大量试验来探讨这个问题。

例 1 将一枚均匀的硬币抛掷 5 次，50 次，500 次，各做 10 组，以 A 表示"正面向上"，即徽花向上，得到数据如表 1－1 所示

表 1－1

实验序号	n=5		n=50		n=500	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从上表可以看出，当抛掷次数比较少时，频率 fn(A) 波动较大，但随着 n 的增大，$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近波动，呈现出稳定性，历史上一些著名学者所做的试验，其数据如表 1－2 所示更能说明这

一点。

表 1—2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K·皮尔逊	12000	6019	0.5016
K·皮尔逊	24000	12012	0.5005

例 2 为检验某种子的发芽率，从一大批种子中抽取 10 批种子做发芽试验，其结果如表 1—3 所示

表 1—3

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表中可以看出，发芽率在 0.9 附近摆动。

以上两个例子说明，当试验次数 n 逐渐增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常 p 附近，这种频率的稳定性，即通常所说的统计规律性，显示了随机现象的客观规律。这个常数 p 就是刻划事件 A 发生可能性大小的数量指标——概率。

定义 1·1 在相同的条件下，重复进行 n 次试验，当试验次数 n 很大时，事件 A 发生频率稳定地在一个常数 p 附近摆动，通常，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记为 P(A)。

上述定义称为概率的统计定义，数值 p 是事件 A 发生可能性大小的数量指标，它的值完全取决于这个事件的性质。是不依赖于试验而客观存在的。如在抛硬币试验中，事件"正面向上"的频率在$\frac{1}{2}$附近摆动，在发芽试验中，发芽率在 0.9 附近摆动，$\frac{1}{2}$，0.9 都是不依赖试验而客观存在的。在大量试验中，它通过频率表现出来了。在许多实际问题中就是用频率的稳定值近似地代替概率。例如：一个射手射击 1000 次中靶 800 次，我们就说他中靶的概率是 0.8；抽查某工厂产品 500 件发现次品 50 件，就说该厂产品的次品率(次品的概率)为 0.1。

二　概率的性质

由频率的性质及概率的统计定义可以得到概率的三条性质

性质 1(非负性) 对任一事件 A 都有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

性质 2(正则性) 对必然事件 Ω 和不可能事件 Φ 有

$$P(\Omega)=1 \qquad P(\Phi)=0$$

性质 3(可加性) 设 $A_1, A_2 \cdots$ 为有限个或可列个两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_i A_i)=\sum_i P(A_i) \tag{1.1}$$

概率的这三条性质是经过长期实践总结出来的，是我们研究概率的出发点，在这三条性质的基础上，可以推导出概率的以下性质。

性质 4　如果 $A \subset B$ 则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A) \tag{1.2}$$

证　由于 $A \subset B$，有 $B=(B-A) \cup A$ 且 $B-A$ 与 A 互不相容，由概率的可加性，得

$$P(B)=P[(B-A) \cup A]=P(B-A)+P(A)$$

移项得

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

又由于 $P(B-A) \geqslant 0$，还可得

$$P(B) \geqslant P(A)$$

性质 5　如果事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$，构成一个完备事件组，则有

$$\sum_i P(A_i)=1 \tag{1.3}$$

特别地，对立事件的概率有

$$P(\overline{A})=1-P(A) \tag{1.4}$$

证　由于 $A_1, A_2, \cdots A_n \cdots$ 是一个完备事件组，所以有①两两互不相容；② $\bigcup_i A_i=\Omega$，所以根据概率的可加性有

$$\sum_i P(A_i)=P(\bigcup_i A_i)=P(\Omega)=1$$

特别地，对于对立事件 A 与 $\overline{A}$，有 $A \cup \overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，所以有

$$P(\Omega)=P(A \cup \overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

移项得

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 6　对于任意两个事件 A 与 B 有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.5}$$

(1·5)式称为加法公式

证　因 $A \cup B=A \cup (B-AB)$（参见图 1—2），且有 $A(B-AB)=\Phi$；$AB \subset B$，由性质 3 性质 4 可得

$$P(A \cup B)=P[A \cup (B-AB)]=P(A)+P(B-AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

性质 6　还可以推广到多个事件的情况，如 A_1, A_2, A_3 为三个任意事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3) \tag{1.6}$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 可用数字归纳法证得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots\cdots A_n) \tag{1.7}$$

三　古典概型

概率论发展史上最早的研究对象就是古典概型。它具有以下两个特点：

1、试验的所有基本事件总数是有限的；

2、试验中每个基本事件发生的可能性相同。

凡具有有限性和等可能性的随机试验称为**古典概型（等可能概型）**。

在古典概型中，如果基本事件的总数为 n，事件 A 是由 m 个基本事件复合而成，则 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1·8}$$

例 3 从 0，1，2…，9 这 10 个数字中，任取一个，求下各事件的概率：(1)取到的数是 5；(2)取到的是奇数；(3)取到的是偶数；(4)取到的数能被 3 整除。

解 设 A、B、C、D 分别表示(1)、(2)、(3)、(4)各事件，则样本空间为

$\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\}$

$A=\{5\}$

$B=\{1,3,5,7,9\}$

$C=\{0,2,4,6,8\}$

$D=\{0,3,6,9\}$

由于 Ω 包含有限个元素，且每个基本事件发生的可能性相等，故有

$$P(A)=\frac{1}{10} \qquad P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$P(C)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \qquad P(D)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

例 4 袋中有 8 只球，其中有 6 只白球，2 只红球，从袋中取球两次，每次任取一只，考虑两种取球方式，(a)第一次取一只球，观察颜色后放回，再取第二只（这种取球方式称回置式抽样），(b)第一次取一只球不放回，第二次从剩下的球中再取一只（这种取球方式称非回置式抽样）分别就以上两种情况求(1)取到的两只球都是白球的概率；(2)取到的两只球颜色不同的概率；(3)取到的两只球至少有一只是白球的概率。

解 (a)回置式抽样的情况

设 A、B、C 分别表示事件“两只都是白球”、“两球颜色不同”、“两球至少一只是白球”。

先计算基本事件总数，第一步从袋中先取一球，共有 8 种取法，第二步再从袋中取第二只球，由于先取的球已放回，故有 8 种取法，所以共有 8×8 种取法。即基本事件总数为 8^2 个。

(1)对于事件 A，第一次有 6 个白球可取，第二次也有 6 个白球可取，总共有 $6\times6=6^2$ 种取法，即 A 包含 6^2 基本事件于是

$$P(A)=\frac{6\times6}{8\times8}=\frac{9}{16}$$

(2)设 B_1 表示“第一次取到白球，第二次取到红球”，B_2 表示“第一次取到红球，第二次取到白球”，则 B_1、B_2 互不相容。且 $B=B_1\cup B_2$，对于 B_1，第一次取到白球有 6 种取法，第二次取到红球有 2 种取法，共有 6×2 种取法，同样对于 B_2 共有 2×6 种取法，于是

$$P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{6\times2}{8\times8}+\frac{2\times6}{8\times8}=\frac{3}{8}$$

(3)对事件 C，由事件 A，B 的假设可知

$C=A\cup B$，而 A、B 互不相容，于是

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{9}{16}+\frac{6}{16}=\frac{15}{16}$$

(b)非回置式抽样的情况

先计算基本事件总数，第一次从袋中先取一球，共有 8 种取法，第二次是从剩下的球中取一球，共有 7 种取法，所以共有 8×7 种，取法即基本事件总数为 8×7 个，同理，事件 A 包含的基本事件总数 6×5 个，事件 B 包含的基本事件总数为 6×2+2×6 个。于是

$$(1)P(A)=\frac{6\times5}{8\times7}=\frac{15}{28}$$

$$(2)P(B)=\frac{6\times2+2\times6}{8\times7}=\frac{12}{28}$$

$$(3)P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{27}{28}$$

非回置式取样实质上和将取球方法换为一次取球两只结果是一样的。

从8只球中一次取两次，共有 C_8^2 种取法，而事件A包含的基本事件总数为 C_6^2 种，事件B包含的事件总数为 $C_6^1C_2^1$ 种，于是

$$(1)P(A)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$$

$$(2)P(B)=\frac{C_6^1C_2^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}$$

$$(3)P(C)=P(A\cup B)=\frac{27}{28}$$

例5 设有N件产品，其中有M件次品，从中任取 $n(n<N)$ 件，问其中恰有 $k(k\leqslant M)$ 件次品的概率是多少。

解 设A为事件“任取n件产品中恰有k件次品”。

从N件产品中任取n件共有 C_N^n 种取法，即基本事件总数为 C_N^n，从M件次品中任取k件共有 C_M^k 种取法，从 $N-M$ 件正品中取剩下的 $n-k$ 件正品共有 C_{N-M}^{n-K} 种取法，所以事件A包含的基本事件总数为 $C_M^K\cdot C_{N-M}^{n-K}$，于是

$$P(A)=\frac{C_M^KC_{N-M}^{n-K}}{C_N^n}$$

上式称为超几何概率，实际上有许多问题可以看作这一模型。

例6 将n个球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中（设每个盒子的容量不限），求(1)每个盒子内至多只有一个球（设为A）的概率。(2)指定的n个盒子每个只有一个球（设为B）的概率。(3)某个指定的盒子中恰有 $k(k\leqslant n)$ 个球的概率。

解 这是一个古典概率问题，一个球放入N个盒子中，共有N种放法，n个球共有 N^n 种放法，即基本事件总数为 N^n。

(1)每个盒子内至多有一个球共有 $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 种放法，于是

$$P(A)=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n}$$

如果 $N=n$ 则上式化为 $P(A)=\frac{n!}{n^n}$

(2)在指定的n个盒子中每个只有一个球共有 $n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$ 种放法，于是

$$P(B)=\frac{n!}{N^n}$$

(3)在指定的盒子中放k个球共有 C_n^k 种放法剩下的 $n-k$ 个球放入剩下的 $N-1$ 盒子中共有 $(N-1)^{n-k}$ 种放法。于是

$$P(C)=\frac{C_n^K(N-1)^{n-k}}{N^n}$$

例7 8支球队随机地分成两组进行预赛，其中有2支种子队，求(1)每个组分到1支种子队（设为事件A）的概率是多少？(2)2支种子队分在同一组（设为事件B）的概率是多少？

解 8支球队平均分成2个组共有 $C_8^4C_4^4$ 种分法。

(1)把2支种子队平均分到两个组中分法有2！种，其余的6支球队平均分到两个组中共有 $C_6^3C_3^3$ 种分法。因此，每个组分到1支种子队的分法有 $2!\ C_6^3C_3^3$ 种，于是

$$P(A)=\frac{2!\ C_6^3C_3^3}{C_8^4C_4^4}=\frac{4}{7}$$

(2)把2支种子队分在同一组的分法有2种，剩下的6支球队一个组分2支，另一个分4支的分法有$C_6^2C_4^4$种。因此，2支种子队分在同一组的分法共有$2\times C_6^2C_4^4$种，于是

$$P(B)=\frac{2\times C_6^2C_4^4}{C_8^4C_4^4}=\frac{3}{7}$$

例8 在1—1000的整数中任取一数，求取到的数既不能被5整除，又不能被6整除的概率是多少？

解 设A为事件"取到的数能被5整除"，B为事件"取到的数能被6整除"，则所求的概率为

$$P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(AB)\}$$

由于$\frac{1000}{5}=200$，故能被5整除的数有200个，于是

$$P(A)=\frac{200}{1000}$$

由于$166<\frac{1000}{6}<167$，故能被6整除的数有166个，于是

$$P(B)=\frac{166}{1000}$$

一个数能被5和6同时整除就相当于能被30整除，由于$33<\frac{1000}{30}<34$，故能被30整除的数有33个，于是

$$P(AB)=\frac{33}{1000}$$

所以，取到的数即不能被5整除，又不能被6整除的概率为

$$P\{\overline{A}\ \overline{B}\}=1-\{\frac{200}{1000}+\frac{166}{1000}-\frac{33}{1000}\}=0.667$$

练习1.2

1、一部五卷文集任意地排列到书架上，问卷号顺序自右向左或自左向右恰好为12345的概率等于多少？

2、抛一枚硬币三次，求既有正面出现又有反面出现的概率。

3、从一副52张的扑克中任取四张，求这四张牌花色各不相同的概率。

4、从1—10十个数字任取3个数，求(1)取到的最小数为5的概率，(2)取到的最大数是5的概率。

5、把十本书任意地放在书架上，求其中指定的三本书放在一起的概率。

6、袋内装有10个球，其中6个红球，4个白球，从中任取5个，求(1)取到的球中恰有3个红球2个白球的概率。(2)取到的球中至少有一个红球的概率。

7、有5条线段，其长分别为1,3,5,7,9，任取其中三条，求它们能构成三角形的概率。

8、将三个球随机地放入四个盒子中去，求下列事件的概率：(1)事件A为任意三个盒子中各有一个球；(2)事件B为一个盒子中有两个球，另一个盒子中有一个球；(3)事件C为"三个球放入一个盒子中。"

§1·3 条件概率与独立性

一 条件概率

在许多问题中，不仅需要考虑事件 B 发生的概率 P(B)，还需要考虑在事件 A 已发生的前提下，事件 B 发生的概率，通常，这两者并不相等。由于有了附加条件，因此称这种概率为事件 A 发生的条件下事件 B 的**条件概率**，记为 $P(B|A)$，先看一个简单的例子。

例 1 掷一枚骰子，观察点数，设事件 A 为"出现奇数点"，事件 B 为"出现的点数不超过 3"，求在事件 A 已发生的条件下事件 B 的条件概率。

解 样本空间 Ω，A，B 为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A=\{1,3,5\}$$

$$B=\{1,2,3\}$$

由于事件 A 已发生，所以{2，4，6}已不可能出现，试验所有可能的基本事件就是事件 A 所包含的三个，形成一个缩减了的样本空间

$$\Omega_A=\{1,3,5\}$$

在此样本空间中，事件 B 包含的基本事件只有{1}，{3}，于是

$$P(B|A)=\frac{2}{3}$$

这里，我们注意到，$P(B)=\frac{3}{6}\neq P(B|A)$，这是因为 P(B)是在样本空间 Ω 中计算的，而 $P(B|A)$ 是在事件 A 发生的条件下，在缩减了的样本空间 Ω_A 中计算的。

另外，我们可由 $P(A)=\frac{3}{6}$ $P(AB)=\frac{2}{6}$

得 $$P(B|A)=\frac{2}{3}=\frac{2/6}{3/6}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

对一般古典概型问题，设基本事件总数为 n，事件 A 包含的基本事件总数为 m_A，事件 AB 包含的基本事件总数为 m_{AB}，如果事件 A 已发生，则样本空间缩减成为 Ω_A，包含的基本事件总数为 m_A，此时 B 再发生，所包含的基本事件总数就是 m_{AB}，于是也有

$$P(B|A)=\frac{m_{AB}}{m_A}=\frac{m_{AB}/n}{m_A/n}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

这个结论对一般情形也成立，我们把它作为条件概率的定义。

定义 1.2 设 A、B 是两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.9}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率。

不难验证，条件概率 $P(B|A)$ 满足概率的三条性质，即

1、对于每一个事件 B 有 $0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$；

2、$P(\Omega|A)=1$

3、设 $B_1, B_2\cdots$ 是两两互不相容事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B/A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i/A)$$

由于条件概率满足上述三条性质，所以概率的所有性质都适用于条件概率。

例 2 某种电子元件连续使用 200 小时以上的概率为 0.8，连续使用 250 小时以上的概率为 0.6，一原件已连续使用 200 小时，问它能使用 250 小时以上的概率是多少？